Cobordisme complexe des espaces profinis et foncteur T de Lannes

par FRANÇOIS-XAVIER DEHON[1]

Extrait

Table des matières

[1] L'auteur a bénéficié pendant la réalisation de ce travail d'une bourse individuelle Marie Curie de la Commission européenne (HPMF-CT-1999-00135).

Appendice A
Monades et algèbres sur une monade

Les notions et résultats qui suivent sont classiques en théorie des catégories; nous renvoyons à [**Bor**, Chap. 4] pour un exposé plus général. L'exposé qui suit est motivé par notre usage constant des monades et algèbres sur une monades pour d'une part exprimer les structures additives et d'algèbre instable de la MU-cohomologie continue d'un espace profini et d'autre part construire certains foncteurs associés à ces structures (produit tensoriel, foncteurs de division). Son originalité tient à ce que nous nous restreignons aux monades à valeurs dans la catégories des groupes abéliens gradués (plus généralement dans la catégorie des objets en groupes abéliens d'une catégorie sous certaines conditions sur cette catégorie). Les coégalisateurs réflexifs d'algèbres sur une telle monade sont scindés dans la catégorie des ensembles gradués, ce qui entraîne des propriétés d'exactitude très fortes des foncteurs définis sur la catégorie des algèbres sur la monade.

La première section (A.1) traite des coégalisateurs de 1-complexes (ou coégalisateurs réflexifs) d'objets en groupe abélien (proposition A.1.2) pour ensuite montrer l'existence des colimites de diagrammes d'algèbres sur une monade donnée T (proposition A.1.5) et donner un critère d'exactitude à droite d'un foncteur défini sur les T-algèbres sous certaines hypothèses sur T (proposition A.1.6). Elle se termine par la notion de sous-T-algèbre et de T-algèbre quotient lorsque T est une monade sur la catégorie des ensembles gradués.

La section A.2 considère la monade associée à une paire de foncteurs adjoints et montre comment on étend par exactitude à droite un foncteur défini sur les objets libres en un foncteur défini sur toutes les algèbres associées à la monade (proposition A.2.2). On en déduit une variante du théorème de Beck (proposition A.2.4).

Dans la section A.3 on applique ce qui précède pour caractériser les monades dont la catégorie d'algèbres associée est abélienne (proposition A.3.2).

La dernière section (A.4) traite des résolutions : notion de complexe augmenté acyclique relativement à une classe d'objets en cogroupes abéliens, version simpliciale, résolutions dans la catégorie des algèbres sur une monade. Nous renvoyons à [**BB**] pour des compléments sur ce dernier point.

A.1. Diagrammes coégalisateurs et monades. — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Nous appelons 1-complexe de $\mathcal{C}$ et notons $C_1 \overset{\rightrightarrows}{\leftarrow} C_0$ un couple de morphismes $\mathrm{d}_0, \mathrm{d}_1 : C_1 \to C_0$ entre deux objets de $\mathcal{C}$ muni d'une section commune $\mathrm{s}_0 : C_0 \to C_1$. Dualement nous appelons 1-cocomplexe de $\mathcal{C}$ un couple de morphismes $C^0 \to C^1$ muni d'un retract commun.

Nous dirons qu'un diagramme $C_1 \overset{\rightrightarrows}{\leftarrow} C_0 \to C$ est coégalisateur si le morphisme $C_0 \to C$ fait de C le coégalisateur des deux morphismes d_0 et $\mathrm{d}_1 : C_1 \to C_0$ (Nous dirons alors aussi que C est le coégalisateur du 1-complexe $C_1 \overset{\rightrightarrows}{\leftarrow} C_0$). *Idem* pour les diagrammes égalisateurs. Observons que si C_0 et C_1 sont deux objets de $\mathcal{C}$ admettant une somme $C_1 \sqcup C_0$ dans $\mathcal{C}$, le coégalisateur d'un couple de morphismes $C_1 \rightrightarrows C_0$ coïncide avec le coégalisateur du 1-complexe $C_1 \sqcup C_0 \leftrightarrows C_0$ obtenu en prenant l'identité sur C_0.

Soient f et g deux morphismes entre 1-complexes $C_1 \leftrightarrows C_0$ et $D_1 \leftrightarrows D_0$ ($f = (f_0 : C_0 \to D_0, f_1 : C_1 \to D_1)$, etc.). Une homotopie en degré 0 de f vers g est un morphisme $h : C_0 \to D_1$ tel que $\mathrm{d}_0 h = f_0$ et $\mathrm{d}_1 h = g_0$. Nous dirons qu'un morphisme $f : \triangle \to \triangle'$ entre 1-complexes est une équivalence d'homotopie en degré 0 s'il existe un morphisme $g : \triangle' \to \triangle$ et des homotopies en degré 0 de gf vers l'identité de $\triangle$ et de fg vers l'identité de $\triangle'$.

Exemple. La donnée d'un morphisme d'un 1-complexe $C_1 \leftrightarrows C_0$ dans le 1-complexe constant $C \leftrightarrows C$ associé à un objet C équivaut à la donnée d'un morphisme $g : C_0 \to C$ telle que les composée $g\mathrm{d}_0$ et $g\mathrm{d}_1$ soient égales. Un tel morphisme est une équivalence d'homotopie en degré 0 si et seulement s'il existe des morphismes $s : C \to C_0$ et $s' : C_0 \to C_1$ tels qu'on ait les identités

$$gs = \mathrm{Id}_C,\ \mathrm{d}_1 s' = \mathrm{Id}_{C_0},\ \mathrm{d}_0 s' = sg\ .$$

Lemme A.1.1. — (a) *Soient $\triangle$, $\triangle'$ deux 1-complexes de $\mathcal{C}$ admettant un coégalisateur et f, g deux morphismes $\triangle \to \triangle'$. Si f est homotope en degré 0 à g alors f et g induisent les mêmes morphismes entre les coégalisateurs.*

(b) *Soient C un objet de $\mathcal{C}$ et f un morphisme d'un 1-complexe $C_1 \leftrightarrows C_0$ dans le diagramme constant $C \leftrightarrows C$. Si f est une équivalence d'homotopie en degré 0 alors le diagramme $C_1 \leftrightarrows C_0 \to C$ est coégalisateur.*

Démonstration. — Le point (a) est facile. Pour le point (b) choisissons des morphismes s, s' vérifiant les identités $f_0 s = \mathrm{Id}_C$, $\mathrm{d}_1 s' = \mathrm{Id}_{C_0}$, $\mathrm{d}_0 s' = s f_0$. Soit $g : C_0 \to D$ un morphisme dans $\mathcal{C}$ égalisant d_0 et d_1 ; alors g est égal à la composée gsf_0 donc se factorise par $C_0 \to C$. Cette factorisation est unique car $C_0 \to C$ admet une section. □

Nous dirons qu'un diagramme $C_1 \leftrightarrows C_0 \to C$ est un diagramme coégalisateur scindé (ou que C est un coégalisateur scindé du 1-complexe $C_1 \leftrightarrows C_0$) si le morphisme $C_0 \to C$ induit une équivalence d'homotopie en degré 0 de $C_1 \leftrightarrows C_0$ dans le 1-complexe constant $C \leftrightarrows C$. La propriété d'être scindé est préservée par tout foncteur.

On a bien sûr le même formalisme et les mêmes énoncés pour les 1-cocomplexes de $\mathcal{C}$.

Si $\mathcal{C}$ possède tous les produits finis (en particulier un objet terminal), on note $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ la catégorie des objets en groupe abélien de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire des objets $C \in \mathcal{C}$ munis d'un morphisme $C \times C \to C$ faisant de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C', C)$ un groupe abélien naturel en $C' \in \mathcal{C}$. Tout diagramme de $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ qui admet une limite dans $\mathcal{C}$ admet une limite dans $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ et l'oubli $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}} \to \mathcal{C}$ commute aux limites. En particulier l'objet terminal de $\mathcal{C}$ est l'objet nul de $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$. Les sommes finies coïncident avec les produits finis dans $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$.

Soit alors $M_1 \leftrightarrows M_0$ un 1-complexe de $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ et supposons l'existence des noyaux. La composée $\mathrm{s}_1\mathrm{d}_1$ est un projecteur de M_1 ; notons M_1' son noyau et d la restriction de d_0 à M_1'. On dispose d'un isomorphisme canonique dans $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ du 1-complexe

$M_1 \rightleftarrows M_0$ dans le 1-complexe $(\mathrm{d}, \mathrm{Id}_{M_0})$, $(0, \mathrm{Id}_{M_0})$, $(0, \mathrm{Id}_{M_0}) : M_1' \oplus M_0 \rightleftarrows M_0$. La catégorie des 1-complexes de $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ est donc équivalente à celle des morphismes de $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$. Le coégalisateur dans $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ de $M_1 \rightleftarrows M_0$ s'identifie via cette équivalence au conoyau de d. Pour toute paire de morphismes f, g entre 1-complexes de $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$, une homotopie en degré 0 dans $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$, respectivement dans $\mathcal{C}$, de f vers g s'identifie via cette équivalence à un relèvement dans $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$, respectivement dans $\mathcal{C}$, de $f - g$ par rapport à d. En particulier la relation d'homotopie en degré 0 dans $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ ou dans $\mathcal{C}$ entre morphismes de 1-complexes de $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ est une relation d'équivalence.

Proposition A.1.2. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie possédant toutes les limites et colimites finies. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout objet $C \in \mathcal{C}$ le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)$ transforme le coégalisateur dans $\mathcal{C}$ d'un 1-complexe de $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ en le coégalisateur du 1-complexe image.*

(ii) *Le coégalisateur dans $\mathcal{C}$ d'un 1-complexe de $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ est un coégalisateur scindé.*

Si elles sont vérifiées, la catégorie $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ est abélienne et l'oubli $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}} \to \mathcal{C}$ commute aux coégalisateurs de 1-complexes.

Démonstration. — La condition (ii) implique (i).

Supposons la condition (i) vérifiée. Soient $M_1 \rightleftarrows M_0$ un 1-complexe de $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ et M son coégalisateur dans $\mathcal{C}$. Alors pour tout objet C de $\mathcal{C}$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, M)$ hérite de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, M_0)$ d'une structure de groupe abélien naturelle en C. Autrement dit M hérite de M_0 d'une structure d'objet en groupe abélien qui en fait le coégalisateur dans $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ du 1-complexe donné. Comme le conoyau d'un morphisme s'identifie au coégalisateur du 1-complexe associé, on en déduit que les conoyaux existent dans $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ et que le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)$ (additif) commute aux conoyaux donc est exact.

Soit $M \to N$ un morphisme dans $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$. On dispose d'un morphisme

$$\mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(M \to N) \to M) \to \mathrm{Ker}(N \to \mathrm{Coker}(M \to N))$$

dont l'image par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)$ est un isomorphisme quelque soit $C \in \mathcal{C}$ donc qui est iso dans $\mathcal{C}$ donc iso dans $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$. Autrement dit la catégorie $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ est abélienne.

Il reste à montrer que la condition (ii) est satisfaite. Il suffit pour cela de montrer que si $f : M \to N$ et $g : N \to P$ sont des morphismes dans $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ tels que la suite $M \to N \to P \to 0$ est exacte alors il existe des morphismes $s : P \to N$ et $s' : N \to M$ dans $\mathcal{C}$ tels que $gs = \mathrm{Id}_P$ et $sg - fs' = \mathrm{Id}_N$. L'existence de s vient de ce que le morphisme de groupes abéliens $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, P)$ est surjectif car de conoyau nul. L'existence de s' vient de ce que le morphisme $g(sg - \mathrm{Id}_N) = gsg - g$ est nul et de ce que la suite

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, P) \to 0$$

est exacte. $\square$

Exemple. Prenons pour $\mathcal{C}$ la catégorie des ensembles ; alors $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ est la catégorie des groupes abéliens et la condition (i) de la proposition est vérifiée. L'exemple le plus important pour notre travail est en fait la catégorie $\mathcal{E}$ns-gr des ensembles gradués ($\mathcal{E}\text{ns-gr}_{\mathrm{ab}}$ est la catégorie des groupes abéliens gradués). Nous rencontrerons aussi la catégorie produit $\mathcal{E}$ns-gr $\times$ $\mathcal{E}$ns-gr.

L'importance pour notre propos des diagrammes coégalisateurs scindés apparaît par les propositions A.1.4 et A.1.5 ci-dessous. Nous commençons par définir :

Une monade sur une catégorie $\mathcal{C}$ est un endofoncteur T de $\mathcal{C}$ muni de transformations naturelles $\eta : \mathrm{Id} \to T$ et $\mu : T^2 \to T$ telles que pour tout objet C de $\mathcal{C}$

– les composées $\mu(C) \circ T(\mu(C))$ et $\mu(C) \circ \mu(T(C)) : T^3(C) \to T(C)$ sont égales ;
– les composées $\mu(C) \circ T(\eta(C))$ et $\mu(C) \circ \eta(T(C)) : T(C) \to T(C)$ sont l'identité.

Soit T une monade sur $\mathcal{C}$. Une T-algèbre est un objet M muni d'un morphisme $\alpha : T(M) \to M$ tel que

– les composées $\alpha \circ \mu(M)$ et $\alpha \circ T(\alpha) : T^2(M) \to M$ sont égales ;
– la composée $\alpha \circ \eta(M) : M \to M$ est l'identité.

Si M et M' sont deux T-algèbres, un morphisme de T-algèbres de M dans M' est un morphisme $M \to M'$ dans $\mathcal{C}$ tel que le diagramme induit

$$\begin{array}{ccc} T(M) & \to & T(M') \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \to & M' \end{array}$$

commute. En particulier un morphisme de T-algèbres est un isomorphisme si et seulement si le morphisme de $\mathcal{C}$ sous-jacent est un isomorphisme. Les T-algèbres et leurs morphismes forment une catégorie qu'on note $\mathcal{C}(T)$. On dispose d'un foncteur oubli évident $\mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}$.

Soit C un objet de $\mathcal{C}$; le morphisme $\mu(C) : T^2(C) \to T(C)$ fait de $T(C)$ une T-algèbre naturelle en C et le morphisme $\eta(C) : C \to T(C)$ induit pour toute T-algèbre N une bijection $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(T)}(T(C), N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, N)$: $T(C)$ est la T-algèbre libre sur C. Plus généralement on appelle T-algèbre libre une T-algèbre isomorphe à $T(C)$ pour un certain objet $C \in \mathcal{C}$.

Soit M une T-algèbre ; le diagramme

$$T^2(M) \;\overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}}\; T(M) \to M$$

de $\mathcal{C}$ formé des morphismes $d_0 = \mu(M)$, $d_1 = T(\alpha)$, $s_0 = T(\eta(M))$ et α est un diagramme coégalisateur canoniquement scindé par les morphismes $\eta(M)$ et $\eta(T(M))$. On vérifie d'autre part que le morphisme $\alpha : T(M) \to M$ est un morphisme de T-algèbres de sorte que le diagramme $T^2(M) \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} T(M) \to M$ est un diagramme dans $\mathcal{C}(T)$ naturel en $M \in \mathcal{C}(T)$. Il est coégalisateur dans $\mathcal{C}(T)$ par le lemme ci-dessous mais pas coégalisateur scindé en général.

Lemme A.1.3. — *Soient $M_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} M_0$ un 1-complexe de T-algèbres admettant un coégalisateur M dans $\mathcal{C}$. On suppose que les images par T et T^2 du diagramme $M_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} M_0 \to M$ sont encore des diagrammes coégalisateurs dans $\mathcal{C}$; alors M hérite d'une structure naturelle de T-algèbre faisant de lui le coégalisateur du 1-complexe $M_1 \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} M_0$ dans $\mathcal{C}(T)$.*

Démonstration. — Si les diagrammes $T(M_1) \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} T(M_0) \to T(M)$ et $T^2(M_1) \overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{\leftarrow}} T^2(M_0) \to T^2(M)$ sont des diagrammes coégalisateurs dans $\mathcal{C}$, les morphismes de structure $T(M_1) \to M_1$ et $T(M_0) \to M_0$ induisent un morphisme $T(M) \to M$ qui fait de M une T-algèbre. Comme le morphisme $T(M_0) \to T(M)$ est épi, tout morphisme de T-algèbres de M_0 dans une T-algèbre N qui se factorise dans $\mathcal{C}$ par $M_0 \to M$ se factorise dans la catégorie des T-algèbres. $\square$

On suppose désormais que $\mathcal{C}$ est cocomplète, c'est à dire possède toutes les colimites indexées par une catégorie petite. On note $(\mathcal{Q}_0)$ et $(\mathcal{Q}_1)$ les conditions suivantes :

$(\mathcal{Q}_0)$ Le coégalisateur dans $\mathcal{C}$ d'un 1-complexe de T-algèbres est un coégalisateur scindé.

$(\mathcal{Q}_1)$ L'image par T du coégalisateur dans $\mathcal{C}$ d'un 1-complexe de T-algèbres est le coégalisateur dans $\mathcal{C}$ du 1-complexe image.

La condition $(\mathcal{Q}_0)$ implique $(\mathcal{Q}_1)$.

Proposition A.1.4. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie possédant toutes les limites et colimites finies et vérifiant la condition (i) de la proposition A.1.2. Soit T une monade sur $\mathcal{C}$ telle que le foncteur T et la transformation naturelle $T \circ T \to T$ sont à valeurs dans $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$; alors T vérifie $(\mathcal{Q}_0)$.*

Démonstration. — Soit M une T-algèbre ; alors M est le coégalisateur scindé dans $\mathcal{C}$ du 1-complexe d'objets en groupes abéliens $T^2(M) \rightleftarrows T(M)$ donc hérite d'une structure d'objet en groupe abélien. On en déduit grâce à la proposition A.1.2 que le coégalisateur dans $\mathcal{C}$ d'un 1-complexe de T-algèbres est un coégalisateur scindé. □

Proposition A.1.5. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie cocomplète et T une monade sur $\mathcal{C}$ vérifiant $(\mathcal{Q}_1)$; alors $\mathcal{C}(T)$ est cocomplète et le foncteur oubli $\mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}$ commute aux coégalisateurs de 1-complexes.*

Démonstration. — On observe d'abord que les coégalisateurs de 1-complexes existent dans $\mathcal{C}(T)$ et que l'oubli $\mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}$ commute aux coégalisateurs de 1-complexes par le lemme A.1.3.

Soit (M_α) un diagramme de T-algèbres. Chaque M_α est le coégalisateur dans $\mathcal{C}(T)$ du 1-complexe $T^2(M_\alpha) \rightleftarrows T(M_\alpha)$. Par adjonction, la colimite dans $\mathcal{C}(T)$ du diagramme image par T de (M_α) est l'image par T de la colimite dans $\mathcal{C}$ des M_α. On obtient donc un 1-complexe $\mathrm{colim}_\alpha T^2(M_\alpha) \rightleftarrows \mathrm{colim}_\alpha T(M_\alpha)$ de $\mathcal{C}(T)$. Son coégalisateur dans $\mathcal{C}(T)$ est la colimite dans $\mathcal{C}(T)$ du diagramme (M_α) par commutation des colimites entre elles. □

Notons que le foncteur oubli $\mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}$ ne commute pas aux colimites en général. A l'opposé le foncteur $\tilde{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}(T)$ qui associe à un objet C l'objet $T(C)$ muni de sa structure naturelle de T-algèbre est adjoint à gauche de l'oubli $\mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}$ donc commute aux colimites.

Proposition A.1.6. — *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories cocomplètes, T une monade sur $\mathcal{C}$ vérifiant la condition $(\mathcal{Q}_1)$ et F un foncteur $\mathcal{C}(T) \to \mathcal{D}$. On suppose que pour toute T-algèbre M l'image par F du diagramme $T^2(M) \rightleftarrows T(M) \to M$ est coégalisateur dans $\mathcal{D}$; alors :*

(a) *F commute aux coégalisateurs de 1-complexes si et seulement si la composée $F\tilde{T}$ transforme le coégalisateur dans $\mathcal{C}$ d'un 1-complexe de T-algèbres en le coégalisateur dans $\mathcal{D}$ du 1-complexe image.*

(b) *Supposons la condition du (a) vérifiée ; alors F commute aux colimites finies si et seulement si $F\tilde{T}$ transforme la somme de deux objets en la somme des images ; F commute aux colimites indexées par une catégorie petite si $F\tilde{T}$ commute de plus aux colimites filtrantes.*

Démonstration. — Pour le point (a), on observe d'abord que l'oubli $\mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}$ commute aux coégalisateurs de 1-complexes par la proposition A.1.5. Soient $M_1 \rightleftarrows M_0$ un 1-complexe de $\mathcal{C}(T)$ et M son coégalisateur. Les diagrammes $M_1 \rightleftarrows M_0 \to M$ et $T(M_1 \rightleftarrows M_0 \to M)$ sont coégalisateurs dans $\mathcal{C}$, donc également leurs images par $F \circ \tilde{T}$ dans $\mathcal{D}$ par hypothèse. Or $F(M)$ est le coégalisateur dans $\mathcal{D}$ de l'image par F du 1-complexe $T^2(M) \rightleftarrows T(M)$ de $\mathcal{C}(T)$, donc est le coégalisateur de l'image par F du 1-complexe $M_1 \rightleftarrows M_0$ par commutation des colimites entre elles.

Le point (b) s'obtient en exprimant une colimite finie (respectivement une colimite indexée par une catégorie petite) à l'aide de sommes finies (respectivement de sommes finies et de colimites filtrantes) et d'un coégalisateur de 1-complexe, en utilisant le fait que le foncteur $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}(T)$ commute par adjonction aux colimites, en exprimant une colimite de T-algèbres comme le coégalisateur d'un 1-complexe de T-algèbres libres (cf la démonstration de la proposition A.1.5) et en utilisant la commutation des colimites entre elles. $\square$

La condition du (a) est automatiquement vérifiée si la monade T vérifie $(\mathcal{Q}_0)$.

Dualement si $\mathcal{C}$ est complète alors tout diagramme (M_α) de T-algèbres indexé par une catégorie petite admet une limite et l'oubli $\mathrm{C}(T) \to \mathcal{C}$ commute aux limites. L'objet de $\mathcal{C}$ sous-jacent à la limite des M_α est la limite dans $\mathcal{C}$ du diagramme (M_α) et le morphisme $T(\lim_\alpha M_\alpha) \to \lim_\alpha M_\alpha$ est donné par les composées $T(\lim_\alpha M_\alpha) \to T(M_\beta) \to M_\beta$ induites par les projections $\lim_\alpha M_\alpha \to M_\beta$ et la structure de T-algèbre des M_β.

Puisque l'oubli $\mathrm{C}(T) \to \mathcal{C}$ est fidèle et admet un adjoint à gauche, un morphisme de $\mathcal{C}(T)$ est un monomorphisme si et seulement si le morphisme de $\mathcal{C}$ sous-jacent est un monomorphisme.

Cas particulier : Sous-objets et objets quotient des algèbres associées à une monade sur $\mathcal{E}$ns-gr. — Soient T une monade sur la catégorie $\mathcal{E}$ns-gr des ensembles gradués et M une T-algèbre. Une sous-T-algèbre de M est un sous-ensemble gradué M' muni d'une structure de T-algèbre telle que l'inclusion $M' \to M$ soit un morphisme de T-algèbres. De même une T-algèbre quotient de M est un ensemble gradué quotient muni d'une structure de T-algèbre compatible. Les structures compatibles de T-algèbre sur un sous-ensemble gradué ou un ensemble gradué quotient, lorsqu'elles existent, sont uniques. Si M' est une sous-T-algèbre de M (respectivement une T-algèbre quotient), le morphisme $M' \to M$ est un monomorphisme de $\mathcal{E}$ns-gr(T) (respectivement $M \to M'$ est un épimorphisme de $\mathcal{E}$ns-gr(T)).

Soit $M \to M'$ un morphisme de T-algèbres. On lui associe le 1-complexe de T-algèbres $M \times_{M'} M \rightleftarrows M$. Notons Q le coégalisateur dans $\mathcal{E}$ns-gr de ce 1-complexe ; c'est donc un ensemble gradué quotient de M. Comme le diagramme

$$M \times_{M'} M \rightleftarrows M \to Q$$

est un diagramme coégalisateur scindé dans $\mathcal{E}$ns-gr, Q hérite de M d'une structure de T-algèbre faisant de lui le coégalisateur de $M \times_{M'} M \rightleftarrows M$ dans $\mathcal{E}$ns-gr(T) (lemme A.1.3). Comme le morphisme $M \to M'$ égalise les deux morphismes $M \times_{M'} M \to M$, il se factorise par la projection $M \to Q$. Comme l'application $Q \to M'$ est injective en chaque degré, on en déduit une structure de T-algèbre sur l'image de M dans M'

isomorphe à celle de Q. Autrement dit le morphisme de T-algèbres $M \to M'$ s'écrit de façon unique comme la composée de la projection de M sur une T-algèbre quotient avec un isomorphisme de ce quotient dans une sous-T-algèbre de M'.

Exemple. Soient M une T-algèbre et S un sous-ensemble gradué de M. L'image du morphisme $T(S) \to M$ (adjoint de l'inclusion $S \subset M$) est la plus petite sous-T-algèbre de M contenant S.

Observons au passage que si $M \to M'$ est un morphisme de T-algèbres et Q une T-algèbre quotient de M, alors $M \to M'$ se factorise par la projection $M \to Q$ dans $\mathcal{E}$ns-gr(T) si et seulement si il se factorise par $M \to Q$ dans $\mathcal{E}$ns-gr, ceci parce que chacune des conditions est équivalente à $M \to M'$ égalise les deux morphismes $M \times_Q M \to M$.

A.2. Monades et adjonctions. — Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories et soit $O : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un foncteur admettant un adjoint à gauche L. L'unité $\eta : \mathrm{Id} \to OL$ et la transformation naturelle $O\epsilon L : OLOL \to OL$ induite par la counité $\epsilon : LO \to \mathrm{Id}$ munissent la composée $T = OL$ d'une structure de monade sur $\mathcal{C}$. Dualement la composée LO a une structure naturelle de comonade sur $\mathcal{D}$. (On donne un sens précis à cette dualité en considérant la catégorie opposée à la catégorie des catégories.)

Pour toute OL-algèbre M le 1-complexe $(OL)^2(M) \rightleftarrows (OL)(M)$ est l'image par O du 1-complexe $LOL(M) \rightleftarrows L(M)$ de $\mathcal{D}$ formé des morphismes $\epsilon(L(M))$, $L(\alpha)$ et $L(\eta(M))$. Tout morphisme $M \to M'$ de OL-algèbres induit un morphisme entre les 1-complexes $LOL(M) \rightleftarrows L(M)$ et $LOL(M') \rightleftarrows L(M')$ de $\mathcal{D}$.

Soit M un objet de $\mathcal{D}$. Le morphisme $O(\epsilon(M)) : OLO(M) \to O(M)$ munit $O(M)$ d'une structure de OL-algèbre donc définit un relèvement $\mathcal{D} \to \mathcal{C}(OL)$ du foncteur $O : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, que nous noterons $\tilde{O}$ si besoin. Le diagramme associé

$$(OL)^2O(M) \rightleftarrows (OL)O(M) \to O(M) ,$$

qui, rappelons le, est canoniquement un diagramme coégalisateur scindé dans $\mathcal{C}$ donc coégalisateur dans $\mathcal{C}(OL)$, est l'image par O du diagramme

$$(LO)^2(M) \rightleftarrows LO(M) \to M$$

issu de l'adjonction entre L et O.

On note

– $L(\mathcal{C})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}$ formée des objets $L(C)$, C décrivant $\mathcal{C}$,

– $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}$ formée des objets isomorphes à un objet de $L(\mathcal{C})$ et

– $\mathcal{L}_{\mathcal{C}(OL)}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}(OL)$ formée des OL-algèbres libres.

(L'inclusion de $L(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ est une équivalence de catégorie.)

Lemme A.2.1. — (a) *Le foncteur $\tilde{O} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}(OL)$ induit une équivalence de catégorie $\mathcal{L}_{\mathcal{D}} \to \mathcal{L}_{\mathcal{C}(OL)}$.*

(b) *Soit M un objet de $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$; alors le diagramme $(LO)^2(M) \rightleftarrows LO(M) \to M$ est un diagramme coégalisateur scindé dans $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$.*

Démonstration. — Pour tout objet C de $\mathcal{C}$, l'image par $\tilde{O}$ de $L(C)$ est la OL-algèbre libre sur C. Soient C et C' deux objets de $\mathcal{C}$. On a par adjonction des bijections

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L(C), L(C')) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, OL(C')) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(OL)}(OL(C), OL(C'))$$

d'où le point (a).

Pour le point (b) il suffit de choisir un isomorphisme $M \simeq L(C)$ et d'observer que le diagramme $(LO)^2(L(C)) \rightrightarrows LO(L(C)) \to L(C)$ est canoniquement scindé dans $\mathcal{D}$ par les morphismes $L(\eta(C))$ et $L(\eta_{OL}(C))$. □

Exemple. Soit T une monade sur $\mathcal{C}$; prenons pour $\mathcal{D}$ la catégorie $\mathcal{C}(T)$ et pour O le foncteur oubli $\mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}$. Le foncteur $\tilde{T}$ est adjoint à gauche de O et le foncteur $\tilde{O} : \mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}(O\tilde{T}) = \mathcal{C}(T)$ est une équivalence de catégorie (c'est l'identité). La proposition A.2.4 donnera une réciproque.

Proposition A.2.2. — *Soient $\mathcal{D}'$ une catégorie cocomplète et F un foncteur $L(\mathcal{C}) \to \mathcal{D}'$; alors il existe un foncteur $\tilde{F} : \mathcal{C}(OL) \to \mathcal{D}'$ unique à isomorphisme près vérifiant*

(1) *La composée $L(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}(OL) \to \mathcal{D}'$ est isomorphe à F.*
(2) *Pour toute OL-algèbre M l'image par $\tilde{F}$ du diagramme*

$$(OL)^2(M) \rightrightarrows OL(M) \to M$$

est coégalisateur.

Démonstration. — Si $\tilde{F}$ existe alors pour tout $C \in \mathcal{C}$, $\tilde{F}(OL(C))$ est isomorphe à $F(L(C))$ naturellement en $L(C)$ par la propriété (1) de sorte que pour toute OL-algèbre M, $\tilde{F}(M)$ est naturellement isomorphe au coégalisateur dans $\mathcal{D}'$ de l'image par F du 1-complexe $LOL(M) \rightrightarrows L(M)$, d'où l'unicité.

Pour l'existence on définit pour $M \in \mathcal{C}(OL)$ $\tilde{F}(M)$ comme ce coégalisateur. Pour tout objet C de $\mathcal{C}$ le diagramme

$$(LO)^2(L(C)) \rightrightarrows LO(L(C)) \to L(C)$$

est (canoniquement) un diagramme coégalisateur scindé dans $L(\mathcal{C})$, donc également son image par F dans $\mathcal{D}'$. On en déduit un isomorphisme canonique $\tilde{F}(OL(C)) \to F(L(C))$, d'où les propriétés (1) et (2). □

On suppose désormais que la catégorie $\mathcal{C}$ est cocomplète et que la monade OL vérifie $(\mathcal{Q}_1)$. Nous allons voir que l'oubli $\mathcal{C}(OL) \to \mathcal{C}$ est alors en quelque sorte la meilleure approximation de O par un foncteur commutant aux coégalisateurs de 1-complexes.

Soit $(\mathcal{D}', O' : \mathcal{D}' \to \mathcal{C})$ une catégorie cocomplète au dessus de $\mathcal{C}$ telle que O' commute aux coégalisateurs de 1-complexes, et soit $F : L(\mathcal{C}) \to \mathcal{D}'$ un foncteur tel que la composée $O'F$ est naturellement isomorphe à la restriction de O à $L(\mathcal{C})$. La proposition A.2.2 montre que F s'étend en un foncteur $\tilde{F} : \mathcal{C}(OL) \to \mathcal{D}'$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{D} \arrow[r, "\tilde{O}"] & \mathcal{C}(OL) \arrow[dl] \arrow[dd, "\tilde{F}"] \\
\mathcal{C} \arrow[r, "L"] & L(\mathcal{C}) \arrow[ur] \arrow[r, "O"] \arrow[drr, "F"'] & \mathcal{C} & \\
 & & & \mathcal{D}' \arrow[ul, "O'"']
\end{tikzcd}$$

Lemme A.2.3. — (a) *On a pour toute OL-algèbre M un isomorphisme naturel $O'\tilde{F}(M) \cong OM$.*

(b) *Supposons F défini sur $\mathcal{D}$ entier ; alors on a pour tout $M \in \mathcal{D}$ un morphisme naturel $\tilde{F}\tilde{O}(M) \to F(M)$ qui est un isomorphisme si M est dans $\mathcal{L}_\mathcal{D}$.*

Démonstration. — L'image par $O'\tilde{F}$ d'une OL-algèbre M est le coégalisateur dans $\mathcal{C}$ du 1-complexe $O'F(\,LOL(M) \rightleftarrows L(M)\,)$ par construction de $\tilde{F}$ et puisque O' commute aux coégalisateurs de 1-complexes. Comme la composée $O'F$ est isomorphe à O et comme OM est le coégalisateur (canoniquement scindé) dans $\mathcal{C}$ du 1-complexe $(OL)^2(M) \rightleftarrows OL(M)$, on en déduit un isomorphisme naturel $O'\tilde{F}(M) \simeq OM$.

Pour le point (b) soit M un objet de $\mathcal{D}$. L'image par F de la counité $\epsilon(M) : LO(M) \to M$ se factorise par l'épimorphisme $F(LO(M)) \to \tilde{F}\tilde{O}(M)$, d'où un morphisme $\tilde{F}\tilde{O}(M) \to F(M)$ naturel en M. Le point (b) du lemme A.2.1 montre que ce morphisme est un isomorphisme si M est dans $\mathcal{L}_\mathcal{D}$. □

Proposition A.2.4. — *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories cocomplètes et $O : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un foncteur admettant un adjoint à gauche L. On suppose que O commute aux coégalisateurs de* 1*-complexes et qu'un morphisme de $\mathcal{D}$ est un isomorphisme dès que son image par O est un isomorphisme ; alors la monade OL vérifie* $(\mathcal{Q}_1)$ *et le foncteur $\mathcal{D} \to \mathcal{C}(OL)$ est une équivalence de catégories d'inverse* $(\mathrm{Id}_\mathcal{D})\tilde{}$.

Démonstration. — Le foncteur L commute aux colimites puisqu'il admet un adjoint à droite. On en déduit que la composée OL commute aux coégalisateurs de 1-complexes donc vérifie $(\mathcal{Q}_1)$.

On dispose des foncteurs $\tilde{O} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}(OL)$ et $(\mathrm{Id}_\mathcal{D})\tilde{} : \mathcal{C}(OL) \to \mathcal{D}$. Pour tout objet M de $\mathcal{D}$ le diagramme $(LO)^2(M) \rightleftarrows (LO)(M) \to M$ est coégalisateur car son image par O est coégalisateur (canoniquement scindé) dans $\mathcal{C}$ et O reflète les isomorphismes. On en déduit que le morphisme naturel $(\mathrm{Id}_\mathcal{D})\tilde{}\,\tilde{O}(M) \to M$ est iso. D'autre part pour toute OL-algèbre M on dispose d'un diagramme coégalisateur $LOL(M) \rightleftarrows L(M) \to (\mathrm{Id}_\mathcal{D})\tilde{}(M)$ par définition de $(\mathrm{Id}_\mathcal{D})\tilde{}$. On en déduit un morphisme $M \to \tilde{O}(\mathrm{Id}_\mathcal{D})\tilde{}(M)$ puisque M est le coégalisateur dans $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}(OL)$ du 1-complexe $(OL)^2(M) \rightleftarrows (OL)(M)$. Comme O commute aux coégalisateurs de 1-complexes et comme $\tilde{O}$ est un relèvement de O, ce morphisme est un isomorphisme dans $\mathcal{C}$ donc un isomorphisme dans $\mathcal{C}(OL)$. □

Voici un cas particulier : Soient T et T' deux monades sur $\mathcal{C}$ vérifiant $(\mathcal{Q}_1)$.

Lemme A.2.5. — *Un foncteur $\mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}(T')$ au dessus de $\mathcal{C}$ commute aux coégalisateurs de* 1*-complexes donc équivaut à la donnée d'un foncteur $T(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}(T')$ au* *dessus de $\mathcal{C}$, ou encore à la donnée d'une transformation naturelle $T' \to T$ compatible avec les structures de monade de T et T'.*

Démonstration. — Soit $R : \mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}(T')$ un foncteur au dessus de $\mathcal{C}$. Soient $M_1 \rightrightarrows M_0$ un 1-complexe de T-algèbres, M son coégalisateur dans $\mathcal{C}(T)$ et M' le coégalisateur dans $\mathcal{C}(T')$ du 1-complexe image par R. On obtient un morphisme $M' \to R(M)$, lequel est iso dans $\mathcal{C}$ puisque les foncteurs oubli commutent aux coégalisateurs de 1-complexes, donc iso dans $\mathcal{C}(T')$. Autrement dit R commute aux coégalisateurs de 1-complexes. Puisqu'une T-algèbre M est le coégalisateur dans $\mathcal{C}(T)$ du 1-complexe $T^2(M) \rightrightarrows T(M)$ de $T(\mathcal{C})$, R est donné par sa restriction à $T(\mathcal{C})$.

A toute structure naturelle de T'-algèbre sur $T(C)$, $C \in \mathcal{C}$, correspond un morphisme $T'(C) \to T(C)$, adjoint de l'unité $C \to T(C)$ et compatible avec les structures de monade de T et T'. Inversement si $T' \to T$ est un morphisme entre monades, on définit une structure de T'-algèbre sur les objets $T(C)$ comme celle donnée par la composée $T'(T(C)) \to T^2(C) \to T(C)$. $\square$

Soit $R : \mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}(T')$ un foncteur au dessus de $\mathcal{C}$. Pour toute paire d'objets $C \in \mathcal{C}$ et $N \in \mathcal{C}(T)$ on dispose des bijections naturelles

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(T')}(T'(C), R(N)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, N) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(T)}(T(C), N)$$

d'où on déduit un foncteur $L : T'(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}(T)$, $T'(C) \mapsto T(C)$, lequel s'étend en un foncteur $\tilde{L} : \mathcal{C}(T') \to \mathcal{C}(T)$. Comme pour toute T'-algèbre M l'objet $\tilde{L}(M)$ est le coégalisateur du 1-complexe $\tilde{L}(T'^2(M) \rightrightarrows T'(M))$, les bijections qui précèdent induisent une bijection naturelle $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(T')}(M, RN) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(T)}(\tilde{L}M, N)$ de sorte que $\tilde{L}$ est adjoint à gauche de R. La proposition A.2.4 montre alors que le foncteur $\tilde{R} : \mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}(T')(R\tilde{L})$ est une équivalence de catégories.

On a montré :

Corollaire A.2.6. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie cocomplète, T et T' deux monades sur $\mathcal{C}$ vérifiant $(\mathcal{Q}_1)$ et $R : \mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}(T')$ un foncteur au dessus de $\mathcal{C}$. Alors R commute aux coégalisateurs de 1-complexes, admet un adjoint à gauche L et le foncteur associé $\tilde{R} : \mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}(T')(RL)$ est une équivalence de catégorie.*

Remarque. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories cocomplètes et $O : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un foncteur admettant un adjoint à gauche L. On suppose que la monade OL vérifie $(\mathcal{Q}_0)$. On peut alors montrer que la catégorie $\mathcal{C}(OL)$ est équivalente à la catégorie des 1-complexes de $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ et classes d'homotopie en degré 0 de morphismes entre 1-complexes.

A.3. Application : Monades et catégories abéliennes.— Soit $\mathcal{C}$ une catégorie possédant les limites et colimites finies. On suppose que $\mathcal{C}$ vérifie la condition (i) de la proposition A.1.2. La catégorie $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ des objets en groupe abélien de $\mathcal{C}$ est alors abélienne et les coégalisateurs dans $\mathcal{C}$ de 1-complexes de $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ sont scindés dans $\mathcal{C}$ (proposition A.1.2).

Soit T une monade sur $\mathcal{C}$. Pour toute paire C, C' d'objets de $\mathcal{C}$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(T)}(T(C), T(C')) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, T(C'))$ a une structure de groupe abélien naturelle en $C \in \mathcal{C}$ et $T(C') \in \mathcal{C}(T)$ si et seulement si la restriction de l'oubli $\mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}$ à la sous-catégorie pleine $T(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}(T)$ se relève en un foncteur $A : T(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$, ce qui équivaut encore à ce que le foncteur T et la transformation naturelle $T^2 \to T$ soient à valeurs dans $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$. (On n'en déduit pas que cette structure sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(T)}(T(C), T(C'))$ est naturelle en $T(C) \in \mathcal{C}(T)$.)

Supposons cette condition satisfaite. La monade T vérifie alors la condition $(\mathcal{Q}_0)$ par la proposition A.1.4 donc $\mathcal{C}(T)$ est cocomplète et l'oubli $\mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}$ commute aux coégalisateurs de 1-complexes (proposition A.1.5).

Le foncteur $A : T(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ s'étend en un foncteur $\tilde{A} : \mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ au dessus de $\mathcal{C}$ avec les propriétés :

– $\tilde{A}$ commute aux coégalisateurs de 1-complexes (par la proposition A.1.6) ;

– $\tilde{A}$ commute aux limites.

Par adjonction, l'image par T de l'objet initial de $\mathcal{C}$ est l'objet initial de $\mathcal{C}(T)$. Notons 0 un objet final de $\mathcal{C}$; on vérifie que 0 a une unique structure de T-algèbre et que celle-ci en fait l'objet final de $\mathcal{C}(T)$.

Une deuxième condition pour que $\mathcal{C}(T)$ soit additive est que l'unique morphisme $T(\emptyset) \to 0$ soit un isomorphisme dans $\mathcal{C}(T)$, ce qui équivaut à ce que le morphisme $T(\emptyset) \to 0$ soit un isomorphisme dans $\mathcal{C}$, ou encore à ce que $\tilde{A}(T(\emptyset)) \to 0$ soit un isomorphisme dans $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$.

Supposons cette condition satisfaite et soient M et N deux T-algèbres. On dispose d'un morphisme canonique de la somme dans $\mathcal{C}(T)$ de M et N dans leur produit, défini par les morphismes identité de M et N et les morphismes nuls $M \to 0 \simeq T(\emptyset) \to N$ et $N \to T(\emptyset) \to M$. Une troisième condition pour que la catégorie $\mathcal{C}(T)$ soit additive est que ce morphisme soit un isomorphisme, ce qui équivaut à demander que le morphisme image par $\tilde{A}$ soit un isomorphisme dans $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$. La proposition A.1.6 montre que ce morphisme est un isomorphisme quels que soient M et N si (et seulement si) la composée $\tilde{A} \circ T$ transforme la somme de deux objets de $\mathcal{C}$ en la somme des images dans $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$, c'est à dire en le produit des images dans $\mathcal{C}$.

Supposons cette troisième condition satisfaite. Pour toute paire M, N de T-algèbres, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(T)}(M, N)$ possède alors une structure naturelle de monoïde abélien qui coïncide avec sa structure de groupe abélien si M et N sont dans $T(\mathcal{C})$. Comme le diagramme $T^2(M) \rightrightarrows T(M) \to M$ est coégalisateur scindé dans $\mathcal{C}$, il en est de même du diagramme image par le foncteur

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(T)}(T(C), -) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)$$

pour tout $C \in \mathcal{C}$ de sorte que le monoïde $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(T)}(T(C), M)$ est un groupe. De même son image par le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(T)}(-, N)$, pour tout $N \in \mathcal{C}(T)$, est un diagramme égalisateur de sorte que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(T)}(M, N)$ est un groupe. Autrement dit la catégorie $\mathcal{C}(T)$ est additive.

Rappelons qu'un foncteur R de $\mathcal{C}(T)$ dans une catégorie additive $\mathcal{B}$ est additif si et seulement si R transforme la somme de deux T-algèbres en la somme des images (cf [**Mac**, VIII, §2]). Puisque T vérifie $(\mathcal{Q}_0)$, la proposition A.1.6 devient :

Proposition A.3.1. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie possédant toutes les limites et colimites finies et vérifiant la condition (i) de la proposition A.1.2. Soient T une monade sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathcal{C}(T)$ soit additive, et R un foncteur de $\mathcal{C}(T)$ dans une catégorie additive $\mathcal{B}$. On suppose que pour toute T-algèbre M l'image par R du diagramme $T^2(M) \rightrightarrows T(M) \to M$ est coégalisateur. Alors R est additif si et seulement si $R \circ \tilde{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ transforme la somme de deux objets de $\mathcal{C}$ en la somme des images, auquel cas R est exact à droite.*

Soit maintenant $M \to N$ un morphisme de T-algèbres. On dispose d'un morphisme canonique de T-algèbres

$$\mathrm{coker}(\mathrm{Ker}(M \to N) \to M) \to \mathrm{Ker}(N \to \mathrm{coker}(M \to N))$$

dont l'image par $\tilde{A}$ est un isomorphisme puisque $\tilde{A}$ est exact, donc qui est iso dans $\mathcal{C}$ donc iso dans $\mathcal{C}(T)$. Autrement dit la catégorie $\mathcal{C}(T)$ est abélienne.

On a montré :

Proposition A.3.2. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie possédant toutes les limites et colimites finies et vérifiant la condition (i) de la proposition A.1.2. Soit T une monade sur $\mathcal{C}$; les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le foncteur T et la transformation naturelle $T^2 \to T$ sont à valeurs dans $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ et $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ transforme les sommes finies en produits.*
(ii) *La catégorie $\mathcal{C}(T)$ est additive.*

Si elles sont vérifiées, la monade T vérifie $(\mathcal{Q}_0)$ et $\mathcal{C}(T)$ est abélienne.

Observons que sous les hypothèses de la proposition le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)$ de $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ dans la catégorie des groupes abéliens est additif et exact (voir la démonstration de la proposition A.1.2). On en déduit qu'un morphisme de T-algèbres est un épimorphisme si et seulement si il est épi dans $\mathcal{C}$ et que les T-algèbres libres sont des objets projectifs dans $\mathcal{C}(T)$.

Soient T et T' deux monades sur $\mathcal{C}$ telles que les catégories $\mathcal{C}(T)$ et $\mathcal{C}(T')$ soient abéliennes, et R un foncteur $\mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}(T')$ au dessus de $\mathcal{C}$. Le corollaire A.2.6 montre que R commute aux limites donc R est additif, et que R commute aux coégalisateurs de 1-complexes donc R est exact à droite (cf également la proposition A.1.6). Le foncteur R admet un adjoint à gauche L par ce même corollaire. L est additif et exact à droite car il commute aux colimites. Le corollaire A.2.6 devient donc :

Proposition A.3.3. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie possédant toutes les limites et colimites finies et vérifiant la condition (i) de la proposition A.1.2. Soient T et T' deux monades sur $\mathcal{C}$ telles que les catégories $\mathcal{C}(T)$ et $\mathcal{C}(T')$ soient abéliennes, et $R : \mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}(T')$ un foncteur au dessus de $\mathcal{C}$. Alors R est additif, exact, admet un adjoint à gauche L et le foncteur associé $\tilde{R} : \mathcal{C}(T) \to \mathcal{C}(T)(RL)$ est une équivalence de catégories.*

Exemples. —

- Soit Λ un anneau, respectivement un anneau $\mathbb{Z}$-gradué. Notons $T(S)$ le Λ-module libre sur un ensemble, respectivement un ensemble gradué, S. Alors T a une structure de monade et la catégorie des T-algèbres de $\mathcal{E}$ns, respectivement $\mathcal{E}$ns-gr, est la catégorie abélienne des Λ-modules.
- Soit Λ un anneau (gradué). La catégorie des tours de Λ-modules, respectivement la catégorie des complexes de Λ-modules, coïncide avec la catégorie des $\Lambda[x]$-modules, où x est un générateur de degré -1, respectivement avec la catégorie des $\Lambda[x]/x^2$-modules.
- Soit $\mathcal{C}$ une catégorie possédant les limites et colimites finies et satisfaisant la condition (i) de la proposition A.1.2. Il suffit de construire pour tout objet $C \in \mathcal{C}$ un objet en groupe abélien libre sur C pour obtenir que $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ est une catégorie abélienne associée à une monade sur $\mathcal{C}$ (par la proposition A.2.4).

A.4. Résolutions. — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie possédant les sommes et produits finis et en particulier un objet initial ι. On note $\mathcal{C}_0$ la catégorie des objets de $\mathcal{C}$ au dessus de ι et, pour C dans $\mathcal{C}$, C_+ l'objet $C \times \iota$ de $\mathcal{C}_0$.

Un complexe de $\mathcal{C}_0$ est une suite d'objets (C_n), $n \in \mathbb{Z}$, et de morphismes $C_{n+1} \to C_n$ dans $\mathcal{C}_0$ telle que C_n est l'objet ι pour tout $n < 0$ et telle que la composée $C_{n+1} \to C_n \to C_{n-1}$ est le morphisme trivial $C_{n+1} \to \iota \to C_{n-1}$ pour tout n. Il est dit augmenté s'il est muni d'un morphisme $C_0 \to C$, pour un objet C de $\mathcal{C}_0$, tel que la composée $C_1 \to C_0 \to C$ est triviale ; on le note alors $C_* \to C$. La longueur d'un complexe augmenté $C_* \to C$ est la borne inférieure (éventuellement infinie) des entiers n tels que C_k est l'objet ι pour tout $k > n$.

On définit de même les notions duales de cocomplexe (relativement à un objet terminal de $\mathcal{C}$), de cocomplexe augmenté et de longueur d'un cocomplexe augmenté.

Soit $\mathcal{L}$ une classe d'objets en cogroupe abélien de $\mathcal{C}$ ou de façon équivalente, de $\mathcal{C}_0$ (*i.e.* chaque objet L de $\mathcal{L}$ est muni d'un relèvement du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L, -)$ en un foncteur à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens). Un complexe augmenté $C_* \to C$ est dit acyclique relativement à $\mathcal{L}$ si pour chaque objet L de $\mathcal{L}$ le morphisme entre complexes de groupes abéliens (concentré en degré 0 pour le second) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_0}(L, C_*) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_0}(L, C)$ induit un isomorphisme en homologie. On dit que deux morphismes f, g entre complexes sont homotopes relativement à $\mathcal{L}$ si pour tout objet L de $\mathcal{L}$ les morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_0}(L, f)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_0}(L, g)$ entre complexes de groupes abéliens sont homotopes.

Proposition A.4.1. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie possédant les sommes et produits finis, $\mathcal{L}$ une classe d'objets en cogroupe abélien de $\mathcal{C}$ et soient $L_* \to C$ et $D_* \to D$ deux complexes augmentés de $\mathcal{C}_0$. On suppose que L^n est dans $\mathcal{L}$ pour tout n et que $D_* \to D$ est acyclique relativement à $\mathcal{L}$; alors tout morphisme $C \to D$ se relève en un morphisme $L_* \to D_*$, unique à homotopie relativement à $\mathcal{L}$ près.*

Un objet simplicial augmenté de $\mathcal{C}$ est un objet simplicial $C_\bullet$ munit d'un morphisme de $C_\bullet$ dans un objet simplicial constant C. On le note $C_\bullet \to C$.

Soit $C_\bullet$ un objet simplicial de $\mathcal{C}$ et supposons que les limites finies existent dans $\mathcal{C}$. On définit le complexe normalisé N_*C de $C_\bullet$ par :

- $\mathrm{N}_0C = C_{0+}$,
- $N_{n+1}C$ est la limite du diagramme formé des objets C_{n+1}, C_n et ι, des morphismes $\mathrm{d}_i : C_{n+1} \to C_n$ pour $i \geq 1$ et du morphisme initial $\iota \to C_n$,
- $\mathrm{N}_{n+1}C \to \mathrm{N}_nC$ est le morphisme induit par d_0.

Observons que si L est un objet en cogroupe abélien de $\mathcal{C}$ et $C_\bullet$ un objet simplicial de $\mathcal{C}$ alors l'image par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_0}(L, -)$ du normalisé de $C_\bullet$ est le complexe normalisé du groupe abélien simplicial $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L, C_\bullet)$.

Rappelons que si $\mathcal{C}$ est abélienne alors le foncteur $C_\bullet \mapsto \mathrm{N}_*C$ préserve la relation d'homotopie sur les morphismes et qu'on dispose d'une équivalence d'homotopie canonique entre le complexe C_* formé de la somme alternée des faces d_i et le complexe N_*C par la théorie de Dold-Kan. (Cf [**Ma1**, §22].)

Un objet simplicial augmenté $C_\bullet \to C$ est dit acyclique relativement à une classe $\mathcal{L}$ d'objets en cogroupe abélien de $\mathcal{C}$ si pour tout objet L de $\mathcal{C}$ le complexe augmenté $\mathrm{N}_*C \to C_+$ est acyclique relativement à $\mathcal{L}$. Deux morphismes entre objets simpliciaux augmentés sont dit homotopes relativement à $\mathcal{L}$ si pour tout objet L de $\mathcal{L}$ leurs images par le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_0}(L, \mathrm{N}_*(-))$ sont homotopes. Si $C_\bullet \to C$ est une équivalence d'homotopie entre objets simpliciaux de $\mathcal{C}$ (voir par exemple [**Ma1**, I, §5] pour cette notion), la théorie de Dold-Kan montre que $C_\bullet \to C$ est acyclique relativement à tout objet en cogroupe abélien de $\mathcal{C}$.

La proposition suivante est la version simpliciale de la proposition A.4.1 :

Proposition A.4.2. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie possédant les sommes et limites finies, $\mathcal{L}$ une classe d'objets en cogroupe abélien de $\mathcal{C}$, $L_\bullet \to C$ et $D_\bullet \to D$ deux objets simpliciaux augmentés de $\mathcal{C}$. On suppose que L_n est dans $\mathcal{L}$ pour tout n et que $D_\bullet \to D$ est acyclique relativement à $\mathcal{L}$; alors tout morphisme $C \to D$ se relève en un morphisme $L_\bullet \to D_\bullet$ unique à homotopie relativement à $\mathcal{L}$ près.*

Démonstration. — Par induction sur les squelettes de $L_\bullet$. □

Monades et résolutions. — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie possédant les limites et colimites finies et vérifiant la condition (i) de la proposition A.1.2. La catégorie $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ est alors abélienne et pour tout $C \in \mathcal{C}$ le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)$ de $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ dans la catégorie des groupes abéliens est exact.

Soit T une monade sur $\mathcal{C}$ telle que le foncteur T et la transformation naturelle $T \circ T \to T$ sont à valeurs dans $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$. Alors pour tout objet $C \in \mathcal{C}$ la T-algèbre libre $T(C)$ est un objet en cogroupe abélien de $\mathcal{C}(T)$ naturellement en $C \in \mathcal{C}$ et un objet en groupe abélien de $\mathcal{C}$ naturellement en $T(C) \in \mathcal{C}(T)$.

Notons ι l'objet initial de $\mathcal{C}$; son image par T est l'objet initial de $\mathcal{C}(T)$. Pour M une T-algèbre au dessus de $T(\iota)$ on note $\tilde{M}$ le noyau dans $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ du morphisme $M \to T(\iota)$. La donnée d'un morphisme $T(C) \to M$ au dessus de $T(\iota)$ équivaut alors à la donnée d'un morphisme $C \to \tilde{M}$ dans $\mathcal{C}$.

On prend pour $\mathcal{L}$ la classe des T-algèbres libres. Ce qui précède montre qu'un complexe augmenté $M_* \to M$ de $\mathcal{C}(T)_0$, respectivement un objet simplicial augmenté $M_\bullet \to M$ de $\mathcal{C}(T)$, est acyclique relativement à $\mathcal{L}$ si et seulement si le complexe de $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ associé $\tilde{M}_* \to \tilde{M}$, respectivement $M_* \to M$, est acyclique. De même deux morphismes entre complexes de $\mathcal{C}(T)_0$, respectivement entre objets simpliciaux de $\mathcal{C}(T)$, sont homotopes relativement à $\mathcal{L}$ si et seulement si les morphismes de complexes de $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ associés sont homotopes.

La structure de monade de T permet d'associer à toute T-algèbre M une T-algèbre libre simpliciale $T_\bullet(M)$ et un morphisme de $T_\bullet(M)$ dans la T-algèbre simpliciale constante M qui est canoniquement une équivalence d'homotopie entre objets simpliciaux de $\mathcal{C}$ (voir par exemple [**Ma2**, §9]). En particulier le complexe augmenté de $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ associé $T_*(M) \to M$ est acyclique. On appelle $T_\bullet(M) \to M$ la T-résolution simpliciale canonique de M.

Appendice B
Produits tensoriels et torsion

Pour n un entier et S un ensemble gradué on note $\Sigma^n S$ l'ensemble gradué égal à S^{k-n} en degré k. Le foncteur $\Sigma = \Sigma^1$ est un isomorphisme de la catégorie $\mathcal{E}$ns-gr dans elle même, d'inverse Σ^{-1}.

On considère une monade T sur $\mathcal{E}$ns-gr vérifiant les deux conditions suivantes :

– La catégorie $\mathcal{E}$ns-gr(T) est abélienne.
– On a pour tout ensemble gradué S un isomorphisme naturel $T(\Sigma S) \cong \Sigma T(S)$ dans $\mathcal{E}$ns-gr commutant avec les transformations naturelles $\mathrm{Id} \to T$ et $T \circ T \to T$.

Pour toute T-algèbre M la composée $T(\Sigma M) \simeq \Sigma T(M) \to \Sigma M$ munit ΣM d'une structure de T-algèbre naturelle en $M \in \mathcal{E}$ns-gr(T). De même la composée $T(\Sigma^{-1} M) \simeq \Sigma^{-1} T(M) \to \Sigma^{-1} M$ munit $\Sigma^{-1} M$ d'une structure naturelle de T-algèbre. Les endofoncteurs Σ et Σ^{-1} de $\mathcal{E}$ns-gr se relèvent donc en des endofoncteurs de $\mathcal{E}$ns-gr(T) inverses l'un de l'autre.

Soient S et S' deux ensembles gradués. On définit l'ensemble gradué $S \otimes S'$ par

$$(S \otimes S')^n = \sqcup_{k+l=n} S^k \times S^l \ .$$

Il s'identifie au coproduit $\sqcup_{s \in S} \Sigma^{|s|} S'$, où $|s|$ désigne le degré d'un élément $s \in S$. La T-algèbre $T(S \otimes S')$ s'identifie au coproduit $\oplus_{s \in S} \Sigma^{|s|} T(S')$ ce qui en fait un foncteur en la T-algèbre $T(S')$. Symétriquement $T(S \otimes S')$ est un foncteur en $T(S)$.

Pour n entier notons S_n le sous-ensemble gradué de S formé des éléments de degré inférieur ou égal à n. Alors la T-algèbre $T(S_n)$ est un facteur direct de $T(S)$ naturel en $T(S)$ (parce que $\mathcal{E}$ns-gr(T) est additive), les $T(S_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, forment une tour d'épimorphismes et on a un isomorphisme $T(S) \simeq \lim_n T(S_n)$. On définit le produit tensoriel $T(S) \otimes_T T(S')$ comme la limite sur n des T-algèbres $T(S_n \otimes S'_n)$.

Observons que le couple (T, T) hérite de T d'une structure de monade sur $\mathcal{E}$ns-gr $\times$ $\mathcal{E}$ns-gr et que la catégorie abélienne produit $\mathcal{E}$ns-gr$(T) \times \mathcal{E}$ns-gr(T) s'identifie à la catégorie des (T,T)-algèbres de $\mathcal{E}$ns-gr $\times$ $\mathcal{E}$ns-gr. Comme la monade T vérifie $(\mathcal{Q}_0)$, il en est de même pour (T,T).

La proposition A.2.2 montre que le produit tensoriel des éléments de $T(\mathcal{E}\text{ns-gr}) \times T(\mathcal{E}\text{ns-gr})$ s'étend en un foncteur $\mathcal{E}\text{ns-gr}(T) \times \mathcal{E}\text{ns-gr}(T) \to \mathcal{E}\text{ns-gr}(T)$, qu'on note encore $M, N \mapsto M \otimes_T N$, commutant au coégalisateurs de 1-complexes. Par construction le produit tensoriel $M \otimes_T N$ de deux T-algèbres M et N est le coégalisateur du 1-complexe $T^2(M) \otimes_T T^2(N) \rightrightarrows T(M) \otimes_T T(N)$ induit par le début des résolutions simpliciales canoniques de M et N. L'isomorphisme canonique $S \otimes S' \cong S' \otimes S$ pour $S, S' \in \mathcal{E}$ns-gr induit un isomorphisme $M \otimes_T N \cong N \otimes_T M$ dans $\mathcal{E}\text{ns-gr}(T)$.

Proposition B.1. — (a) *Le foncteur* $\mathcal{E}\text{ns-gr}(T) \times \mathcal{E}\text{ns-gr}(T) \to \mathcal{E}\text{ns-gr}(T)$,

$$(M,N) \mapsto M \otimes_T N$$

commute aux coégalisateurs de 1*-complexes.*

(b) *Pour toute* T*-algèbre* M *le foncteur* $N \mapsto M \otimes_T N$ *est additif et exact à droite.*

Démonstration. — Le point (a) vient de ce que la monade (T,T) sur la catégorie produit $\mathcal{E}$ns-gr $\times$ $\mathcal{E}$ns-gr vérifie $(\mathcal{Q}_0)$ et du point (a) de la proposition A.1.6.

Pour le point (b) : le foncteur $N \mapsto M \otimes_T N$ est la composée du foncteur $N \mapsto (M,N)$ de $\mathcal{E}\text{ns-gr}(T)$ dans la catégorie abélienne produit $\mathcal{E}\text{ns-gr}(T) \times \mathcal{E}\text{ns-gr}(T)$ avec le foncteur (non additif) $- \otimes_T - : \mathcal{E}\text{ns-gr}(T) \times \mathcal{E}\text{ns-gr}(T) \to \mathcal{E}\text{ns-gr}(T)$. Comme $N \mapsto (M,N)$ est additif et exact, la composée $N \mapsto M \otimes_T N$ commute aux coégalisateurs de 1-complexes par le point (a). Il suffit donc par la proposition A.3.1 de montrer que le foncteur $S \mapsto M \otimes_T T(S)$ transforme la somme de deux ensembles gradués en la somme des images. C'est vrai lorsque M est l'image par T d'un ensemble gradué. Le cas général vient de ce que $M \otimes_T T(S)$ est par ce qui précède le coégalisateur du diagramme $T^2(M) \otimes_T T(S) \rightrightarrows T(M) \otimes_T T(S)$ et de la commutation des colimites entre elles. □

Soient M et N deux T-algèbres. Le complexe augmenté $T_*(M) \to M$ associé à la résolution simpliciale canonique de M est une résolution libre de M fonctorielle en M. On définit la T-algèbre graduée $\mathrm{Tor}_*^T(M,N)$ comme l'homologie du complexe $T_*(M) \otimes_T N$. L'invariance par homotopie d'une résolution libre de M montre que pour toute résolution libre $M_* \to M$ de M, l'homologie du complexe $M_* \otimes_T N$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Tor}_*^T(M,N)$. Par exactitude à droite du produit tensoriel, la T-algèbre $\mathrm{Tor}_0^T(M,N)$ s'identifie à $M \otimes_T N$.

Soient $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de T-algèbres et $M'_* \to M'$, $M''_* \to M''$ des résolutions libres de M' et M'' respectivement.

Lemme B.2. — *Il existe une suite de morphismes* $M'_{n+1} \oplus M''_{n+1} \to M'_n \oplus M''_n$ *pour* $n \geq 0$ *et* $M'_0 \oplus M''_0 \to M$ *telle que les injections* $M'_n \to M'_n \oplus M''_n$ *et les projections* $M'_n \oplus M''_n \to M''_n$ *induisent une suite exacte courte de complexes augmentés* $0 \to (M'_* \to M') \to (M'_* \oplus M''_* \to M) \to (M''_* \to M'') \to 0$, *en particulier telle que le complexe augmenté* $M'_* \oplus M''_* \to M$ *est une résolution libre de* M.

Démonstration. — Comme M''_0 est projectif et $M \to M''$ est surjectif, le morphisme $M''_0 \to M''$ se relève en un morphisme $M''_0 \to M$ et on vérifie que le morphisme obtenu $M'_0 \oplus M''_0 \to M$ est surjectif. Soit n un entier positif et supposons construite une suite exacte $M'_n \oplus M''_n \to$

$\cdots \to M_0' \oplus M_0'' \to M \to 0$ compatible avec les suites exactes $M_n' \to \cdots \to M' \to 0$ et $M_n'' \to \cdots \to M'' \to 0$. Notons K et K'' les noyaux des morphismes $M_n' \oplus M_n'' \to M_{n-1}' \oplus M_{n-1}''$ et $M_n'' \to M_{n-1}''$ respectivement si n est strictement positif, des morphismes $M_0' \oplus M_0'' \to M$ et $M_0'' \to M''$ sinon. Le morphisme $K \to K''$ induit par la projection $M_n' \oplus M_n'' \to M_n''$ est surjectif d'où on déduit l'existence d'un relèvement de $M_{n+1}'' \to K''$ à K. On vérifie que le morphisme obtenu $M_{n+1}' \oplus M_{n+1}'' \to K$ est surjectif. On construit ainsi par récurrence sur n une suite de morphismes $M_{n+1}' \oplus M_{n+1}'' \to M_n' \oplus M_n''$ compatibles avec les morphismes $M_{n+1}' \to M_n$ et $M_{n+1}'' \to M_n''$. Le fait qu'elle forme une résolution de M vient de la suite exacte longue en homologie associée à une suite exacte courte de complexes. □

Soit maintenant N une T-algèbre. Pour chaque entier n, la suite $0 \to M_n' \otimes_T N \to (M_n' \oplus M_n'') \otimes_T N \to M_n'' \otimes_T N \to 0$ est une suite exacte car scindée dans $\mathcal{E}$ns-gr(T). La suite exacte de complexes $0 \to M_*' \otimes_T N \to (M_*' \oplus M_*'') \otimes_T N \to M_*'' \otimes_T N \to 0$ induit une suite exacte longue en homologie qui s'écrit

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^T(M, N) \to \mathrm{Tor}_1^T(M'', N) \to M' \otimes_T N \to M \otimes_T N \to M'' \otimes_T N \to 0 \ .$$

En particulier le foncteur $M \mapsto M \otimes_T N$ est exact à gauche si la T-algèbre $\mathrm{Tor}_1^T(M, N)$ est nulle quelque soit M. Le lemme suivant, qui s'obtient également par la suite exacte longue des $\mathrm{Tor}^T(-, N)$, donne la réciproque :

Lemme B.3. — *Soient M une T-algèbre, $M_0 \to M$ le début d'une résolution libre de M et K le noyau du morphisme $M_0 \to M$; alors pour tout entier n strictement positif l'objet $\mathrm{Tor}_{n+1}^T(M, N)$ s'identifie à $\mathrm{Tor}_n^T(K, N)$ et $\mathrm{Tor}_1^T(M, N)$ s'identifie au noyau du morphisme $K \otimes_T N \to M_0 \otimes_T N$.*

Soient symétriquement M une T-algèbre, $M_* \to M$ une résolution libre de M et $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ une suite exacte de T-algèbres. Cette dernière induit une suite exacte de complexes $M_* \otimes_T N' \to M_* \otimes_T N \to M_* \otimes_T N'' \to 0$.

Proposition B.4. — *Soit n un entier positif tel que les objets $\mathrm{Tor}_1^T(N'', M_k)$ sont nuls pour tout $0 \leq k \leq n$; alors la suite exacte de complexes $M_* \otimes_T N' \to M_* \otimes_T N \to M_* \otimes_T N'' \to 0$ induit une suite exacte*

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_{n+1}^T(M, N) \to \mathrm{Tor}_{n+1}^T(M, N'') \to \mathrm{Tor}_n^T(M, N') \to \cdots \\ \to M \otimes_T N \to M \otimes_T N'' \to 0 \ . \end{aligned}$$

Démonstration. — Notons K_n l'image du morphisme $M_{n+1} \to M_n$ et K le noyau du morphisme $K_n \otimes_T N \to K_n \otimes_T N''$. Notons A_*', A_* et A_*'' les complexes tronqués $\cdots \to 0 \to K \to M_n \otimes_T N' \to \cdots \to M_0 \otimes_T N'$, $\cdots 0 \to K_n \otimes_T N \to M_n \otimes_T N \to \cdots \to M_0 \otimes_T N$ et $\cdots 0 \to K_n \otimes_T N'' \to M_n \otimes_T N'' \to \cdots \to M_0 \otimes_T N''$ respectivement. L'hypothèse portant sur les objets $\mathrm{Tor}_1^T(N'', M_k)$ garantit que la suite de complexes $0 \to A_*' \to A_* \to A_*'' \to 0$ est exacte. On en déduit une suite exacte longue en homologie. Les k-ièmes objets d'homologie des complexes A_* et A_*'' s'identifient aux objets $\mathrm{Tor}_k^T(M, N)$ et $\mathrm{Tor}_k^T(M, N'')$ respectivement pour $0 \leq k \leq n+1$ (on utilise le lemme ci-dessus). De même le k-ième objet d'homologie du complexe A_*' s'identifie à l'objet $\mathrm{Tor}_k^T(M, N')$ pour $0 \leq k \leq n$ car le morphisme $K_n \otimes_T N' \to M_n \otimes_T N'$ se factorise par la surjection $K_n \otimes_T N' \to K$. On obtient la suite exacte annoncée. □

Corollaire B.5. — *Soient M et N deux T-algèbres, $M_* \to M$ et $N_* \to N$ des résolutions libres de M et N respectivement et n un entier positif. On suppose que les objets* $\mathrm{Tor}^T_{k+1}(M, N_l)$ *et* $\mathrm{Tor}^T_{k+1}(N, M_l)$ *sont nuls pour $0 \leq k, l \leq n$; alors les objets* $\mathrm{Tor}^T_k(M, N)$ *et* $\mathrm{Tor}^T_k(N, M)$ *sont naturellement isomorphes pour $0 \leq k \leq n$.*

Démonstration. — Pour $n = 0$ notons K le noyau du morphisme $N_0 \to N$. On dispose par la proposition d'une suite exacte

$$\mathrm{Tor}^T_1(M, N_0) \to \mathrm{Tor}^T_1(M, N) \to M\hat{\otimes}K \to M\hat{\otimes}N_0 \to M\hat{\otimes}N \to 0$$

d'où on déduit que l'objet $\mathrm{Tor}^T_1(M, N)$ s'identifie au noyau du morphisme $M\hat{\otimes}K \to M\hat{\otimes}N_0$ donc à l'objet $\mathrm{Tor}^T_1(N, M)$ par le lemme B.3.

Pour $n \geq 1$ notons K le conoyau du morphisme $N_{n+1} \to N_n$. On obtient par la proposition et par récurrence sur n un isomorphisme $\mathrm{Tor}^T_{n+1}(M, N) \cong \mathrm{Tor}^T_1(M, K)$. Ce qui précède donne un isomorphisme $\mathrm{Tor}^T_1(M, K) \cong \mathrm{Tor}^T_1(K, M)$. Or $\mathrm{Tor}^T_1(K, M)$ est naturellement isomorphe à $\mathrm{Tor}^T_{n+1}(N, M)$ par le lemme B.3 □

Appendice C
Limites et dérivés

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne où les produits dénombrables sont exacts et soit $(M_s, g_s : M_s \to M_{s-1})$ une tour d'objets de $\mathcal{A}$. On forme le morphisme

$$\mathrm{Id} - (g_s) : \prod_s M_s \to \prod_s M_s$$

qu'on voit comme un complexe de $\mathcal{A}$ concentré en degré 0 et 1. Son homologie en degré 1 s'interprète comme la limite M_∞ des M_s. Celle en degré 0 s'interprète comme l'objet $\lim^1_s M_s$. Toute suite exacte courte $0 \to (M'_s) \to (M_s) \to (M''_s) \to 0$ de tours donne naissance à une suite exacte courte de complexes donc à une suite exacte

$$0 \to M'_\infty \to M_\infty \to M''_\infty \to \lim^1_s M'_s \to \lim^1_s M_s \to \lim^1_s M''_s \to 0$$

dans $\mathcal{A}$: le foncteur $\lim^1$ est exact à droite.

Plus généralement soit $A_{*,1} \to A_{*,0}$ un morphisme entre complexes d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, qu'on regarde comme un bicomplexe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-gradué.

On note $\mathrm{H}^{\mathrm{h}}_*(A_{*,t})$ ou $\mathrm{H}^{\mathrm{h}}_* A$ l'homologie du bicomplexe par rapport au premier indice et $\mathrm{H}^v_* A$ celle par rapport au second. Au bicomplexe $A_{*,*}$ on associe le complexe total $\mathrm{Tot}_* A = A_{*-1,1} \oplus A_{*,0}$ muni de la différentielle habituelle. Ce dernier possède deux filtrations croissantes et convergentes $\mathrm{F}_s\mathrm{Tot}_* A = \oplus_{s'+t=*, s' \leq s} A_{s',t}$ et $\mathrm{F}'_t\mathrm{Tot}_* A = \oplus_{s+t'=*, t' \leq t} A_{s,t'}$ donnant naissance à deux suites spectrales convergeant fortement vers l'homologie de $\mathrm{Tot}_* A$ (voir par exemple [**CE**]).

La première est de terme $\mathrm{E}^1_{s,*} = \mathrm{H}_*(\mathrm{F}_s/\mathrm{F}_{s-1})$,

$$\mathrm{E}^2_{s,t} = \mathrm{H}^{\mathrm{h}}_s \mathrm{H}^{\mathrm{v}}_{t-s} A \ .$$

Sa différentielle d^r est de bidegré $(-r, -1)$. On dispose d'un morphisme de bord $\mathrm{E}^2_{0,t} \to \mathrm{H}_t\mathrm{Tot}A$ et la suite $(\mathrm{E}^r_{s,t})_r$ converge fortement vers le gradué d'une filtration finie de $\mathrm{H}_t\mathrm{Tot}A$.

Comme $A_{s,t}$ est nul si t est différent de 0 et 1, le terme $\mathrm{E}^2_{s,t}$ est concentré sur les lignes $t = s$ et $t = s+1$ et la seule différentielle éventuellement non nulle est la différentielle $\mathrm{d}^2 : \mathrm{E}^2_{s+2,s+2} \to \mathrm{E}^2_{s,s+1}$, $s \geq 0$. En particulier la suite spectrale dégénère au terme E^3 ; on a un isomorphisme $\mathrm{E}^2_{0,0} \to \mathrm{H}_0\mathrm{Tot}A$ et plus généralement une suite exacte longue

$$\mathrm{E}^2_{s+2,s+2} \to \mathrm{E}^2_{s,s+1} \to \mathrm{H}_{s+1}\mathrm{Tot}A \to \mathrm{E}^2_{s+1,s+1} \to \mathrm{E}^2_{s-1,s} \ .$$

La seconde suite spectrale est de terme $\mathrm{E}'^1_{*,t} = \mathrm{H}_*(\mathrm{F}'_s/\mathrm{F}'_{s-1})$,

$$\mathrm{E}'^2_{s,t} = \mathrm{H}^{\mathrm{v}}_t\mathrm{H}^{\mathrm{h}}_{s-t}A$$

concentré sur les lignes $t = 0$ et $t = 1$. Sa différentielle d'^r est de bidegré $(-1, -r)$ donc la suite spectrale dégénère au terme E'^2. On obtient pour tout entier s une suite exacte

$$0 \to \mathrm{E}'^2_{s,0} \to \mathrm{H}_s\mathrm{Tot}A \to \mathrm{E}'^2_{s,1} \to 0 \ .$$

Ces deux suites spectrales nous permettent d'obtenir la

Proposition C.6. — *Soit $A_{*,1} \to A_{*,0}$ un morphisme entre complexes d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, qu'on regarde comme un bicomplexe de $\mathcal{A}$.*

(a) *On a un isomorphisme $\mathrm{H}^{\mathrm{v}}_0\mathrm{H}^{\mathrm{h}}_0A \simeq \mathrm{H}^{\mathrm{h}}_0\mathrm{H}^{\mathrm{v}}_0A$.*

(b) *Supposons que pour tout $s \geq 0$ l'objet $\mathrm{H}^{\mathrm{h}}_s\mathrm{H}^{\mathrm{v}}_0A$ est nul ; alors on a une suite exacte*

$$0 \to \mathrm{H}^{\mathrm{v}}_0\mathrm{H}^{\mathrm{h}}_sA \to \mathrm{H}^{\mathrm{h}}_{s-1}\mathrm{H}^{\mathrm{v}}_1A \to \mathrm{H}^{\mathrm{v}}_1\mathrm{H}^{\mathrm{h}}_{s-1}A \to 0 \ .$$

(c) *Supposons que pour tout $t \in \{0,1\}$ et tout $s \geq 1$ l'objet $\mathrm{H}^{\mathrm{v}}_t\mathrm{H}^{\mathrm{h}}_sA$ est nul ; alors on a une suite exacte*

$$0 \to \mathrm{H}^{\mathrm{h}}_2\mathrm{H}^{\mathrm{v}}_1A \to \mathrm{H}^{\mathrm{h}}_0\mathrm{H}^{\mathrm{v}}_1A \to \mathrm{H}^{\mathrm{v}}_1\mathrm{H}^{\mathrm{h}}_0A \to \mathrm{H}^{\mathrm{h}}_1\mathrm{H}^{\mathrm{v}}_0A \to 0$$

et un isomorphisme $\mathrm{H}^{\mathrm{h}}_{s+2}\mathrm{H}^{\mathrm{v}}_1A \simeq \mathrm{H}^{\mathrm{h}}_s\mathrm{H}^{\mathrm{v}}_1A$ pour $s \geq 1$.

Démonstration. — Le point (a) vient de l'isomorphisme $\mathrm{E}^2_{0,0} \simeq \mathrm{H}_0\mathrm{Tot}A$, du fait que le terme $\mathrm{E}'^2_{0,1}$ est nul et de la suite exacte associée à la seconde suite spectrale.

Sous l'hypothèse du point (b) le terme $\mathrm{E}^2_{s,t}$ de la première suite spectrale est concentré sur la ligne $t = s+1$ donc cette suite spectrale dégénère au terme E^2 et on a un isomorphisme $\mathrm{H}^{\mathrm{h}}_s\mathrm{H}^{\mathrm{v}}_1A \simeq \mathrm{H}_{s+1}\mathrm{Tot}A$. La suite exacte issue de la seconde suite spectrale donne alors la suite exacte cherchée.

Sous l'hypothèse du point (c) le terme $\mathrm{E}'^2_{s,t}$ est nul si s est différent de t. La suite exacte issue de la seconde suite spectrale donne les isomorphismes $\mathrm{H}_1\mathrm{Tot}A \simeq \mathrm{H}^{\mathrm{v}}_1\mathrm{H}^{\mathrm{h}}_0A$ et $\mathrm{H}_s\mathrm{Tot}A \simeq 0$ si $s > 1$. La suite exacte longue issue de la première suite spectrale permet de conclure. $\square$

Application. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne où les produits dénombrables sont exacts et $(M_{k,l})_{k,l}$ une tour de $\mathcal{A}$ indexée par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. A chaque entier k correspond une tour $(M_{k,l})_l$ donc un complexe $\prod_l M_{k,l} \to \prod_l M_{k,l}$ concentré en degré 0 et 1. A la tour de complexes $(\prod_l M_{k,l} \to \prod_l M_{k,l})_k$ on associe le bicomplexe

$$\begin{array}{ccc} \prod_{k,l} M_{k,l} & \to & \prod_{k,l} M_{k,l} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{k,l} M_{k,l} & \to & \prod_{k,l} M_{k,l} \end{array} .$$

concentré en bidegré dans $\{0,1\} \times \{0,1\}$ et qu'on prend pour $A_{*,*}$. Pour s, t dans $\{0,1\}$ le terme $\mathrm{H}^{\mathrm{h}}_{1-s}\mathrm{H}^{\mathrm{v}}_{1-t}A_{*,*}$ s'interprète comme l'objet $\lim_k^s \lim_l^t M_{k,l}$ et le terme $\mathrm{H}^{\mathrm{v}}_{1-t}\mathrm{H}^{\mathrm{h}}_{1-s}A_{*,*}$ comme l'objet $\lim_l^t \lim_k^s M_{k,l}$. On obtient avec les points (a) et (b) de la proposition qui précède la

Proposition C.7. — *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne où les produits dénombrables sont exacts et $(M_{k,l})_{k,l}$ une tour de $\mathcal{A}$ indexée par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$; alors*

(a) *On a un isomorphisme* $\lim_k^1 \lim_l^1 M_{k,l} \cong \lim_l^1 \lim_k^1 M_{k,l}$.

(b) *Supposons que le terme* $\lim_l^1 M_{k,l}$ *est nul pour tout k ; alors on a une suite exacte*

$$0 \to \lim_l^1 M_{\infty,l} \to \lim_k^1 M_{k,\infty} \to \lim_l \lim_k^1 M_{k,l} \to 0 \ .$$

Typiquement pour le point (b) $(M_{k,l})_l$ est la tour associée à une filtration décroissante d'un objet M_k donc est une tour de surjections donc est sans $\lim^1$.

Bibliographie

[BB] M. Barr et J. Beck, Homology and standard constructions, *Seminar on triples and Categorical Homology Theory, Springer L.N.M. 80*, 1969, 245-335.

[Bor] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra*, 2. Categories and structures, Cambridge University Press (1994).

[CE] H. Cartan et S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.

[Mac] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer, 1971.

[Ma1] P. May, *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, University of Chicago Press, 1967.

[Ma2] P. May, *The geometry of iterated loop spaces, Springer L. N. M.*, **271**, 1972.