

NOM :  
PRENOM :

Date :  
Groupe :

**Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 8**  
**Représentation de variables statistiques à 1 et 2 dimensions**

**Exercice 1. (moyenne, variance) :** Pour déterminer l'effet de nutriment sur la croissance de plants de haricots, on prépare deux jeux de 100 pots de terre, les premiers contenant un apport de nutriment (pots expérimentaux) et les seconds n'en contenant pas (pots de contrôle). On plante un haricot dans chaque pot et on mesure, après 20 jours, la taille des plants obtenus. Voici les 6 premières mesures de chaque lot (pour simplifier l'exercice, on ne prendra en compte que ces 6 mesures).

Contrôle	9,3	13,6	14,2	11,7	10,2	9,7
Expérimental	13,4	12,1	16,3	13,2	13,5	14,9

1. Calculer la moyenne  $\mu_c$  et  $\mu_e$  de chaque lot.

Série "Contrôle":  $\mu_c = \frac{1}{6}(9.3 + 13.6 + 14.2 + 11.7 + 10.2 + 9.7) = 11.45 = \mu_c$

S. "Experimental":  $\mu_e = \frac{1}{6}(13.4 + \dots + 14.9) = 13.9 = \mu_e$

2. Calculer la variance  $Var_c$  et l'écart-type  $\sigma_c$  du lot de contrôle. Même question pour l'autre lot.

$Var_c = \frac{1}{6}((9.3 - \mu_c)^2 + \dots + (9.7 - \mu_c)^2) = 3.5825 \Rightarrow \sigma_c = \sqrt{Var_c} = \sqrt{3.5825} = 1.89..$

$Var_e = \frac{1}{6}((13.4 - \mu_e)^2 + \dots + (14.9 - \mu_e)^2) = 1.816.. \Rightarrow \sigma_e = \sqrt{1.816..} = 1.347..$

3. Pour chaque lot, indiquer combien de mesures sont dans l'intervalle  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ . Même question pour l'intervalle  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ .

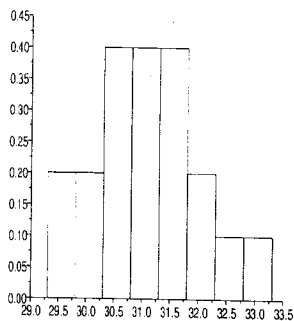
$[\mu_c - \sigma_c, \mu_c + \sigma_c] = [9.55.., 13.34..]$  qui contient **3** données sur les 6

$[\mu_c - 2\sigma_c, \mu_c + 2\sigma_c] = [7.66.., 15.23..]$  qui contient toutes les données

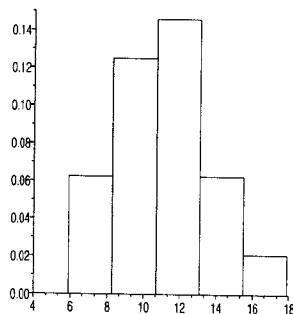
$[\mu_e - \sigma_e, \mu_e + \sigma_e] = [12.55.., 15.24..]$  qui contient **4** données sur les 6

$[\mu_e - 2\sigma_e, \mu_e + 2\sigma_e] = [11.20.., 16.59..]$  qui contient toutes les données

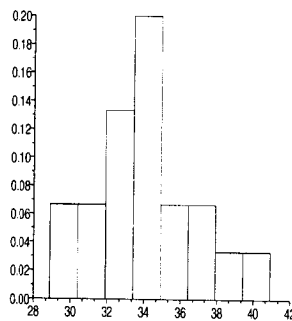
**Exercice 2. (histogrammes) :**



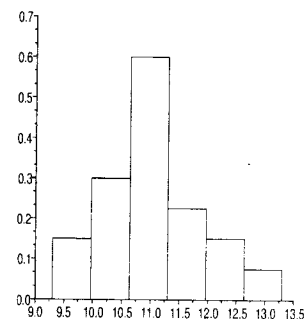
$\mu \approx 31$   
 $\sigma$  "petit" (C)



$\mu \approx 11$   
 $\sigma$  "grand" (D)



$\mu \approx 34$   
 $\sigma$  "grand" (A)



$\mu \approx 11$   
 $\sigma$  "petit" (B)

Associer à chaque histogramme le bon jeu de paramètres parmi les 4 jeux suivants : A : ( $\mu = 34, 285, \sigma = 2, 89$ ), B : ( $\mu = 11, 095, \sigma = 0, 96$ ) et D : ( $\mu = 11, 285, \sigma = 2, 89$ ) en indiquant sous chaque dessin les valeurs sélectionnées.

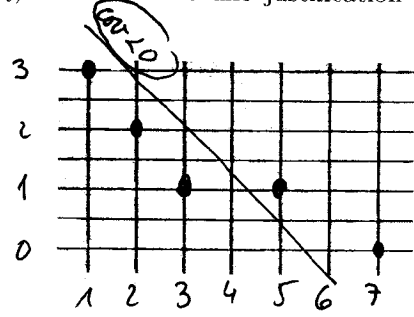
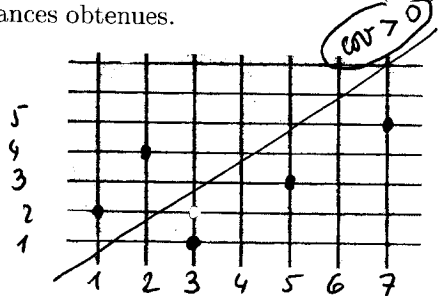
**Exercice 3. (covariance de deux séries) :** Compléter les deux tableaux suivants et en déduire les valeurs de  $\text{Cov}(x, y)$  et  $\text{Cov}(x, z)$ .

$x_i$	1	2	3	5	7	$\mu$ 3,6
$y_i$	2	4	1	3	5	3
$x_i y_i$	2	8	3	15	35	12,6

$x_i$	1	2	3	5	7	$\mu$ 3,6
$z_i$	3	2	1	1	0	1,4
$x_i z_i$	3	4	3	5	0	3

$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{5} (\sum x_i y_i) - \mu(x) \mu(y) = 12,6 - 3,6 \cdot 3 = 1,8 = \text{Cov}(x, y)$   
 $\text{Cov}(x, z) = \frac{1}{5} \sum x_i z_i - \mu(x) \mu(z) = 3 - 3,6 \cdot 1,4 = -2,04 = \text{Cov}(x, z)$

Tracer les deux nuages de points  $(x_i, y_i)$  et  $(x_i, z_i)$  et en déduire une justification des signes des covariances obtenues.



**Exercice 4. (transformation de la variance par une application affine) :**

- On considère la série des mesures précédentes (que l'on note  $x_i$ ) et la série  $y_i$  qui en est une image par translation  $y_i = x_i - 5$ . Compléter le tableau suivant (dans la dernière colonne, mettre la moyenne) et en déduire la variance de la série  $y_i$ .

$x_i$	9,3	13,6	14,2	11,7	10,2	9,7	$\mu$ 11,45
$y_i = x_i - 5$	4,3	8,6	9,2	6,7	5,2	4,7	6,45
$y_i^2$	18,49	73,96	84,64	44,89	27,04	22,09	45,18

$\text{Var}(y) = \frac{1}{5} \sum y_i^2 - \mu_y^2 = 45,18 - (6,45)^2 = 3,5825 = \text{Var}(y)$

On a  $\text{Var}(y) = \text{Var}(x)$  car  $y = x_i + b$ ,  $b = -5$  (voir cours, haut p3).

- Comparer avec la variance des  $x_i$  calculée précédemment. Quelle propriété de la variance explique ce résultat ?

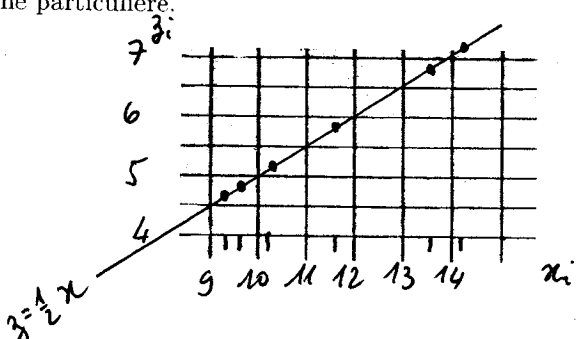
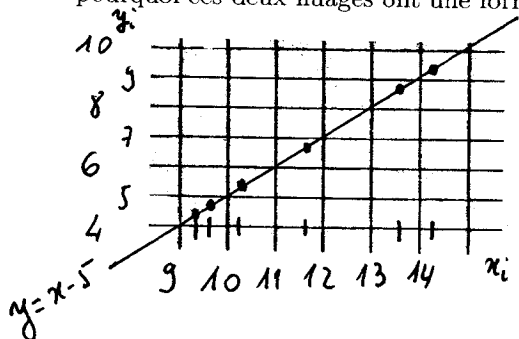
On observe qu'on a  $\text{Var}(y) = \text{Var}(x)$ , conformément à la formule du haut de la page 3 du cours ( $a=1, b=-5$ ).

- On transforme à présent la série  $x_i$  en la série  $z_i = \frac{1}{2} x_i$ . Calculer la variance des  $z_i$  et la comparer avec celle des  $x_i$ . Commentez.

$x_i$	9,3	13,6	14,2	11,7	10,2	9,7	$\mu$ 11,45
$z_i = \frac{1}{2} x_i$	4,65	6,8	7,1	5,85	5,1	4,85	5,725
$z_i^2$	21,62	46,24	50,41	34,22	26,01	23,52	33,67

$\text{Var}(z) = 33,67 - (5,725)^2 = 0,895625 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{Var}(x)$  conformément à la même formule, par  $a = \frac{1}{2}$  et  $b = 0$ .

- Représenter les deux nuages de points  $(x_i, y_i)$  et  $(x_i, z_i)$  ainsi que leurs centres de gravité. Expliquer pourquoi ces deux nuages ont une forme particulière.



Ces "nuages" sont composés de points parfaitement alignés car il