ANALYSE S4 2012: FEUILLE de TD no.4.

Thème: calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 1.

Considerons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = (x + y)^2 - x - y + 1$. Soit $p = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ (regardé comme un point) et $u = (-1, 2) \in \mathbb{R}^2$, $v = (1, -1) \in \mathbb{R}^2$ (regardés comme des vecteurs).

(i) Calculer les dérivées $\frac{\partial f}{\partial u}(p)$ (resp. $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$) de f dans la direction u (resp. v) au point p.

(ii) Soit $w = u + 2v$. Montrer que

$$\frac{\partial f}{\partial w}(p) = \frac{\partial f}{\partial u}(p) + 2\frac{\partial f}{\partial v}(p).$$

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$. En utilisant la définition, montrer que f est différentiable en $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et que sa différentielle $df(a, b)$ est l'application linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto bu + av$.

Exercice 3.

Soit $p \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = xy(x^2 + y^2)^p$$

si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

(i) Montrer que les dérivées partielles de la fonction f existent en $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ pour tout $p \in \mathbb{R}$.

(ii) Montrer que la fonction f est différentiable en $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si $p > -\frac{1}{2}$. Comparer avec l'exercice no. 3, feuille TD2.

Exercice 4.

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer les dérivées partielles et la différentielle au point $p = (1, -1, 2)$.

(i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^5 + xyz$.

(ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \exp(x^2 + y^3 + z^5 + xyz)$.

(iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}$.

(iv) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2)$.