Université Denis Diderot - Paris 7 Année 2013-2014
L2 CPEI - Mathématiques Chapitre 1
Auteur : Mostafa Sabri

Suites numériques

1. Limites de suites complexes

Définition 1. Une *suite complexe* est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. On note $u_n := u(n)$. L'application elle-même est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Plus généralement, on appelle suite complexe toute application $u : \mathbb{N}_{k_0} \to \mathbb{C}$, où $\mathbb{N}_{k_0} := \{n \in \mathbb{N} : n \geq k_0\}$ et k_0 est un entier quelconque. On note alors cette application $(u_n)_{n\geq k_0}$.

Définition 2. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq k_0}$ est *bornée* si

$$\exists M \in \mathbb{R} : n \geq k_0 \implies |u_n| \leq M \,.$$

Définition 3. On dit que $\ell \in \mathbb{C}$ est *limite* d'une suite complexe $(u_n)_{n\geq k_0}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon \,.$$

Les suites possédant une limite $\ell \in \mathbb{C}$ sont dites *convergentes* et les autres *divergentes.*

Proposition 4 (Unicité de la limite)**.** *Toute suite complexe possède au plus une limite.*

Démonstration. Supposons qu'une suite complexe $(u_n)_{n\geq k_0}$ possède deux limites $\ell \neq \ell'$ et choisissons $\varepsilon := |\ell - \ell'|/3 > 0$. Il existe un rang n_1 tel que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon \ \forall n \geq n_1$ et un rang n_2 tel que $|u_n - \ell'| \leq \varepsilon \ \forall n \geq n_2$. Soit $n_3 = \max(n_1, n_2)$. Alors

$$|\ell - \ell'| = |(\ell - u_{n_3}) + (u_{n_3} - \ell')| \leq |\ell - u_{n_3}| + |u_{n_3} - \ell'| \leq 2\varepsilon = \frac{2}{3}|\ell - \ell'| \,.$$

Cette contradiction montre qu'on a forcément $\ell = \ell'$. □

Puisqu'une suite $(u_n)_{n\geq k_0}$ ne peut avoir qu'une seule limite, on peut sans ambiguïté noter celle-ci $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, ou plus simplement $\lim u_n$. Si $(u_n)_{n\geq k_0}$ a une limite ℓ, on dit que $(u_n)_{n\geq k_0}$ tend vers ℓ, et on note $u_n \to \ell$.

Remarque. Si u et v sont deux suites égales à partir d'un certain rang, i.e. s'il existe n_0 tel que $u_n = v_n$ pour tout $n \geq n_0$, et si $\lim u = \ell \in \mathbb{C}$, alors $\lim v = \ell$. Autrement dit, si une suite converge, et si on change un nombre fini de ses termes, cela ne change pas sa limite.

Proposition 5. *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Supposons qu'une suite complexe $(u_n)_{n\geq k_0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$. Il existe donc un rang n_0 tel que $|u_n - \ell| \leq 1 \ \forall n \geq n_0$. Donc $|u_n| \leq |u_n - \ell| + |\ell| = 1 + |\ell| \ \forall n \geq n_0$. Donc $|u_n| \leq M \ \forall n \geq k_0$, où $M := \max\{|u_{k_0}|, |u_{k_0+1}|, \ldots, |u_{n_0-1}|, 1 + |\ell|\}$. Ainsi, (u_n) est bornée. □

Proposition 6. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{C}$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell' \in \mathbb{C}$*, alors pour tout* $c \in \mathbb{C}$*,*

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} cu_n = c\ell$, (ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$,

(iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \ell\ell'$.

Démonstration. (i) Soit $\varepsilon > 0$ et posons $\varepsilon' := \varepsilon/|c|$ si $c \neq 0$, et $\varepsilon' = 1$ si $c = 0$. Par hypothèse, il existe un rang n_0 tel que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon' \ \forall n \geq n_0$. Ainsi,

$$n \geq n_0 \implies |cu_n - c\ell| = |c| \cdot |u_n - \ell| \leq |c| \cdot \varepsilon' \leq \varepsilon \,.$$

(ii) Soit $\varepsilon > 0$ et posons $\varepsilon' := \varepsilon/2$. Par hypothèse, il existe n_1 et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon'$ $\forall n \geq n_1$ et $|v_n - \ell'| \leq \varepsilon'$ $\forall n \geq n_2$. Posons $n_3 = \max(n_1, n_2)$. Alors

$$n \geq n_3 \implies |(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| = |(u_n - \ell) + (v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \leq 2\varepsilon' = \varepsilon\,.$$

(iii) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque (u_n) converge, elle est bornée et on peut trouver $M > 0$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout n. On peut alors trouver $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon'$ pour tout $n \geq n_1$ et $|v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ pour tout $n \geq n_2$, où $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2|\ell'|}$ si $\ell' \neq 0$ et $\varepsilon' = 1$ si $\ell' = 0$. Posons $n_3 = \max(n_1, n_2)$. Alors pour $n \geq n_3$ on a

$$\begin{aligned}
|u_n v_n - \ell\ell'| &= |u_n v_n + u_n \ell' - u_n \ell' - \ell\ell'| \\
&= |u_n(v_n - \ell') + (u_n - \ell)\ell'| \\
&\leq |u_n||v_n - \ell'| + |u_n - \ell||\ell'| \leq M\frac{\varepsilon}{2M} + \varepsilon'|\ell'| \leq \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

□

Remarque. Les énoncés (i) et (ii) expriment en particulier que l'ensemble E_{k_0} des suites convergentes $(u_n)_{n\geq k_0}$, muni de l'addition terme à terme et de la multiplication par un complexe est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, puis que l'application $\lim : E_{k_0} \to \mathbb{C}$ est linéaire.

Proposition 7. *Si $(u_n)_{n\geq k_0}$ est une suite convergeant vers une limite $\ell \neq 0$, alors à partir d'un certain rang k_1, tous les u_n sont sont nuls, et la suite $(1/u_n)_{n\geq k_1}$ converge vers $1/\ell$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On a $|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}| = |\frac{u_n - \ell}{\ell u_n}|$. On commence par minorer le dénominateur. On a $|u_n| \geq |\ell| - |u_n - \ell|$. En choisissant $\varepsilon' = |\ell|/2$, on sait que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon'$ à partir d'un certain rang k_1. Ainsi, $|u_n| \geq |\ell| - \varepsilon' = \varepsilon'$ pour tout $n \geq k_1$. D'autre part, en posant $\varepsilon'' = |\ell|\varepsilon'\varepsilon$, on peut trouver k_2 tel que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon''$ pour tout $n \geq k_2$. Posons $k_3 = \max(k_1, k_2)$. Alors pour $n \geq k_3$ on a

$$\Big|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\Big| = \Big|\frac{u_n - \ell}{\ell u_n}\Big| \leq \frac{1}{|\ell|\varepsilon'}|u_n - \ell| \leq \frac{1}{|\ell|\varepsilon'}\varepsilon'' = \varepsilon\,.$$

□

Proposition 8. *Le produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0 est une suite tendant vers 0.*

Démonstration. Supposons que u est bornée et que v tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. Comme u est bornée, on peut trouver $M > 0$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout n. D'autre part, en posant $\varepsilon' = \varepsilon/M$ on peut trouver n_0 tel que $|v_n| = |v_n - 0| \leq \varepsilon'$. Ainsi, $|u_n v_n| \leq M\varepsilon' = \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. □

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $D_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ un disque de rayon $r > 0$ centré en z_0. Rappelons qu'une fonction $f : D_r(z_0) \to \mathbb{C}$ est dite *continue* en $z_0 \in \mathbb{C}$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\eta > 0$ tel que

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon$$

pour tous $z \in D_r(z_0)$ vérifiant $|z - z_0| < \eta$.

Proposition 9. *Une fonction $f : D_r(z_0) \to \mathbb{C}$ est continue en z_0 si et seulement si pour toute suite (u_n) convergeant vers z_0 on a $f(u_n) \to f(z_0)$.*

Notons que si $u_n \to z_0$, alors $u_n \in D_r(z_0)$ à partir d'un certain rang k_1, et donc $(f(u_n))_{n\geq k_1}$ est bien définie.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et supposons f continue. On peut alors trouver $\eta > 0$ tel que $|f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon$ pour tout $z \in D_r(z_0)$ vérifiant $|z - z_0| < \eta$. Mais si $u_n \to z_0$, il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n \in D_r(z_0)$ et $|u_n - z_0| < \eta$. Ainsi, $|f(u_n) - f(z_0)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$ et donc $f(u_n) \to f(z_0)$.

Supposons maintenant que $f(u_n) \to f(z_0)$ pour tout $u_n \to z_0$. Si f n'est pas continue en z_0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, l'implication

$$(z \in D_r(z_0) \text{ et } |z - z_0| < \eta) \implies |f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon$$

soit fausse, i.e. on peut trouver un z qui ne la vérifie pas. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver $u_n \in D_r(z_0)$ tel que $|u_n - z_0| < 1/n$ mais $|f(u_n) - f(z_0)| > \varepsilon$. Ceci contredit l'hypothèse, donc f est continue en z_0. □

Exemple. Si $u_n \to \ell \in \mathbb{C}$, alors $|u_n| \to |\ell|$, car $x \mapsto |x|$ est une fonction continue.

2. Limites de suites réelles

Une suite réelle (i.e. dont tous les termes sont réels) est évidemment une suite complexe, donc les résultats précédents s'y appliquent. On s'interesse ici à des notions qui mettent en jeu l'ordre naturel des réels. Notons d'abord le fait suivant.

Proposition 10. (i) *Si une suite réelle $(u_n)_{n \geq k_0}$ a une limite ℓ, alors $\ell \in \mathbb{R}$.*

(ii) *Une suite complexe $(u_n)_{n \geq k_0}$ converge ssi les suites réelles $(\operatorname{Re} u_n)_{n \geq k_0}$ et $(\operatorname{Im} u_n)_{n \geq k_0}$ convergent.*

Démonstration. (i) Posons $\ell = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$, donc $|b| \leq \sqrt{(u_{n_0} - a)^2 + b^2} = |u_{n_0} - \ell| \leq \varepsilon$. Ainsi, on a $|b| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $b = 0$.

(ii) Si $(\operatorname{Re} u_n)_{n \geq k_0}$ et $(\operatorname{Im} u_n)_{n \geq k_0}$ convergent, la suite $(u_n)_{n \geq k_0} = (\operatorname{Re} u_n + i \operatorname{Im} u_n)_{n \geq k_0}$ converge par la Proposition 6.

Inversement, si $(u_n)_{n \geq k_0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$, on note $\ell = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

$$|\operatorname{Re} u_n - a| \leq \sqrt{(\operatorname{Re} u_n - a)^2 + (\operatorname{Im} u_n - b)^2} = |u_n - \ell|$$

et la convergence de (u_n) vers ℓ implique celle de $(\operatorname{Re} u_n)$ vers a. De même, la suite $(\operatorname{Im} u_n)$ converge vers b. □

Proposition 11 (Passage à la limite dans les inégalités)**.** *Soient u et v deux suites réelles convergentes. S'il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq k_1$, $u_n \geq v_n$, alors $\lim u \geq \lim v$.*

Démonstration. Supposons $u_n \to \ell_1$ et $v_n \to \ell_2$. Par hypothèse, à partir d'un certain rang on a $u_n - v_n = |u_n - v_n|$. Ainsi,

$$\ell_1 - \ell_2 = \lim(u_n - v_n) = \lim |u_n - v_n| = |\ell_1 - \ell_2| \geq 0\,.$$ □

En prenant la suite constante $v \equiv 0$, il s'ensuit que si $u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang, alors $\lim u \geq 0$.

Proposition 12. *Soit $(u_n)_{n \geq k_0}$ une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$. S'il existe une suite réelle $(v_n)_{n \geq k_0}$ convergeant vers 0 telle que $\forall n \geq k_0$, $|u_n - \ell| \leq v_n$, alors $u_n \to \ell$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $v_n \to 0$, il existe n_0 tel que $|v_n| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, et donc $|u_n - \ell| \leq v_n \leq \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$. □

Exemple. Soit f une fonction majorée définie sur une partie X de $\mathbb{R}$. Si $M = \sup_X f$, on peut trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = M$.

En effet, par définition de la borne supérieure, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver $x_n \in X$ tel que $M - \frac{1}{n} \leq f(x_n)$. Or $f(x_n) \leq M$. Ainsi, $-\frac{1}{n} \leq f(x_n) - M \leq 0$, donc $|f(x_n) - M| \leq \frac{1}{n}$ et $f(x_n) \to M$ par la Proposition 12.

Corollaire 13 (Théorème des gendarmes)**.** *Soient $(u_n)_{n \geq k_0}$, $(v_n)_{n \geq k_1}$ et $(w_n)_{n \geq k_2}$ des suites réelles. S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq k$ on ait $u_n \leq v_n \leq w_n$, et si $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} w_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors (v_n) converge et $\lim_{n \to +\infty} v_n = \ell$.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe k tel que $\forall n \geq k$, $0 \leq v_n - u_n \leq w_n - u_n$. Comme $\lim_{n \to +\infty}(w_n - u_n) = 0$, la suite $(v_n - u_n)_{n \geq k}$ tend vers 0 par la Proposition 12. Comme $v_n = u_n + (v_n - u_n)$, on a $\lim v_n = \ell + 0 = \ell$. □

Définition 14. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n \geq k_0}$

– tend vers $+\infty$ si
$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies u_n \geq M,$$
– tend vers $-\infty$ si $(-u_n)_{n\geq k_0}$ tend vers $+\infty$, i.e. si
$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies u_n \leq M\,.$$

Notons que si u et v sont deux suites réelles et s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq k$, $u_n \leq v_n$, alors $u \to +\infty$ implique $v \to +\infty$, et $v \to -\infty$ implique $u \to -\infty$. Ceci est évident en revenant aux définitions et peut être vu comme une annexe au théorème des gendarmes.

Proposition 15. *Soit $(u_n)_{n\geq k_0}$ une suite réelle. Alors $u_n \to +\infty$ ssi à partir d'un certain rang k_1 tous les u_n sont strictement positifs et la suite $(1/u_n)_{n\geq k_1}$ tend vers 0.*

Démonstration. Supposons $u_n \to +\infty$. Alors pour $M = 1$, on peut trouver k_1 tel que $\forall n \geq k_1$, $u_n \geq 1$. Soit alors $\varepsilon > 0$. On peut trouver k_2 tel $\forall n \geq k_2$, $u_n \geq 1/\varepsilon$. Soit $k_3 = \max(k_1, k_2)$. Alors pour $n \geq k_3$, on a $0 \leq \frac{1}{u_n} \leq \varepsilon$ et donc $\frac{1}{u_n} \to 0$.

Inversement, soit $M > 0$. Si $\frac{1}{u_n} \to 0$, on peut trouver $n_0 \geq k_1$ tel que $\forall n \geq n_0$, $0 < \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{M}$, puisque $u_n > 0$. Ainsi, $u_n \geq M$ et $u_n \to \infty$. □

Définition 16. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\geq k_0}$ est
– *majorée* si $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \geq k_0, u_n \leq M$,
– *minorée* si $\exists m \in \mathbb{R} : \forall n \geq k_0, u_n \geq m$,
– *croissante* si $\forall n \geq k_0$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$,
– *décroissante* si $\forall n \geq k_0$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$,
– *monotone* si elle est croissante ou décroissante,
On dit qu'elle est *strictement croissante*, *strictement décroissante* ou *strictement monotone* si l'inégalité correspondante est stricte.

Théorème 17. *Soit u une suite réelle croissante.*
1. *Si elle est majorée, elle converge vers $\ell = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.*
2. *Si elle n'est pas majorée, elle tend vers $+\infty$.*

Démonstration. 1. Supposons u majorée, l'ensemble $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ possède donc une borne supérieure ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon < u_{n_0}$. Comme u est croissante et majorée par ℓ, on a donc
$$\forall n \geq n_0 : \ell - \varepsilon < u_{n_0} \leq u_n \leq \ell$$
et donc $u_n \to \ell$.

2. Supposons u non majorée et soit $M > 0$. Alors on peut trouver n_0 tel que $u_{n_0} > M$. Comme u est croissante, on a donc $u_n \geq u_{n_0} > M$ pour tout $n \geq n_0$. Ainsi, $u_n \to +\infty$. □

On en déduit qu'une suite (u_n) décroissante et minorée converge (prendre $v_n = -u_n$).

Définition 18. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que u et v sont *adjacentes* si
– $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$,
– u est croissante et v est décroissante,
– $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Proposition 19. *Deux suites adjacentes u et v convergent vers une limite commune ℓ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell \leq v_n$.*

Démonstration. Comme u est croissante et majorée (en effet, $u_n \leq v_n \leq v_0\ \forall n$), elle converge et $u_n \leq \lim u$ par le Théorème 17. De même, $-v$ est croissante et majorée par $-u_0$, donc converge et $-v_n \leq -\lim v$, i.e. $\lim v \leq v_n$. Enfin, l'égalité $v = u + (v - u)$ avec $\lim(v - u) = 0$ prouve que $\lim u = \lim v$. □

Corollaire 20 (Théorème des segments emboités)**.** *Si* $\big([a_n, b_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante de segments non vides dont les longueurs tendent vers* 0*, alors l'ensemble* $\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ *est réduit à un point.*

Par la décroissance de $\big([a_n, b_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$, on veut dire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$.

Démonstration. Par hypothèse, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc possèdent une limite commune ℓ vérifiant $a_n \leq \ell \leq b_n$ pour tout n. Le point ℓ appartient donc à chaque intervalle $[a_n, b_n]$, donc à leur intersection, qui est par conséquent non vide.

D'autre part, si $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$, alors $a_n \leq x \leq b_n$ pour tout n, et donc $\ell = \lim a_n \leq x \leq \lim b_n = \ell$ par passage à la limite (Proposition 11). Ainsi $x = \ell$ et $\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = \ell$. $\square$

3. Quelques limites standard

Théorème 21. (a) *Si* $\alpha > 0$*, alors* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

(b) *Si* $a \in \mathbb{C}$ *et* $|a| < 1$*, alors* $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$.

(c) *Si* $p > 0$*, alors* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

(d) $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

(e) *Si* $a > 1$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$*, alors* $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$.

(f) *Si* $a > 1$*, alors* $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.

(g) *Pour tous* $\alpha, \beta > 0$*, on a* $\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0$.

Démonstration. (a) Étant donné $\varepsilon > 0$, par la propriété d'Archimède on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0\varepsilon^{1/\alpha} \geq 1$ et donc pour $n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n_0^\alpha} \leq \varepsilon$.

(b) Si $a = 0$, c'est évident, sinon $\frac{1}{|a|} > 1$, donc étant donné $\varepsilon > 0$, par la propriété d'Archimède on peut trouver n_0 tel que $(\frac{1}{|a|})^{n_0} \geq \frac{1}{\varepsilon}$, et donc $\forall n \geq n_0$, $|a^n| \leq \varepsilon$.

(c) Ceci est évident si $p = 1$. Si $p > 1$, posons $x_n = \sqrt[n]{p} - 1$, alors $x_n > 0$ et par la formule du binôme, $1 + nx_n \leq (1 + x_n)^n = p$. Ainsi, $0 < x_n \leq \frac{p-1}{n}$ et $x_n \to 0$. Enfin, si $0 < p < 1$, on obtient le résultat en considérant $q = \frac{1}{p}$.

(d) Posons $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$, alors $x_n \geq 0$ et $n = (1+x_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}x_n^2$. Ainsi, $0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ pour $n \geq 2$.

(e) Posons $a = 1 + h$, $h > 0$. Soit k un entier tel que $k > \alpha$ et $k > 0$. Alors pour $n > 2k$, on a $n = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} > \frac{n}{2} + k$, et donc par la formule du binôme,

$$a^n = (1+h)^n > \binom{n}{k} h^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}h^k > \frac{n^k h^k}{2^k k!}.$$

Ainsi, $0 < \frac{n^\alpha}{a^n} < \frac{2^k k!}{h^k} n^{\alpha-k}$ pour tout $n > 2k$. Comme $\alpha - k < 0$, $n^{\alpha-k} \to 0$.

(f) Cela suit de (e) en prenant $\alpha = 0$.

(g) Montrons d'abord que $(\ln n)^\alpha \leq Cn^{\beta/2}$ pour un certain $C > 0$. Soit $f(x) = \gamma^{-1}x^\gamma - \ln x$, $\gamma > 0$. Alors $f'(x) = x^{\gamma-1} - \frac{1}{x} = \frac{x^\gamma - 1}{x} \geq 0$ si $x \geq 1$. En outre, $f(1) = \gamma^{-1} > 0$. Ainsi, $f(x) > 0$ pour tous $x \geq 1$. En particulier, en prenant $\gamma = \frac{\beta}{2\alpha}$, on obtient l'inégalité énoncée pour tous $n \geq 1$. La valeur de la limite suit maintenant de (a). $\square$

Proposition 22 (Approximation décimale d'un réel)**.** *Pour tout réel* x*, la suite* $u_n = \frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}$ *converge vers* x.

Ici, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

Démonstration. Par définition, on a $\lfloor 10^n x\rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x\rfloor + 1$, donc $u_n \leq x < u_n + \frac{1}{10^n}$. Ainsi, $0 \leq x - u_n < \frac{1}{10^n}$ et donc $u_n \to x$. $\square$

Exemple. Pour $x = \sqrt{2}$, on a $u_0 = 1$, $u_1 = 1,4$, $u_2 = 1,41$, $u_3 = 1,414$.

En particulier, tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels. On dit que $\mathbb{Q}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$. Évidemment, cette preuve courte cache le fait qu'on utilise l'existence de la fonction $\lfloor x \rfloor$, qui se déduit du fait que $\mathbb{R}$ est archimédien.

On peut aller plus loin et monter le résultat suivant.

Proposition 23. *Pour tout réel x, les suites $u_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $v_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ sont adjacentes et convergent vers x*

On dit que les rationnels u_n et v_n sont des valeurs décimales approchées de x à 10^{-n} près, respectivement *par défaut* et *par excès.*

Démonstration. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{\lfloor 10^{n+1} x \rfloor}{10^{n+1}} - \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} = \frac{\lfloor 10^{n+1} x \rfloor - 10 \lfloor 10^n x \rfloor}{10^{n+1}}$. Or $\lfloor 10^{n+1} x \rfloor$ est le plus grand entier m tel que $m \leq 10^{n+1} x$. Comme $10 \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^{n+1} x$, on a donc $10 \lfloor 10^n x \rfloor \leq \lfloor 10^{n+1} x \rfloor$ et donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

D'autre part, $v_{n+1} - v_n = \frac{\lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1}{10^{n+1}} - \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n} = \frac{\lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1 - 10(\lfloor 10^n x \rfloor + 1)}{10^{n+1}}$. Or $\lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1$ est le plus petit entier r tel que $10^{n+1} x < r$. Comme $10^{n+1} x < 10(\lfloor 10^n x \rfloor + 1)$, on a donc $\lfloor 10^{n+1} x \rfloor + 1 \leq 10(\lfloor 10^n x \rfloor + 1)$ et donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Enfin, $v_n - u_n = 10^{-n} \to 0$. Les suites u et v sont donc adjacentes. Si l'on désigne ℓ leur limite commune, l'inégalité $u_n \leq x \leq v_n$ qui suit par définition de u_n et v_n entraine $x = \ell$. □

4. Sous-suites et le Théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition 24. Une suite $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée *sous-suite* ou *suite extraite* d'une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Exemple. les suites $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont des sous-suites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Notons que si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors par récurrence on a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(n) \geq n\,.$$

Proposition 25. *Si v est une sous-suite de u et si $u_n \to \ell \in \mathbb{C}$, alors $v_n \to \ell$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $u_n \to \ell$, on peut trouver n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Or $v_n = u_{\varphi(n)}$ pour une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Ainsi, $\varphi(n) \geq n$ et

$$n \geq n_0 \implies \varphi(n) \geq n_0 \implies |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon\,.$$ □

Exemple. 1. La suite $(-1)^n$ est divergente car la sous-suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1 tandis que la sous-suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers -1.

2. La suite $u_n = \cos(n\pi/4)$ diverge car la sous-suite $u_{4n} = (-1)^n$ diverge.

Proposition 26. *Si u est une suite telle que les deux sous-suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ, alors la suite u converge vers ℓ.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver n_1 et n_2 tels que

$$n \geq n_1 \implies |u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad n \geq n_2 \implies |u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon\,.$$

Posons $n_0 = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$. Alors pour $n \geq n_0$ on a $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ et donc $u_n \to \ell$. □

Proposition 27 (cf. [3])**.** *Toute suite réelle possède une sous-suite monotone.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Disons que le terme u_{n_0} est *dominant* si $u_{n_0} > u_n$ pour tout $n > n_0$.

Supposons d'abord que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une infinité de termes dominants, d'indices $n_0 < n_1 < \dots$. Alors la sous-suite $(u_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puisque $u_{n_k} > u_{n_{k+1}}$, ce qui montre le résultat dans ce cas.

Supposons à présent que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a un nombre fini de termes dominants, soit u_N le dernier terme, et posons $m_1 = N+1$. Alors u_{m_1} n'est pas dominant, donc il existe $m_2 > m_1$ tel que $u_{m_1} \le u_{m_2}$. De même, u_{m_2} n'est pas dominant puisque $m_2 > N$, donc il existe $m_3 > m_2$ tel que $u_{m_2} \le u_{m_3}$. Par récurrence, on voit qu'il existe une sous-suite $u_{m_1} \le u_{m_2} \le u_{m_3} \le \dots$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 28 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.** *1. Toute suite réelle bornée possède une sous-suite convergente.*

2. Toute suite complexe bornée possède une sous-suite convergente.

Démonstration. 1. Soit u une suite réelle bornée. Par la Proposition 27, elle possède une sous-suite v monotone, qui est évidemment bornée elle aussi. Ainsi, la sous-suite v converge par le Théorème 17.

2. Soit u une suite complexe bornée et posons $u_n = x_n + iy_n$, avec $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Comme $|x_n| \le \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |u_n|$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle et bornée et possède donc une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, de limite $a \in \mathbb{R}$. De même, $|y_{\varphi(n)}| \le |u_{\varphi(n)}|$, donc la suite réelle $(y_{\varphi(n)})$ possède une sous-suite convergente $(y_{\varphi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $b \in \mathbb{R}$. Enfin, $(x_{\varphi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, donc $x_{\varphi(\psi(n))} \to a$ par la Proposition 25. Ainsi, $u_{\varphi(\psi(n))} = x_{\varphi(\psi(n))} + iy_{\varphi(\psi(n))}$ converge vers $a + ib$. □

5. Critère de Cauchy

Définition 29. On dit qu'une suite complexe (u_n) est *de Cauchy* si

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 : p, q \ge n_0 \implies |u_p - u_q| \le \varepsilon\,.$$

Théorème 30. *Une suite réelle ou complexe converge si et seulement si elle est de Cauchy.*

On dit que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont *complets.*

Démonstration. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ et soit $\varepsilon > 0$. Prenons n_0 tel que $\forall n \ge n_0$, $|u_n - \ell| \le \varepsilon/2$. Alors pour $p, q \ge n_0$ on a

$$|u_p - u_q| = |(u_p - \ell) - (u_q - \ell)| \le |u_p - \ell| + |u_q - \ell| \le \varepsilon,$$

donc (u_n) est de Cauchy.

Inversement, supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Montrons d'abord que (u_n) est bornée. En prenant $\varepsilon = 1$, on peut trouver un rang n_0 tel que $\forall p, q \ge n_0$, $|u_p - u_q| \le 1$. En particulier, on a $|u_n| \le 1 + |u_{n_0}|$ pour tout $n \ge n_0$. Ainsi $|u_n| \le M$ pour tout n, où $M = \max\{|u_0|, \dots, |u_{n_0-1}|, 1 + |u_{n_0}|\}$ et (u_n) est bornée.

Il s'ensuit par le Théorème de Bolzano-Weierstrass que (u_n) possède une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ convergente, de limite ℓ. On peut donc trouver n_1 tel que $\forall n \ge n_1$, $|u_{\varphi(n)} - \ell| \le \varepsilon/2$. Mais (u_n) est de Cauchy, donc on peut trouver n_2 tel que $\forall p, q \ge n_2$, $|u_p - u_q| \le \varepsilon/2$. En notant que $\varphi(n) \ge n$, on a donc en particulier $\forall n \ge n_2$, $|u_n - u_{\varphi(n)}| \le \varepsilon/2$. Ainsi, pour $n \ge n_3 := \max(n_1, n_2)$ on a

$$n \ge n_3 \implies |u_n - \ell| \le |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - \ell| \le \varepsilon,$$

donc (u_n) converge. □

Remarque. Une suite de Cauchy peut être définie de manière équivalente comme étant une suite qui vérifie

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 : n \ge n_0,\ p \ge 0 \implies |u_n - u_{n+p}| \le \varepsilon\,.$$

6. Suites récurrentes

Dans la suite, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeur dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

6.1. **Suites arithmético-géométriques.** On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite arithmético-géométrique* s'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que la relation de récurrence suivante soit vérifiée :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = au_n + b\,.$$

Notre but est de donner une forme explicite du terme général de cette suite.

Si $a = 1$, il s'agit d'une suite arithmétique et on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = u_0 + nb\,.$$

Supposons maintenant $a \neq 1$ et montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = a^n(u_0 - r) + r, \qquad \text{où } r = \frac{b}{1-a}\,.$$

En effet, si on pose $v_n := u_n - r$, on a $v_{n+1} = au_n + b - r = av_n + ar + b - r = av_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison a. Ainsi, $u_n = v_n + r = a^n v_0 + r = a^n(u_0 - r) + r$.

On en déduit que si $u_0 = r$, la suite est constante et converge donc vers r. Si $|a| < 1$, on a encore $u_n \to r$. Si $u_0 \neq r$ et $|a| > 1$, alors $|u_n| \geq |a|^n|u_0 - r| - |r| \to +\infty$ et donc u_n diverge (car si u_n convergeait, $|u_n|$ convergerait aussi). Le cas $|a| = 1$ sera vu en exercice.

6.2. **Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.** Une *suite récurrente linéaire d'ordre p* est une suite de la forme $u_{n+p} = a_0u_n + a_1u_{n+1} + \ldots + a_{p-1}u_{n+p-1}$, où $a_j \in \mathbb{K}$. Pour $p = 1$, la relation se réduit à $u_{n+1} = a_0u_n$, i.e. une suite géometrique et on a donc $u_n = u_0a_0^n$. On étudie ici le cas $p = 2$; on suppose donc que

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \qquad (\star)$$

pour certains $a, b \in \mathbb{K}$. Montrons d'abord que $E := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ vérifie } (\star)\}$ est un espace vectoriel de dimension 2. On pourra en déduire qu'il y a exactement deux suites linéairement indépendantes qui vérifient $(\star)$.

Il est clair que l'ensemble S des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, muni de l'addition terme à terme et de la multiplication par un scalaire de $\mathbb{K}$ forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $u, v \in E$, on vérifie aisément que $\alpha u + \beta v \in E$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, donc E est un sous-espace de S. On remarque maintenant que la fonction $f : E \to \mathbb{K}^2$ définie par $f : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$ est un isomorphisme. En effet, f est clairement linéaire, elle est surjective : si $(x, y) \in \mathbb{K}^2$, la suite $u_0 = x$, $u_1 = y$ et $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour $n \geq 0$ fournit un antécédant de (x, y). Enfin, elle est injective : si $u, v \in E$ et $(u_0, u_1) = (v_1, v_2)$, alors $u = v$ car u_n est entièrement déterminé par u_0 et u_1. Il s'ensuit que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.

Considérons maintenant le polynôme $P = X^2 - aX - b$

1) Si P a deux racines distinctes r_1 et r_2, les suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient $(\star)$ et ne sont pas proportionnelles. Elles forment donc une base de E, et les solutions de $(\star)$ sont donc les suites $(\alpha r_1^n + \beta r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
2) Si P a une racine double r, la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(\star)$. Montrons que la suite $v_n = nr^n$ vérifie $(\star)$ elle aussi. Comme P a une racine double r, le discriminant $\Delta = a^2 + 4b$ est nul, et on a $r = \frac{a}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= (n+2)r^n \cdot r^2 = (n+2)r^n(ar + b) = a(n+1)r^{n+1} + b(nr^n) + ar^{n+1} + 2br^n \\ &= av_{n+1} + bv_n + (\tfrac{a^2}{2} + 2b)r^n = av_{n+1} + bv_n \end{aligned}$$

car $r = \frac{a}{2}$ et $\Delta = 0$. Ainsi, les solutions de $(\star)$ sont les suites $((\alpha + \beta n)r^n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Ceci conclut notre étude si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, car P possède toujours des racines dans $\mathbb{C}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il se peut que P n'ait pas de racines réelles. Dans ce cas, les racines de P sont de la forme $r_\pm = \rho e^{\pm i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \neq 0$ $[\pi]$. Comme les suites (r_+^n) et (r_-^n) vérifient $(\star)$, leurs combinaisons linéaires $(\rho^n \cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\rho^n \sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient $(\star)$ aussi et sont réelles. Comme elles ne sont pas proportionnelles, les solutions de $(\star)$ sont donc les suites $(\rho^n(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)))_{n\in\mathbb{N}}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

6.3. **Suites récurrentes générales d'ordre 1.** On conclut ce chapitre par l'étude de suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation du type

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n),$$

où $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un intervalle fermé $I \subset \mathbb{R}$ et $u_0 \in I$. On suppose que $f(I) \subset I$ pour que la suite soit bien définie (en effet, si par exemple $u_1 = f(u_0) \notin I$, alors $u_2 = f(u_1)$ n'a pas de sens). Rappelons qu'un intervalle fermé prend la forme

$$I = [a, b], \quad I = [a, +\infty[, \quad I =]-\infty, b] \quad \text{ou } I = \mathbb{R}\,.$$

On travaille avec ces intervalles car ils ont la propriété que si $u_n \in I$ $\forall n$ et si $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors $\ell \in I$. Ceci est trivial si $I = \mathbb{R}$. Si $I = [a, +\infty[$, alors $u_n \geq a$ $\forall n$ implique $\lim u_n \geq a$ par la Proposition 11 et donc $\ell \in I$. Les autres cas se traitent de la même façon .

Proposition 31. *Soit $f : I \to I$ une fonction continue sur un intervalle I fermé. Si la suite $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 \in I$ converge, sa limite ℓ appartient à I et vérifie $\ell = f(\ell)$.*

Ainsi, la limite d'une telle suite est forcément un *point fixe* de f.

Démonstration. Comme $u_n \in I$ $\forall n$ et I est fermé, la discussion précédente montre que $\ell \in I$.

D'autre part, $u_n \to \ell$ implique $f(u_n) \to f(\ell)$ par la Proposition 9. Ainsi, $u_{n+1} \to f(\ell)$. Or $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc $u_{n+1} \to \ell$. L'unicité de la limite montre donc que $\ell = f(\ell)$. □

Exemple. Si $u_{n+1} = u_n^2 + 2$, alors u_n diverge, car l'équation $x = f(x)$ n'a aucune solution. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x < x^2 + 2$. En prenant $x = u_n$, on voit que la suite est strictement croissante. Comme elle diverge, elle tend vers $+\infty$.

Proposition 32. *S'il existe $\ell \in I$ et $k \in [0, 1[$ tel que pour $f : I \to I$ on ait*

$$\forall x \in I : |f(x) - \ell| \leq k|x - \ell|,$$

alors pour $u_0 \in I$, la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ.

Démonstration. Par récurrence, on montre que $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$, ce qui prouve que la suite tend vers ℓ puisque $0 \leq k < 1$. □

Exemple. Soit $u_0 \geq 0$. On définit la suite $u_{n+1} = \frac{5u_n+3}{u_n+5}$, dont tous les termes sont positifs car l'intervalle $\mathbb{R}_+$ est stable par $f : x \mapsto \frac{5x+3}{x+5}$.

L'équation $x = \frac{5x+3}{x+5}$ possède deux racines $\pm\sqrt{3}$. Comme tous les u_n sont positifs, la limite u doit être positive, donc u ne peut converger que vers $\sqrt{3}$.

Pour $x \geq 0$, la majoration

$$|f(x) - \sqrt{3}| = \frac{|5x + 3 - x\sqrt{3} - 5\sqrt{3}|}{x + 5} = \frac{|(x - \sqrt{3})(5 - \sqrt{3})|}{x + 5} \leq \Big(\frac{5 - \sqrt{3}}{5}\Big)|x - \sqrt{3}|$$

prouve que $u_n \to \sqrt{3}$ par la proposition précédente.

Définition 33. Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *contractante* si elle est k-lipschitzienne sur I avec $k \in [0, 1[$.

Corollaire 34. *Si $\ell \in I$ est un point fixe de f, et si $f : I \to I$ est contractante, alors la suite converge vers ℓ.*

Notons que si f est dérivable sur I et que sa dérivée est bornée sur I par un réel $k \in [0, 1[$, alors elle est contractante sur I par l'inégalité des accroissements finis.

Exemple. Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}\sin u_n + \frac{1}{2}$. Comme l'intervalle $[0, 1]$ est stable par $f(x) = \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{2}$, ceci définit une suite d'éléments de $[0, 1]$.

La fonction $g(x) = x - f(x)$ vérifie $g(0) < 0$ et $g(1) > 0$. Comme elle est continue et strictement croissante, il existe un unique point ℓ tel que $g(\ell) = 0$, i.e. $\ell = f(\ell)$.

La fonction f est $\frac{1}{4}$-lipschitzienne, puisqu'elle est dérivable et que sa dérivée est bornée par $\frac{1}{4}$. La suite converge donc vers ℓ.

On peut d'ailleurs estimer la vitesse de convergence :

$$|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \ell| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Parfois les critères précédent ne suffisent pas pour conclure. On peut alors tenter d'étudier la monotonie de la suite. Par exemple, si on montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors on pourra conclure qu'elle converge (Théorème 17). On dispose des résultats suivants :

Proposition 35. *Si $f(x) - x$ garde un signe constant, alors la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ est monotone.*

Démonstration. On a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. □

Proposition 36. *Si f est croissante, alors la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ est monotone.*

Démonstration. Si $u_0 \leq u_1$, alors $u_1 = f(u_0) \leq f(u_1) = u_2$ et par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$. De même, si $u_0 \geq u_1$, on montre que la suite est décroissante. □

Remarque. Lorsque f est croissante, on peut utiliser les points fixes de f pour majorer la suite. Par exemple, si $f(a) = a$ et $u_n \leq a$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(a) = a$.

Exemple. Soit $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$. En écrivant $f(x) = x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, on voit que $\mathbb{R}_+$ est stable par f. L'équation $f(x) = x$ possède une unique solution $x = 1$.

L'estimation $|f(x) - 1| = |x||x - 1|$ ne nous donne pas d'information. On raisonnera donc par monotonie.

On a $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geq x$, ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Si $u_0 > 1$, la suite ne peut donc pas converger vers 1, le seul point fixe de f, donc la suite diverge vers $+\infty$. Si $u_0 \leq 1$, alors la suite est croissante et majorée par 1, car f laisse stable l'intervalle $[0, 1]$. La suite converge donc, et sa limite est forcément égale à 1.

On termine ce chapitre par un théorème important. Contrairement au Corollaire 34, ce résultat *établit* l'existence d'un point fixe sous certaines conditions.

Théorème 37 (Théorème du point fixe [1], cf. [4])**.** *Si $f : I \to I$ est une fonction contractante sur un intervalle fermé I, alors f possède un et un seul point fixe $\ell \in I$, et pour tout $c \in I$, la suite $u_0 = c$, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ. La vitesse de convergence est estimée par l'inégalité suivante :*

$$|u_n - \ell| \leq \frac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0|,$$

où $k \in [0, 1[$ est la constante de Lipschitz de f.

Démonstration. Pour tous $x, y \in I$, on a

$$\begin{aligned}|x - y| &\leq |x - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - y| \\ &\leq |x - f(x)| + k|x - y| + |f(y) - y|,\end{aligned}$$

1. de Banach ou de Picard.

et donc

$$|x-y| \leq \frac{|f(x)-x|+|f(y)-y|}{1-k}. \qquad (*)$$

Ceci montre déjà l'unicité de l'éventuel point fixe : si x et y sont deux points fixes, on a $|x-y|=0$.

Pour montrer l'existence du point fixe, notons $f^n = f \circ \ldots \circ f$ la fonction f composée n fois avec elle même, avec la convention $f^0(x)=x$. Soit $c \in I$. On peut écrire la suite $u_0 = c$, $u_{n+1} = f(u_n)$ sous la forme $(f^n(c))_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons que cette suite est de Cauchy. Il en résultera qu'elle converge vers un point fixe $\ell \in I$ par la Proposition 31, ce qui est le résultat recherché.

On remarque d'abord par récurrence que $|f^n(x)-f^n(y)| \leq k^n|x-y|$ pour tous $x, y \in I$. En prenant $x = f^n(c)$ et $y = f^m(c)$ dans $(*)$, on a donc

$$\begin{aligned}
|f^n(c)-f^m(c)| &\leq \frac{|f(f^n(c))-f^n(c)|+|f(f^m(c))-f^m(c)|}{1-k} \\
&= \frac{|f^n(f(c))-f^n(c)|+|f^m(f(c))-f^m(c)|}{1-k} \\
&\leq \frac{k^n|f(c)-c|+k^m|f(c)-c|}{1-k} = \frac{k^n+k^m}{1-k}|u_1-u_0|\,.
\end{aligned}$$

Comme $k \in [0,1[$, ceci tend vers 0 lorsque $n, m \to +\infty$; la suite $(f^n(c))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy. En gardant n fixé et en faisant tendre $m \to +\infty$, on obtient l'estimée sur la vitesse de convergence. □

Références

[1] C. Deschamps, A. Warusfel, *Mathématiques tout-en-un MPSI-PCSI*, 2ème édition, Dunod, 2003.

[2] T. Joly, *Polycopié d'Algèbre et Analyse fondamentales MI3, Chapitre I*, 2008.

[3] D. Newman, T. D. Parsons, *On monotone subsequences*, Amer. Math. Monthly **95** (1988), 44–45.

[4] R. Palais, *A simple proof of the Banach contraction principle*, J. fixed point theory appl. **2** (2007), 221–223.

[5] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, third edition, McGraw-Hill, 1976.