Les fonctions de référence

Plan du chapitre

1 Compléments sur la réciproque d'une bijection

1.1 Rappels.

On rappelle que si f est une application d'un ensemble E vers un ensemble F,

$$\boxed{f \text{ est bijective} \Leftrightarrow \forall y \in F,\ \exists! x \in E/\ y = f(x).}$$

Dans ce cas, on peut définir la réciproque f^{-1} de f. Elle est entièrement caractérisée par

$$\boxed{\forall (x, y) \in E \times F,\ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).}$$

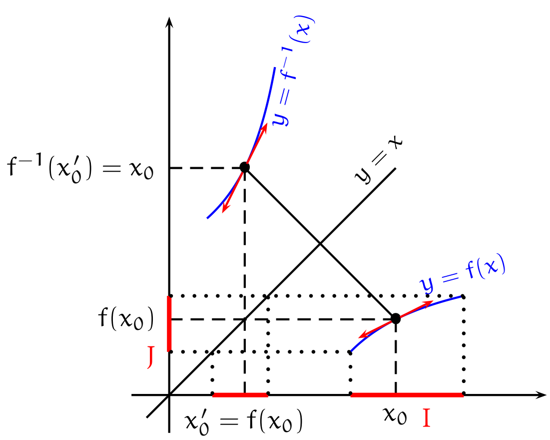
La réciproque de f est également entièrement caractérisée par les égalités

$$\boxed{f^{-1} \circ f = Id_E \text{ et } f \circ f^{-1} = Id_F,}$$

ce qui s'écrit encore

$$\boxed{\forall x \in E,\ (f^{-1}(f(x)) = x \text{ et } \forall y \in F,\ f(f^{-1}(y)) = y.}$$

1.2 Cas particulier des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables



Ci-contre, nous avons tracé le graphe d'une fonction f, réalisant une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J, et le graphe de sa réciproque.

Le graphe de f^{-1} est l'ensemble des points de coordonnées $(x', f^{-1}(x'))$ où x' décrit l'intervalle J (dans cette phrase, l'intervalle J est pensé sur l'axe des abscisses).

On pose $x_0 = f^{-1}(x'_0)$ ou, ce qui revient au même, $x'_0 = f(x)$, x_0 étant lui un réel de l'intervalle I. On passe du point $(x_0, f(x_0)) = (f^{-1}(x'_0), x'_0)$ au point $(x'_0, f^{-1}(x'_0))$ en échangeant les deux coordonnées. Géométriquement, les deux points $(x_0, f(x_0))$ et $(x'_0, f^{-1}(x'_0))$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$. Ainsi,

$$\boxed{\text{le graphe de } f^{-1} \text{ est le symétrique du graphe de } f \text{ par rapport à la droite d'équation } y = x.}$$

On démontrera dans le cours d'analyse les résultats suivants.

Théorème 1. Soit f une application définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dérivable sur I. Si la dérivée de f est strictement positive sur I (ou strictement négative sur I), alors f réalise une bijection de I sur $f(I) = J$ qui est un intervalle de même nature que I (ouvert, semi-ouvert, fermé). Sa réciproque f^{-1} est alors dérivable sur J et,

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\forall x \in J,\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

f et f^{-1} sont toutes deux strictement monotones sur I et J respectivement, et ont même sens de variations sur I et J respectivement.

L'égalité $(f^{-1})'(x_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$ est lisible sur le graphique : par symétrie, le coefficient directeur de la tangente au graphe de f^{-1} au point $(x'_0, f^{-1}(x'_0))$ est l'inverse du coefficient directeur de la tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$. En effet, soient $M(a, b)$ et $N(c, d)$ deux points d'abscisses et d'ordonnées distinctes. Leurs symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ sont les points $M'(b, a)$ et $N'(d, c)$. Le coefficient directeur de la droite $(M'N')$ est

$$\frac{y_{N'} - y_{M'}}{x_{N'} - x_{M'}} = \frac{c - a}{d - b} = \left(\frac{d - b}{c - a}\right)^{-1} = \left(\frac{y_N - y_M}{x_N - x_M}\right)^{-1},$$

et est donc l'inverse du coefficient directeur de la droite (MN). On applique alors ce travail aux points $M_0(x_0, f(x_0))$ et $M(x, f(x))$ puis on fait tendre x vers x_0 et on obtient le résultat.

2 Les fonctions $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$

2.1 Etude générale

Pour $n \in \mathbb{N}$ et x réel, on pose $f_n(x) = x^n$. Quand $n = 0$, la fonction f_n est la fonction constante $x \mapsto 1$ et quand $n = 1$, la fonction f_n est la fonction $x \mapsto x$. Sinon

Théorème 2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. La fonction f_n ; $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = nx^{n-1}$.

Démonstration. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout réel non nul h, on a d'après la formule du binôme de Newton

$$\begin{aligned}\frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\left(x_0^n + nhx_0^{n-1} + \binom{n}{2}x_0^{n-2}h^2 + \ldots \binom{n}{n-1}x_0h^{n-1} + h^n\right) - x_0^n\right)\\ &= nx_0^{n-1} + \binom{n}{2}x_0^{n-2}h + \ldots \binom{n}{n-1}x_0h^{n-2} + h^{n-1}.\end{aligned}$$

et quand h tend vers 0, cette dernière expression tend vers nx_0^{n-1}. On peut s'y prendre autrement : pour $x \neq x_0$

$$\begin{aligned}\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} &= \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0}\\ &= x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}.\end{aligned}$$

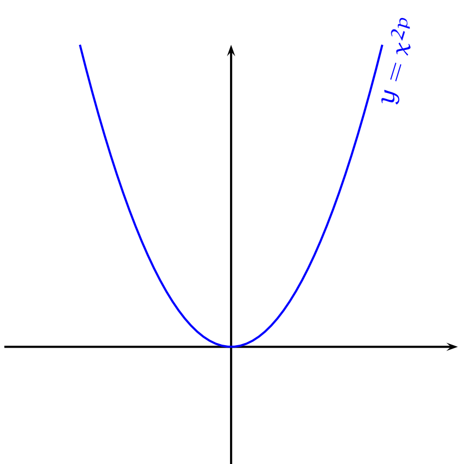
et quand x tend vers x_0, cette expression tend vers $\underbrace{x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \ldots + x_0^{n-1}}_{n} = nx_0^{n-1}$.

❏

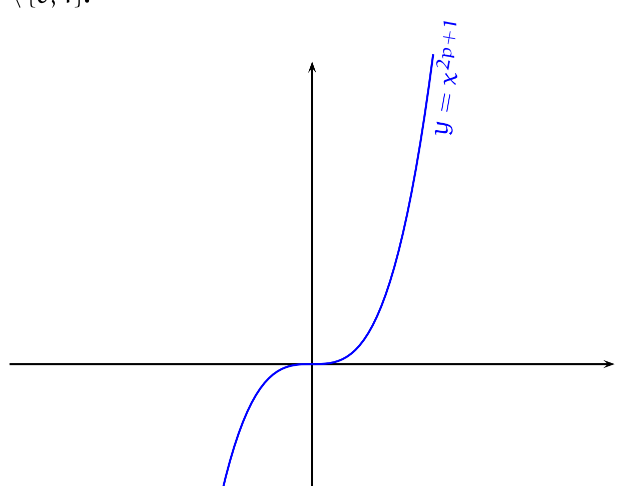
On a alors immédiatement le théorème suivant :

Théorème 3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
- Quand n est pair, la fonction $x \mapsto x^n$ est paire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
- Quand n est impair, la fonction $x \mapsto x^n$ est impaire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Représentation graphique des fonctions $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.



$n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$



$n = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}^*$

Etudions maintenant les positions relatives des graphes $\mathscr{C}_n$ des fonctions f_n sur $\mathbb{R}^+$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, +\infty[$.

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - x^n = x^n(x - 1).$$

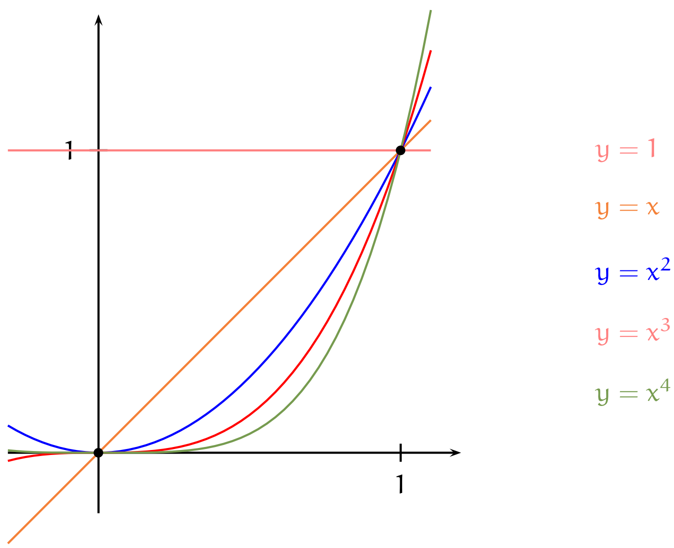
Si $x = 0$ ou $x = 1$, on a $f_{n+1}(x) = f_n(x)$. Toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ ont en commun les points de coordonnées $(0, 0)$ et $(1, 1)$.
Si $x \in]0, 1[$, on a $x^n(x-1) < 0$ et donc $f_{n+1}(x) < f_n(x)$. Sur $]0, 1[$, la courbe $\mathscr{C}_{n+1}$ est strictement au-dessous de la courbe $\mathscr{C}_n$.
Si $x \in]1, +\infty[$, on a $x^n(x - 1) > 0$ et donc $f_{n+1}(x) > f_n(x)$. Sur $]1, +\infty[$, la courbe $\mathscr{C}_{n+1}$ est strictement au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_n$.

- Si $x \in]0,1[$, $1 > x > x^2 > x^3 > x^4 > \ldots$,
- Si $x \in]1,+\infty[$, $1 < x < x^2 < x^3 < x^4 < \ldots$.

Dit autrement :

- Si $x \in]0,1[$, la suite géométrique $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante,
- Si $x \in]1,+\infty[$, la suite géométrique $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Représentation graphique des fonctions $x \mapsto x^n$, $n \in \{0,1,2,3,4\}$.



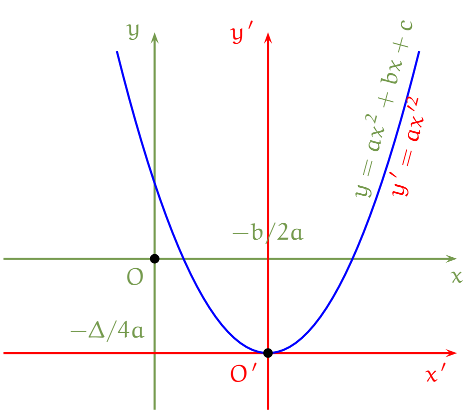
2.2 Les fonctions du second degré $x \mapsto ax^2+bx+c$, $a \neq 0$

Forme canonique. Soient a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$. Pour tout réel x, en posant $\Delta = b^2-4ac$, on a

$$ax^2+bx+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$
$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} \text{ où } \Delta = b^2-4ac.$$

Représentation graphique. On se donne un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ c'est-à-dire la courbe d'équation $y = ax^2+bx+c$ ou encore

$$y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} \ (*) \text{ dans le repère } \mathscr{R}.$$



On cherche alors un repère mieux adapté à cette courbe. Pour cela, on prend comme nouvelle origine le point $O'\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ puis comme nouveau repère le repère $\mathscr{R}' = (O', \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Les formules de changement de repère s'écrivent

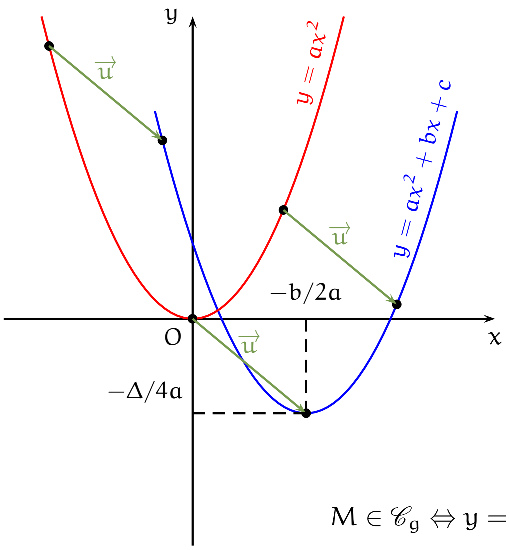
$$\left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{b}{2a}+x' \\ y = -\dfrac{\Delta}{4a}+y' \end{array}\right. \text{ ou aussi } \left\{\begin{array}{l} x' = x+\dfrac{b}{2a} \\ y' = y+\dfrac{\Delta}{4a} \end{array}\right. .$$

Soit alors M un point du plan dont les coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$ sont notées (x, y) et les coordonnées dans le repère $\mathscr{R}'$ sont notées (x', y').

$$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow y = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$
$$\Leftrightarrow y + \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow y' = ax'^2.$$

Ainsi, la courbe $\mathscr{C}$ est à la fois la représentation graphique de la fonction $f : t \mapsto at^2 + bt + c$ dans le repère $\mathscr{R}$ et la représentation graphique de la fonction $g : t \mapsto at^2$ dans le repère $\mathscr{R}'$.

On peut avoir une autre interprétation géométrique de l'égalité $(*)$. On considère les deux fonctions $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ et $g : x \mapsto ax^2$ et on construit les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de ces deux fonctions dans un même repère $\mathscr{R}$. Ainsi, nous avons toujours deux fonctions mais contrairement à ci-dessus où nous avions une courbe et deux repères, nous avons maintenant deux courbes et un repère.



Notons $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ puis $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ et montrons que la courbe $\mathscr{C}_f$ est l'image de la courbe $\mathscr{C}_g$ par la translation $t_{\vec{u}}$.

Si M est un point du plan de coordonnées (x, y), $t_{\vec{u}}(M)$ est le point de coordonnées $(x', y') = \left(x - \frac{b}{2a}, y - \frac{\Delta}{4a}\right)$ ou encore l'expression analytique de la translation $t_{\vec{u}}$ est

$$\begin{cases} x' = x - \dfrac{b}{2a} \\ y' = y - \dfrac{\Delta}{4a} \end{cases} \text{ ce qui s'écrit aussi } \begin{cases} x = x' + \dfrac{b}{2a} \\ y = y' + \dfrac{\Delta}{4a} \end{cases}$$

On a

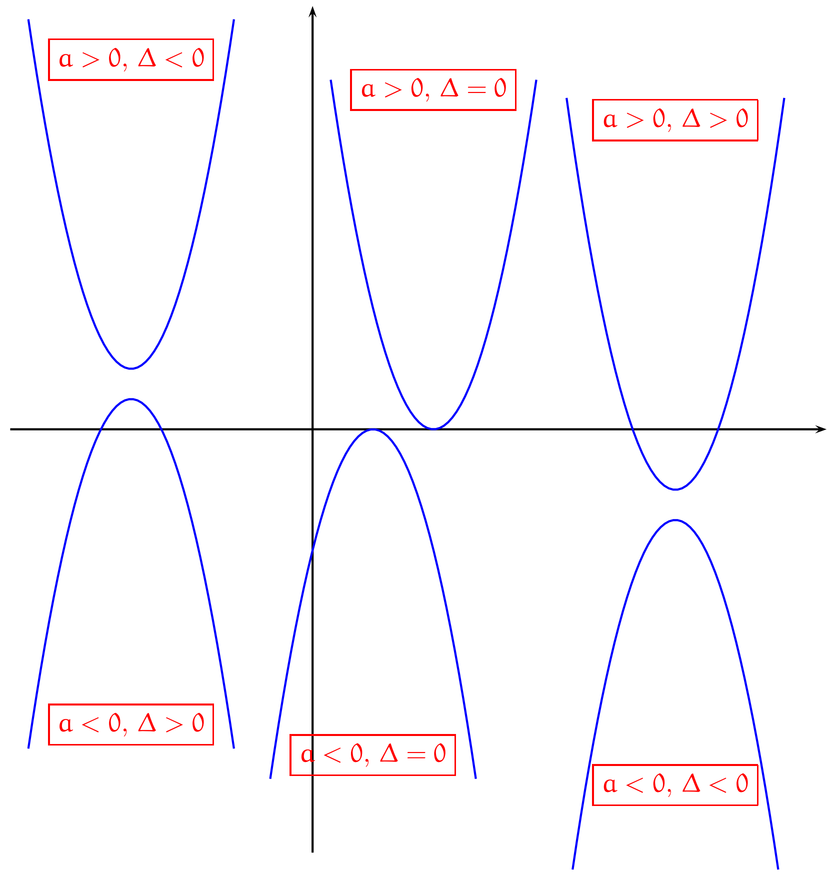
$$M \in \mathscr{C}_g \Leftrightarrow y = ax^2 \Leftrightarrow y' + \frac{\Delta}{4a} = a\left(x' + \frac{b}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow t_{\vec{u}}(M) \in \mathscr{C}_f.$$

Ainsi un point du plan appartient à la corbe représentative de g si et seulement si son translaté appartient à la courbe représentative de f. On a donc montré que

La courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$ est la translatée de la courbe d'équation $y = ax^2$ par la translation de vecteur $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

La courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$ est une **parabole**. Une parabole est une courbe aux propriétés géométriques très précises, propriétés étudiées dans le chapitre « Coniques » et il ne faut pas croire que toute courbe ayant cette allure est une parabole. Par exemple, la graphe de la fonction $x \mapsto x^4$ n'est pas une parabole.

Pour en finir avec le second degré, on rappelle sur le graphique de la page suivante les 6 cas de figure de l'étude du signe d'un trinôme du second degré.



3 Les fonctions $x \mapsto 1/x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

3.1 Etude générale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

• **Parité.** Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{(-x)^n} = (-1)^n \dfrac{1}{x^n}$. Ainsi, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ est paire quand n est pair et impaire quand n est impair ou encore « la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ a la parité de n ».

• **Variations.** La fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante et strictement positive sur $]0, +\infty[$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

• **Dérivée.** La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

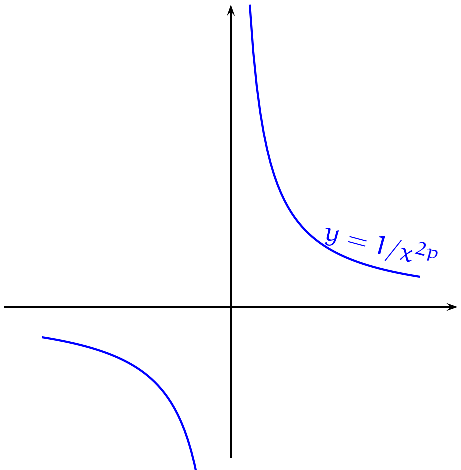
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \left(\frac{1}{x^n}\right)'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}.}$$

En effet, soient $x_0 \in \mathbb{R}^*$ puis x un réel non nul distinct de x_0.

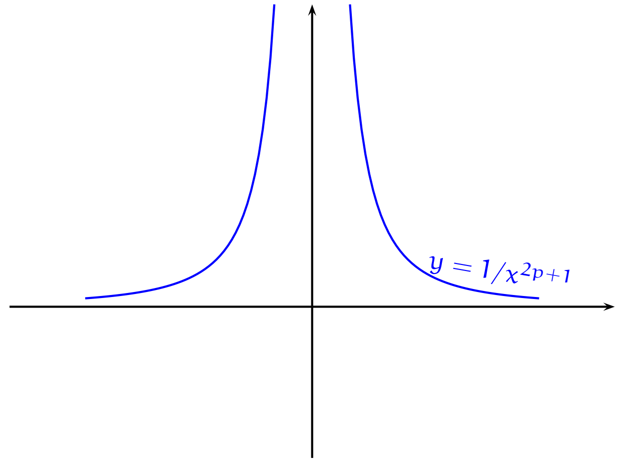
$$\begin{aligned}\frac{\dfrac{1}{x^n} - \dfrac{1}{x_0^n}}{x - x_0} &= \frac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_0}}{x - x_0} \times \left(\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}x_0} + \ldots + \frac{1}{xx_0^{n-2}} + \frac{1}{x_0^{n-1}}\right) \\ &= -\frac{1}{xx_0} \times \left(\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}x_0} + \ldots + \frac{1}{xx_0^{n-2}} + \frac{1}{x_0^{n-1}}\right).\end{aligned}$$

Quand x tend vers x_0, cette dernière expression tend vers $-\dfrac{1}{x_0^2} \times \dfrac{n}{x_0^{n-1}} = -\dfrac{n}{x_0^{n+1}}$.

On peut alors fournir le graphe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, en séparant les cas n pair et n impair.



$n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$



$n = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$

3.2 Les fonctions homographiques $x \mapsto (ax + b)/(cx + d)$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$

On se donne quatre réels a, b, c et d tels que $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$ (la condition $c \neq 0$ élimine le cas particulier des fonctions affines et la condition $ad - bc \neq 0$ empêche une proportionnalité entre le numérateur et le dénominateur et évite donc une fonction du genre $x \mapsto \dfrac{2x - 4}{x - 2} = 2$). Pour $x \neq -\dfrac{d}{c}$, on pose $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$.

• **Transformation canonique.** Comme pour les fonctions du second degré, on dispose d'une transformation canonique, l'idée générale étant dans les deux cas d'obtenir une expression où la variable x n'apparaît qu'une seule fois et donc de comprendre les opérations élémentaires successives effectuées depuis la variable x jusqu'à son image $f(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{d}{c}\}$.

$$f(x) = \frac{\dfrac{a}{c}(cx + d) + b - \dfrac{ad}{c}}{cx + d} = \frac{\dfrac{a}{c}(cx + d)}{cx + d} - \frac{(ad - bc)/c}{cx + d} = \frac{a}{c} - \frac{(ad - bc)/c^2}{x + \dfrac{d}{c}}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\},\ \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{(ad - bc)/c^2}{x - \dfrac{d}{c}}.}$$

⩾ **Commentaire .** • *Dans la transformation ci-dessus, nous voulions faire apparaître l'expression* $cx + d$ *au numérateur pour pouvoir ensuite la simplifier. Il y avait alors deux manières d'agir :*

$$ax + b = cx + d + ax + b - cx - d = (cx + d) + ((a - c)x + (b - d)) \quad (1),$$

et

$$ax + b = \frac{a}{c}(cx + d) + b - \frac{ad}{c} \quad (2).$$

(2) *est la seule bonne façon d'agir car le terme correctif* $b - \dfrac{ad}{c}$ *ne contient plus la variable* x *alors que le terme* $((a - c)x + (b - d))$ *contient toujours cette variable.*

• *Pour effectuer la transformation* (2)*, on a commencé par* ***écrire ce que l'on voulait voir écrit*** *:*

$$ax + b = ?(cx + d) + ?$$

puis, on a corrigé petit à petit

$$ax + b = \frac{a}{c}(cx + d) + ? \text{ puis } ax + b = \frac{a}{c}(cx + d) - \frac{ad}{c} + b.$$

• **Centre de symétrie.** On note (Γ) la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Montrons que le point $\Omega\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$ est centre de symétrie de (Γ).

1 ère solution. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$. Alors $2x_\Omega - x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ et

$$f(2x_\Omega - x) = \frac{a}{c} - \frac{(ad-bc)/c^2}{(-2\frac{d}{c} - x) + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{(ad-bc)/c^2}{x + \frac{d}{c}},$$

et donc

$$f(2x_\Omega - x) + f(x) = 2 \times \frac{a}{c} = 2y_\Omega.$$

On a montré que

$$\boxed{\text{Le point } \Omega\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right) \text{ est centre de symétrie du graphe de la fonction } x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}.}$$

2 ème solution. On trouve une équation de (Γ) dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. Les formules de changement de repère s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{d}{c} + X \\ y = \dfrac{a}{c} + Y \end{array}\right. \text{ ou encore } \left\{\begin{array}{l} X = x + \dfrac{d}{c} \\ Y = y - \dfrac{a}{c} \end{array}\right. .$$

Soit alors M un point du plan dont les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont notées (x, y) et les coordonnées dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ sont notées (X, Y).

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow y - \frac{a}{c} = -\frac{(ad-bc)/c^2}{x + \frac{d}{c}} \Leftrightarrow Y = -\frac{(ad-bc)/c^2}{X}.$$

Maintenant, la nouvelle fonction $g : X \mapsto -\dfrac{(ad-bc)/c^2}{X}$ est impaire et la courbe (Γ) est à la fois la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et la courbe représentative de g dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. Donc l'origine du repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ à savoir Ω est centre de symétrie de (Γ).

Avec cette deuxième manière d'agir, plus compliquée que la première, on a néanmoins obtenu davantage : de même que les graphes des fonctions $x \mapsto ax^2 + bx + c$ sont les translatés des graphes des fonctions de référence $x \mapsto ax^2$,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{les graphes des fonctions } x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d},\ a \neq 0,\ ad - bc \neq 0, \text{ sont les translatés des graphes} \\ \text{des fonctions de référence } x \mapsto \dfrac{k}{x},\ k \in \mathbb{R}^*.\end{array}}$$

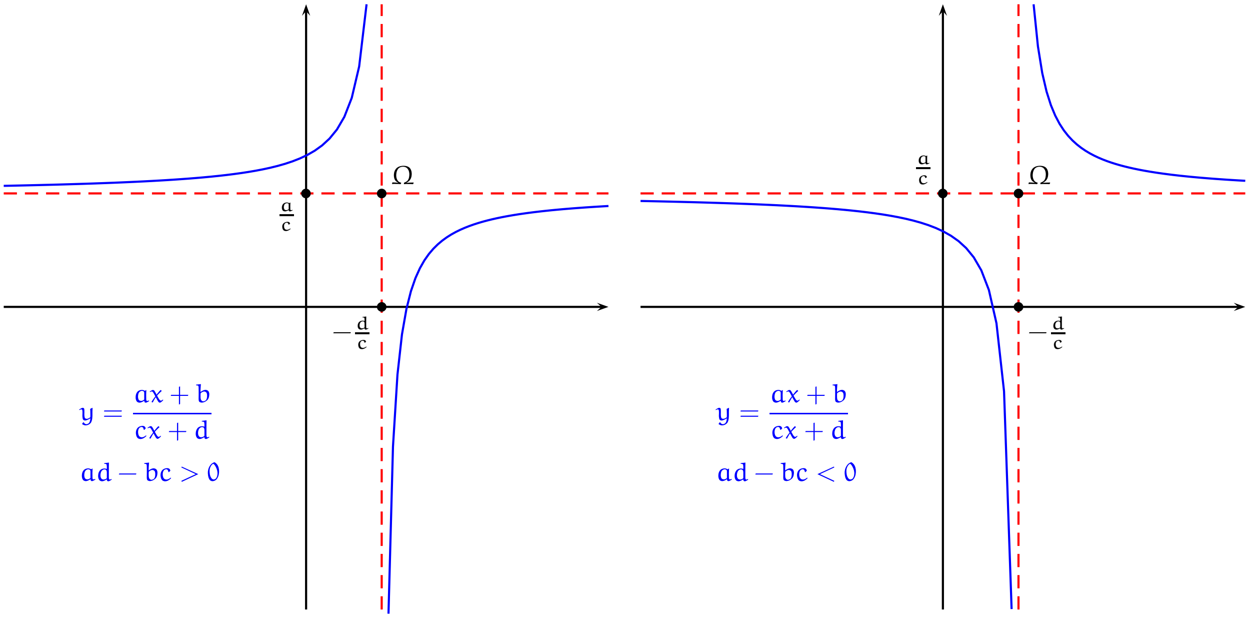
• **Dérivée.** Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$,

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'(x) = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\},\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.}$$

Ainsi, par exemple, $\left(\dfrac{2x-3}{x-1}\right)' = \dfrac{-2+3}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{(x-1)^2}$. De manière générale, le signe de $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'$ sur chacun des intervalles $\left]-\infty, -\dfrac{d}{c}\right[$ et $\left]-\dfrac{d}{c}, +\infty\right[$ est le signe du déterminant $D = ad - bc$.

• **Graphe.**



4 Les fonctions $x \mapsto \sqrt[n]{x}$

Dans cette section, n désigne un entier supérieur ou égal à 1. La fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Cette fonction réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0^n, \lim\limits_{x\to+\infty} x^n[= [0, +\infty[$, ou encore, pour tout réel positif y, il existe un et un seul réel positif x tel que $x^n = y$. Ce réel x s'appelle la racine n-ème de y et se note $\sqrt[n]{y}$.
Par exemple, $\sqrt[3]{8} = 2$ ou $\sqrt[4]{81} = 3$.

Théorème 4 (Définition de la racine énième).

❶ La fonction $\begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & [0, +\infty[\\ x & \mapsto & x^n \end{array}$ est une bijection. Sa réciproque est la fonction racine n-ème, notée $\sqrt[n]{}$.

❷ La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.

❸ Pour tout couple (x, y) de réels positifs, $y = x^n \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$.

❹ Pour tout réel positif x, $\sqrt[n]{x^n} = x$ et $(\sqrt[n]{x})^n = x$.

On doit noter qu'en particulier, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt[1]{x} = x$.

On peut alors définir la notation x^r pour un réel strictement positif x et un rationnel r quelconque (on rappelle que par convention $x^0 = 1$).

Définition 1. Soient x un réel strictement positif et $r = \frac{p}{q}$, $(p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*)$, un nombre rationnel. On pose

$$x^r = x^{p/q} = (\sqrt[q]{x})^p.$$

En particulier,

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}.$$

Ainsi, pour tout réel x strictement positif, $x^{-2/3} = \dfrac{1}{(\sqrt[3]{x})^2}$.

Cette notation obéit aux règles de calcul usuelles sur les exposants que nous ne démontrerons pas ici, celles-ci étant établies plus loin pour des exposants réels quelconques.

Théorème 5. Soient x et y deux réels strictement positifs et r et r' deux rationnels.

❶ $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$ et $\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$.

❷ $(x^r)^{r'} = x^{rr'}$.

❸ $x^r y^r = (xy)^r$.

Théorème 6 (dérivation de la racine énième).

❶ La fonction $\sqrt[n]{}$ est continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel strictement positif x,

$$(\sqrt[n]{})'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}.$$

❷ La fonction $\sqrt[n]{}$ n'est pas dérivable en 0 (pour $n \geq 2$) mais le graphe de $\sqrt[n]{}$ admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente parallèle à (Oy).

Démonstration . Notons f la fonction $t \mapsto t^n$. Nous admettrons momentanément la continuité de $f^{-1}\ :\ t \mapsto \sqrt[n]{t}$ sur $[0,+\infty[$.
• Etablissons sa dérivabilité sur $]0,+\infty[$.
Soient x_0 un réel strictement positif puis $y_0 = \sqrt[n]{x_0} = f^{-1}(x_0)$ de sorte que $x_0 = y_0^n = f(y_0)$. f est dérivable en y_0 et $f'(y_0) = ny_0^{n-1} \neq 0$. On sait alors que f^{-1} est dérivable en x_0 et que

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{ny_0^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x_0})^{n-1}} = \frac{1}{n}x_0^{-(n-1)/n} = \frac{1}{n}x_0^{\frac{1}{n}-1}.$$

On peut aussi étudier directement un taux en x_0. Pour $x \geq 0$ et $x \neq x_0$, à partir de l'identité usuelle

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a^{n-k-1}b^k + \ldots + b^{n-1}),$$

fournie dans le chapitre sur le symbole Σ, on a

$$\frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}}{x - x_0} = \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}}{(\sqrt[n]{x})^n - (\sqrt[n]{x_0})^n} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt[n]{x})^{n-1-k}(\sqrt[n]{x_0})^k} \underset{x \to x_0}{\to} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt[n]{x_0})^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x_0})^{n-1}},$$

ce qui démontre la dérivabilité et en particulier la continuité de $\sqrt[n]{}$ en x_0.

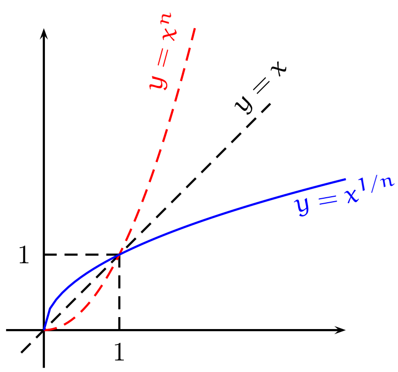
• Etudions la dérivabilité de f^{-1} en 0 (pour $n \geq 2$). Pour $x \neq 0$,

$$\frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0}}{x - 0} = \frac{\sqrt[n]{x}}{(\sqrt[n]{x})^n} = \frac{1}{(\sqrt[n]{x})^{n-1}}.$$

Il est alors clair que ce taux tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. ❏

Ensuite, on admettra momentanément que $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ et que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{x} = 0$ (pour $n \geq 2$). On peut alors fournir le graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ dont on rappelle qu'il s'obtient à partir du graphe de la fonction $x \mapsto x^n$ par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Graphe. (pour $n \geq 2$)



Théorème 7. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et x un réel positif.

$$\text{Si } x \in [0,1],\ x^n \leq x \leq x^{1/n} \leq 1 \text{ et si } x \in [1,+\infty[,\ 1 \leq x^{1/n} \leq x \leq x^n.$$

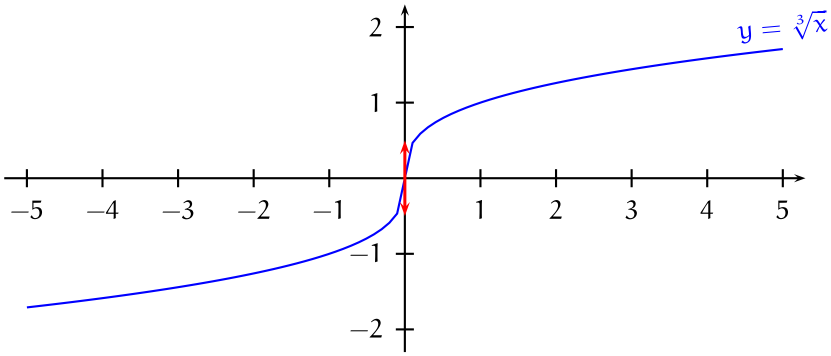
Ainsi, par exemple, si $x \in [0,1]$, $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$ (on rappelle que le carré d'un réel n'est pas toujours plus grand que ce réel).

Démonstration . Le résultat est clair pour $x = 0$. Pour x strictement positif, l'expression $x^n - x = x(x^{n-1} - 1)$ est du signe de $(x^{n-1} - 1)$ et donc du signe de $(\sqrt[n-1]{x^{n-1}} - \sqrt[n-1]{1}) = (x-1)$ par croissance de la fonction $t \mapsto \sqrt[n-1]{t}$ sur $[0,+\infty[$, ce qui démontre le résultat concernant x^n.

Ensuite, par croissance de $t \mapsto t^n$ sur $[0,+\infty[$, l'expression $x - x^{1/n}$ est du signe de $(x^n - (x^{1/n})^n) = x^n - x$, ce qui achève la démonstration. ❏

➢ **Commentaire .** *Dans la démonstration précédente, nous avons systématiquement utilisé le sens de variation des fonctions considérées. La démarche a été la suivante. On veut comparer deux nombres $A = f(a)$ et $B = f(b)$, f étant une fonction croissante sur un certain intervalle I et a et b étant deux réels de I. Pour cela, on étudie le signe de la différence $B - A$, puis on utilise la croissance de f : le signe de la différence $(f(b) - f(a))$ est le signe de la différence $(b - a)$.*

Quand n est un entier naturel naturel impair, la fonction $x \mapsto x^n$ réalise en fait une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On peut alors définir la racine n-ème sur $\mathbb{R}$ tout entier. Celle-ci est impaire, continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, non dérivable en 0. Voici par exemple le graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$.



Exercice 1. Etudier la dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{(x-1)^4(x+1)}$ et préciser sa dérivée.

Solution.
• La fonction proposée est définie sur $\mathbb{R}$.
• La fonction $x \mapsto (x-1)^4(x+1)$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ et la fonction $y \mapsto \sqrt[3]{y}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Le théorème de dérivation des fonctions composées permet d'affirmer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$. Il en est de même sur les intervalles $]-\infty,-1[$ et $]-1,1[$.
• Etudions la dérivabilité en -1. Pour $x \neq -1$,

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \frac{\sqrt[3]{(x-1)^4(x+1)}}{\sqrt[3]{(x+1)^3}} = \sqrt[3]{\frac{(x-1)^4}{(x+1)^2}}.$$

Cette expression n'a pas de limite réelle quand x tend vers -1 et donc f n'est pas dérivable en -1.
• Etudions la dérivabilité en 1. Pour $x \neq 1$,

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \sqrt[3]{(x-1)(x+1)}.$$

Cette expression tend vers 0 quand x tend vers 1. On en déduit que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 0$.
• Finalement, f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
• D'après le théorème de dérivation des fonctions composées, pour $x \neq \pm 1$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left[4(x-1)^3(x+1) + (x-1)^4\right]\left((x-1)^4(x+1)\right)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}(4(x+1)+(x-1))(x-1)^{3-\frac{8}{3}}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$$
$$= \frac{5x+3}{3}\sqrt[3]{\frac{x-1}{(x+1)^2}},$$

ce qui reste vrai pour $x = 1$. Donc, pour $x \in]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$, $f'(x) = \frac{5x+3}{3}\sqrt[3]{\frac{x-1}{(x+1)^2}}$.

⊳ Commentaire .

◇ *La fonction proposée est du type* $x \mapsto \sqrt[3]{u(x)}$ *(ou plus généralement du type* $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$*). On sait que* $\sqrt[3]{\ }$ *n'est pas dérivable en* 0*. Il ne faut pourtant pas en conclure que si la fonction* u *s'annule en un certain* x_0*, la fonction* $\sqrt[3]{u}$ *n'est pas dérivable en* x_0*. L'exemple le plus simple sur le sujet est la fonction* $x \mapsto \sqrt{x^4}$*. La fonction* $x \mapsto x^4$ *s'annule en* 0 *et la fonction* $\sqrt{\ }$ *n'est pas dérivable en* 0 *et pourtant la fonction* $x \mapsto \sqrt{x^4} = x^2$ *est dérivable en* 0*. L'erreur sous-jacente est contenue dans la phrase : si* u *est dérivable et strictement positive sur* I*, alors* $\sqrt{u}$ *est dérivable sur* I*. Cette phrase exacte est une* ***implication*** *et pas une* ***équivalence****.*
D'autre part, dans l'exercice, nous avons pu dire directement que f *était dérivable sur* $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$*, mais*

quand on dit qu'une fonction est dérivable sur $]a,b]$*, on ne dit pas qu'elle n'est pas dérivable en* a*.*

◇ *Nous verrons dans la section sur les logarithmes une manière plus efficace de dériver la fonction proposée : la dérivée logarithmique.*

◇ *On doit remarquer que* $(x+1)$ *est à l'exposant* $\frac{1}{3}$ *dans* $f(x)$ *et à l'exposant* $-\frac{2}{3}$ *dans* $f'(x)$ *et de même que* $(x-1)$ *est à l'exposant* $\frac{4}{3}$ *dans* $f(x)$ *et à l'exposant* $\frac{1}{3}$ *dans* $f'(x)$*. Dans les deux cas, les exposants ont perdu une unité.*

Remarquons maintenant que les fonctions « cube » et « racine cubique » sont bien plus simples à manipuler que les fonctions « carré » et « racine carrée ». Comparons plus précisément les différences de comportement.

L'équation $x^3 = a$ a toujours une et une seule solution réelle, à savoir $\sqrt[3]{a}$ (ou encore la fonction cube est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$), alors que l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution réelle si $a < 0$, une et une seule solution si $a = 0$ à savoir 0 et deux solutions distinctes $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ si $a > 0$.

Fonction cube	Fonction carré
$\forall (a,x) \in \mathbb{R}^2,\ (x^3 = a \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a})$	$\forall (a,x) \in [0,+\infty[^2,\ (x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a})$ $\forall (a,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R},\ (x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a})$
$\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ (A^3 = B^3 \Leftrightarrow A = B)$	$\forall (A,B) \in [0,+\infty[^2,\ (A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = B)$ si $(A,B) \in \mathbb{R}^2,\ (A^2 = B^2 \nRightarrow A = B)$ $\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ (A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = B$ ou $A = -B)$
$\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ (\sqrt[3]{A} = B \Leftrightarrow A = B^3)$	$\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ (\sqrt{A} = B \Leftrightarrow A = B^2$ et $B \geq 0)$

Analysons le dernier résultat :

$$\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ (\sqrt{A} = B \Leftrightarrow A = B^2 \text{ et } B \geq 0).$$

Pour A et B réels donnés, si $\sqrt{A} = B$, alors A **et** B sont nécessairement positifs et en élevant au carré, on obtient $A = B^2$. Réciproquement, si $A = B^2$, alors A est nécessairement positif et $B = \pm\sqrt{A}$. Il faut donc imposer la condition supplémentaire $B \geq 0$ (et non pas la condition $A \geq 0$ qui est assurée par l'égalité $A = B^2$) pour que l'équivalence soit exacte.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : **1)** $\sqrt{2x+21} = 3x - 1$, **2)** $\sqrt[3]{x+7} = x + 1$.

Solution.
1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{2x+21} = 3x - 1 \Leftrightarrow (3x-1)^2 = 2x + 21 \text{ et } 3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 8x - 20 = 0 \text{ et } 3x - 1 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x = 2 \text{ ou } x = -\frac{10}{9}) \text{ et } 3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sqrt[3]{x+7} = x + 1 \Leftrightarrow (x+1)^3 = x + 7 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 4x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

⩥ **Commentaire** . *Dans la résolution de la première équation, nous n'avons pas résolu l'inéquation* $3x - 1 \geq 0$ *(c'est-à-dire nous n'avons pas écrit* $x \geq \frac{1}{3}$*), mais nous avons testé si les deux nombres* 2 *et* $-\frac{10}{9}$ *étaient ou n'étaient pas solutions de cette inéquation.*

De même, puisque la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on peut toujours élever au cube les deux membres d'une inégalité sans changer le sens de cette inégalité ($a \leq b \Leftrightarrow a^3 \leq b^3$), même si certains des réels sont négatifs, ce qui n'est pas du tout le cas avec l'élévation au carré.

Fonction cube	Fonction carré
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a \leq b \Leftrightarrow a^3 \leq b^3)$	$\forall (a,b) \in [0,+\infty[^2,\ (a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2)$ $\forall (a,b) \in]-\infty,0]^2,\ (a \leq b \Leftrightarrow b^2 \leq a^2)$ si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a \leq b \nRightarrow a^2 \leq b^2)$ et $(a^2 \leq b^2 \nRightarrow a \leq b)$.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations : **1)** $\sqrt[3]{1+x^3} \leq 1 + x$, **2)** $\sqrt{1+x^2} \leq 1 + x$.

Solution.
1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par croissance de la fonction $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$, on a

$$\sqrt[3]{1+x^3} \leq 1 + x \Leftrightarrow 1 + x^3 \leq (1+x)^3 \Leftrightarrow 3x^2 + 3x \geq 0 \Leftrightarrow x(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1] \cup [0,+\infty[.$$

Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation proposée est $\mathscr{S} =]-\infty,-1] \cup [0,+\infty[$.
2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x < -1$, x n'est pas solution de l'inéquation proposée. Si $x \geq -1$, par croissance de la fonction $t \mapsto t^2$

sur $[0, +\infty[$ (et puisque $1 + x \geq 0$), on a

$$\sqrt{1+x^2} \leq 1 + x \Leftrightarrow 1 + x^2 \leq (1+x)^2 \Leftrightarrow 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Donc, $\mathscr{S} = [-1, +\infty[\cap [0, +\infty[= [0, +\infty[$.

Pour conclure, signalons que l'on doit énormément se méfier des exposants fractionnaires quand les nombres considérés sont négatifs. Il s'agit d'éviter des paradoxes du genre :

$$-1 = (-1)^{1/3} = (\mathbf{-1})^{\mathbf{2/6}} = ((\mathbf{-1})^{\mathbf{2}})^{\mathbf{1/6}} = 1^{1/6} = 1.$$

$(-1)^{1/3}$ a un sens. C'est la racine cubique de -1 : $\sqrt[3]{-1} = -1$. Mais bizarrement, $(-1)^{2/6}$ n'est pas $((-1)^2)^{1/6}$.

5 Les fonctions circulaires

Les fonctions *sinus*, *cosinus*, *tangente* et *cotangente* sont appellées **fonctions circulaires**, car ce sont les fonctions de la trigonométrie circulaire.

5.1 Les fonctions sinus et cosinus

La fonction *sinus* est la fonction de référence en trigonométrie circulaire. Les propriétés de la fonction *sinus* sont simples, naturelles et faciles à apprendre contrairement à celles de la fonction *cosinus*. Par exemple, $\sin(0) = 0$ (alors que $\cos(0) = 1$) ou bien la fonction *sinus* est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, alors que la fonction cosinus est décroissante. Nous rappelons maintenant dans une proposition, les propriétés de la fonction sinus établies au lycée.

Théorème 8 (propriétés de la fonction sinus).

❶ La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$ et est impaire.

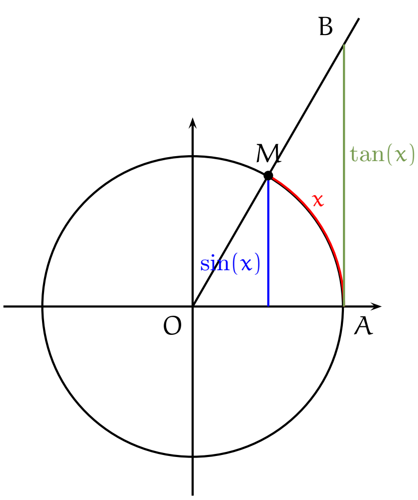
❷ La fonction sinus est 2π-périodique.

❸ La fonction sinus est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $\sin'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

❹ La fonction sinus est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Revenons un instant sur le résultat $\sin' = \cos$ et rappelons-en une démonstration.
Des **considérations géométriques** nous permettent d'établir que

$$\boxed{\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \sin(x) \leq x \leq \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ et donc } \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.}$$



En effet, x est la longueur de l'arc de cercle joignant le point $A(1, 0)$ au point $M(\cos(x), \sin(x))$ et comme le plus court chemin d'un point à un autre est la ligne droite, on a déjà $x \geq AM$. $\sin(x)$ est la distance de M à l'axe des abscisses et donc la plus courte distance de M à un point de l'axe des abscisses. Finalement

$$\sin(x) \leq AM \leq x.$$

D'autre part, si B est le point de coordonnées $(1, \tan(x))$, l'aire du triangle OAB est supérieure ou égale à l'aire du secteur angulaire OAM. Ceci fournit

$$\frac{1 \times \tan(x)}{2} \geq \frac{1 \times x}{2} \text{ et donc } \tan(x) \geq x.$$

L'encadrement ci-dessus et le théorème des gendarmes permettent alors d'affirmer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ est paire, on a aussi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. On obtient ainsi une limite de référence à connaître :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.}$$

Ce dernier résultat s'écrit encore $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = 1$. La fonction sinus est donc dérivable en 0 et $\sin'(0) = 1$. Plus généralement, donnons nous un réel x_0. Pour $x \neq x_0$, on a

$$\frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0} = \frac{2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x-x_0} = \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}.$$

Quand x tend vers x_0, le rapport $\dfrac{\sin((x-x_0)/2)}{(x-x_0)/2}$ tend vers 1 et si on admet que la fonction cosinus est continue en x_0 ce qui est géométriquement évident, $\cos((x+x_0)/2)$ tend vers $\cos(x_0)$. Finalement

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0} = \cos(x_0),$$

ce qui démontre la dérivabilité de la fonction sinus en x_0 et le fait que $\sin'(x_0) = \cos(x_0)$.

$\gtrdot$ **Commentaire**. *Si vous devez un jour montrer que* $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \leq x$ $(*)$, *il serait absurde d'écrire : posons* $f(x) = x - \sin(x), \ldots f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$, f *est croissante sur* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *et donc* $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) \geq 0$. *Vous obtiendriez ainsi l'inégalité* $(*)$ *comme une conséquence de l'égalité* $\sin' = \cos$ *alors qu'elle en est la cause.*

On peut s'y prendre autrement pour étudier la dérivabilité de la fonction sinus en écrivant pour $h \neq 0$:

$$\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0)\cos(h)+\cos(x_0)\sin(h)-\sin(x_0)}{h} = \cos(x_0) \times \frac{\sin(h)}{h} + \sin(x_0)\frac{\cos(h)-1}{h} \ (*).$$

On sait déjà que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$. On a alors

$$\frac{\cos(h)-1}{h} = -\frac{2\sin^2(h/2)}{h} = -\frac{\sin^2(h/2)}{h/2} = -\frac{h}{2}\left(\frac{\sin(h/2)}{h/2}\right)^2.$$

Comme $\dfrac{\sin(h/2)}{h/2}$ tend vers 1 quand h tend vers 0 et que $-\dfrac{h}{2}$ tend vers 0, on en déduit que

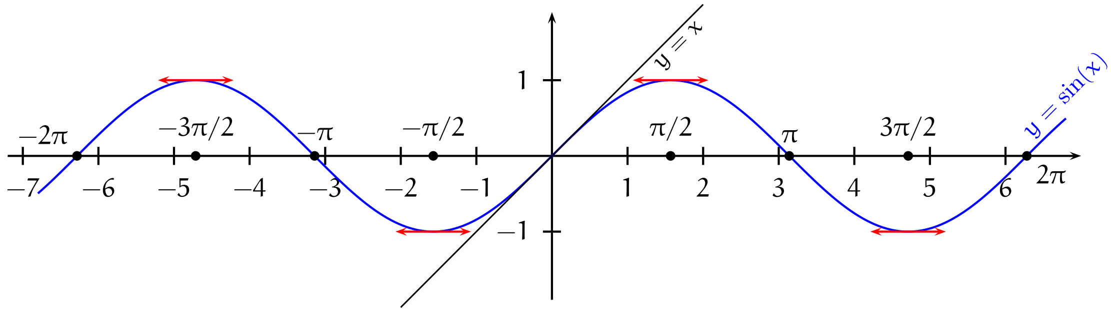
$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0 \ (**).}$$

L'égalité $(*)$ montre alors que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} = \cos(x_0)$. On a ainsi retrouvé la dérivabilité de la fonction sinus et sa dérivée sans utiliser la continuité de la fonction cosinus sur $\mathbb{R}$ mais en utilisant $(**)$ qui montre que la fonction cosinus est dérivable en 0 et que $\cos'(0) = 0$.

Résumons le travail effectué. La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ (et en particulier continue sur $\mathbb{R}$) et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sin'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).}$$

Graphe de la fonction $x \mapsto \sin(x)$**.**



L'étude de la fonction cosinus se déduit de l'étude de la fonction sinus à partir de l'égalité $\cos(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ valable pour tout réel x. Cette égalité signifie que le point d'abscisse x de la courbe représentative de la fonction cosinus a même ordonnée que le point d'abscisse $x + \dfrac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction sinus. Plus précisément, notons $\overrightarrow{u}$ le vecteur de coordonnées $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ puis $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Pour x réel, on a

$$t_{\overrightarrow{u}}(x, \cos(x)) = (x + \frac{\pi}{2}, \cos(x)) = (x + \frac{\pi}{2}, \sin(x + \frac{\pi}{2})) = (x', \sin(x')) \text{ où } x' = x + \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, le translaté de chaque point du graphe de la fonction cosinus est un point du graphe de la fonction sinus ($t_{\overrightarrow{u}}(x, \cos(x)) = (x + \dfrac{\pi}{2}, \sin(x + \dfrac{\pi}{2}))$) et réciproquement tout point du graphe de la fonction sinus est le translaté d'un point du graphe de la fonction cosinus ($t_{\overrightarrow{u}}(x - \dfrac{\pi}{2}, \cos(x - \dfrac{\pi}{2})) = (x, \sin(x))$). Par suite, le graphe de la fonction sinus est le translaté du graphe de la fonction cosinus par la translation de vecteur $(\dfrac{\pi}{2}, 0)$ ou encore

le graphe de la fonction cosinus est l'image du graphe de la fonction sinus par la translation de vecteur $(-\dfrac{\pi}{2}, 0)$.

A partir de l'égalité $\cos(x) = \sin(x + \dfrac{\pi}{2})$, on obtient aussi la dérivabilité et la dérivée de la fonction cosinus. Le théorème de dérivation des fonctions composées montre en effet que la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ (et en particulier continue sur $\mathbb{R}$) et que pour tout réel x,

$$\cos'(x) = 1 \times \sin'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x).$$

Théorème 9 (propriétés de la fonction cosinus).

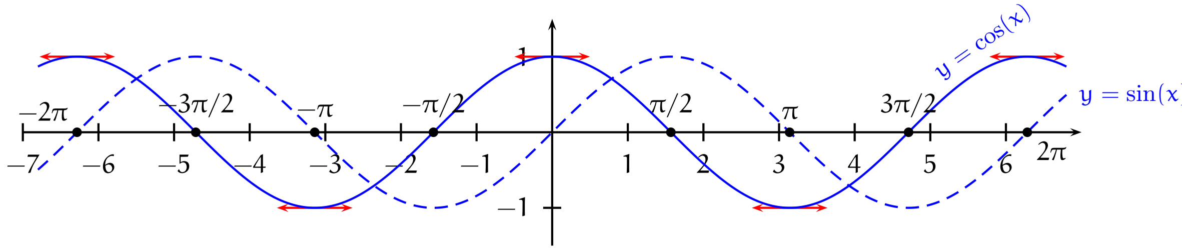
❶ La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$ et est paire.

❷ La fonction cosinus est 2π-périodique.

❸ La fonction cosinus est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $\cos'(x) = -\sin(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

❹ La fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

Graphe de la fonction $x \mapsto \cos(x)$



5.2 La fonction $x \mapsto e^{ix}$

On rappelle que pour tout réel x, $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. La fonction $f : x \mapsto e^{ix}$ est le premier exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Dire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ équivaut à dire que les fonctions « partie réelle de f » et « partie imaginaire de f » sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (voir chapitre « dérivation »). Les parties réelles et imaginaires de f' sont alors les dérivées des parties réelles et imaginaires de f. Ici

$$f'(x) = -\sin(x) + i\cos(x) = i(\cos(x) + i\sin(x)) = ie^{ix} = e^{i\pi/2}e^{ix} = e^{i(x+\frac{\pi}{2})}.$$

Rappelons d'autre part que pour tout réel x, on a $e^{i(x+2\pi)} = e^{ix}$. Cette égalité signifie que la fonction $x \mapsto e^{ix}$ est 2π-périodique.

Théorème 10 (propriétés de la fonction $x \mapsto e^{ix}$).

❶ La fonction $x \mapsto e^{ix}$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

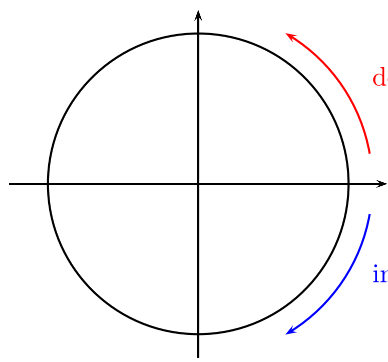
❷ La fonction $x \mapsto e^{ix}$ est 2π-périodique.

❸ La fonction $x \mapsto e^{ix}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $(e^{ix})'(x) = ie^{ix} = e^{i(x+\frac{\pi}{2})}$.

On a obtenu petit à petit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\ \cos'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\ (e^{ix})'(x) = e^{i(x+\frac{\pi}{2})}.$$

Ainsi, dériver les fonctions $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$ ou $x \mapsto e^{ix}$ revient à effectuer un quart de tour direct et inversement fournir une primitive de chacune de ces fonctions revient à effectuer un quart de tour indirect.



5.3 Les fonctions tangente et cotangente

Théorème 11 (propriétés de la fonction tangente).

❶ La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ et impaire.

❷ La fonction tangente est π-périodique.

❸ La fonction tangente est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ et, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$,

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

❹ $\displaystyle\lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ x < \pi/2}} \tan(x) = +\infty$.

❺ La fonction tangente est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

❻ $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$.

Démonstration .
❶ Soit $x \in \mathbb{R}$. $\tan(x)$ existe $\Leftrightarrow \cos(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.
Ensuite, tan est le quotient d'une fonction impaire et d'une fonction paire et donc tan est une fonction impaire.
❷ Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x + \pi \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ et

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x).$$

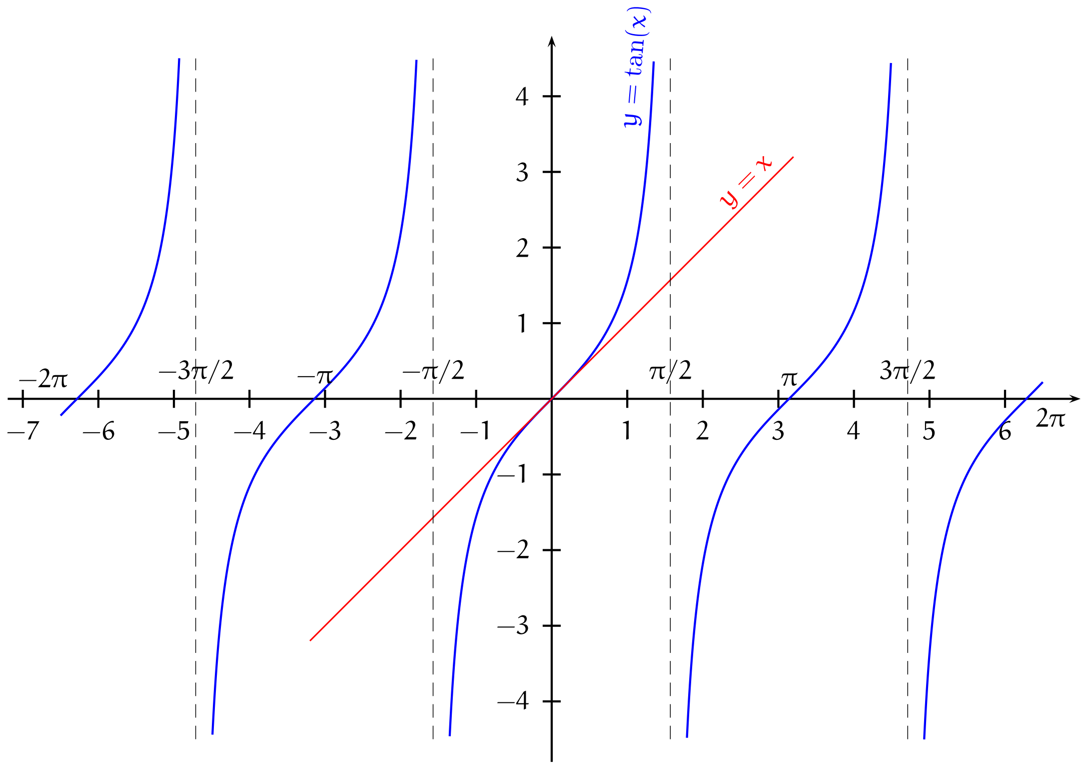
❸ La fonction tan est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, pour $x\in\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$,

$$\tan'(x)=\frac{\sin'(x)\cos(x)-\cos'(x)\sin(x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=\left\{\begin{array}{l}1+\tan^2(x)\\ \text{ou aussi}\\ \dfrac{1}{\cos^2(x)}\end{array}\right..$$

❹ $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}}\sin(x)=\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}}\cos(x)=0^+$. Par suite, $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}}\tan(x)=+\infty$.

❻ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(x)-\tan(0)}{x-0}=\tan'(0)=1+\tan^2(0)=1.$ ❑

Graphe de la fonction $x\mapsto\tan(x)$.



Théorème 12 (propriétés de la fonction cotangente).

❶ La fonction cotangente est définie sur $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ et impaire.

❷ La fonction cotangente est π-périodique.

❸ La fonction cotangente est continue et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ et, pour tout réel $x\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$,

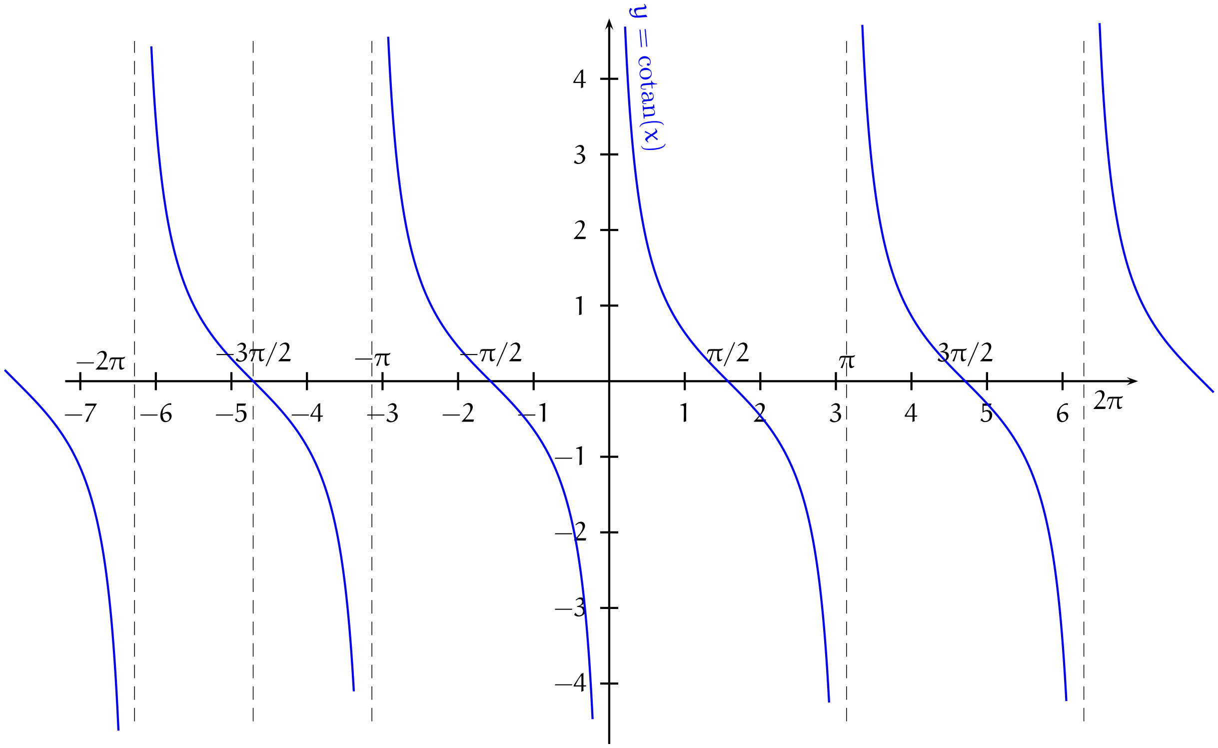
$$\text{cotan}'(x)=-1-\text{cotan}^2(x)=-\frac{1}{\sin^2(x)}.$$

❹ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}}\text{cotan}(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}}\text{cotan}(x)=-\infty$

❺ La fonction cotangente est strictement décroissante sur $]0,\pi[$.

Nous vous laissons le soin de démontrer ce théorème.

Graphe de la fonction $x \mapsto \text{cotan}(x)$**.**



Exercice 4. Etude complète des fonctions : **1)** $f_1 \ : \ x \mapsto \dfrac{2\cos(x)-1}{2\sin(x)-1}$, **2)** $f_2 \ : \ x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{2-\cos(x)}$.

Solution.

1) • Périodicité. Soit x dans $\mathbb{R}$. $x \in D_{f_1} \Leftrightarrow x+2\pi \in D_{f_1}$ et pour $x \in D_{f_1}$, $f_1(x+2\pi) = f_1(x)$. Donc f_1 est 2π-périodique. On étudie dorénavant f_1 sur $[-\pi, \pi]$.

• Domaine de définition. Soit $x \in [-\pi, \pi]$.

$$2\sin(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}.$$

Donc, $D_{f_1} \cap [-\pi, \pi] = [-\pi, \pi] \setminus \{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\}$.

• Etude en $\dfrac{\pi}{6}$**.** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} 2\cos(x) - 1 = \sqrt{3} - 1 > 0$ puis $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{6} \\ x < \frac{\pi}{6}}} 2\sin(x) - 1 = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{6} \\ x > \frac{\pi}{6}}} 2\sin(x) - 1 = 0^+$. Donc,

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{6} \\ x < \frac{\pi}{6}}} f_1(x) = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{6} \\ x > \frac{\pi}{6}}} f_1(x) = +\infty.$$

• Etude en $\dfrac{5\pi}{6}$**.** $\lim\limits_{x \to \frac{5\pi}{6}} 2\cos(x) - 1 = -\sqrt{3} - 1 < 0$ puis $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{5\pi}{6} \\ x < \frac{5\pi}{6}}} 2\sin(x) - 1 = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{5\pi}{6} \\ x > \frac{5\pi}{6}}} 2\sin(x) - 1 = 0^-$. Donc,

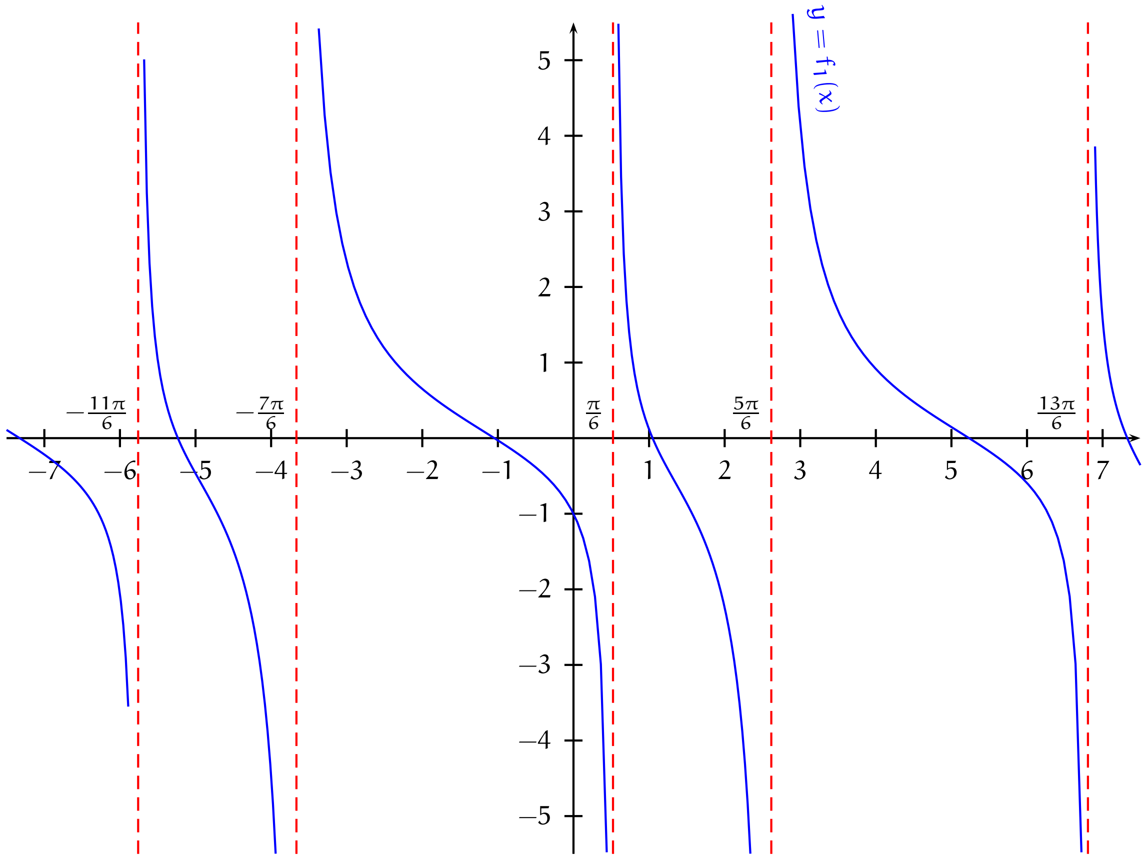
$$\lim_{\substack{x \to \frac{5\pi}{6} \\ x < \frac{5\pi}{6}}} f_1(x) = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \to \frac{5\pi}{6} \\ x > \frac{5\pi}{6}}} f_1(x) = +\infty.$$

• Dérivée. f_1 est dérivable sur $[-\pi, \pi] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[-\pi, \pi] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[-\pi, \pi] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$. De plus, pour $x \in [-\pi, \pi] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$,

$$f_1'(x) = \frac{-2\sin(x)(2\sin(x)-1) - 2\cos(x)(2\cos(x)-1)}{(2\sin(x)-1)^2} = \frac{-4+2\sin(x)+2\cos(x)}{(2\sin(x)-1)^2}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x) - \sqrt{2}\right)}{(2\sin(x)-1)^2} = \frac{2\sqrt{2}\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\right]}{(2\sin(x)-1)^2}.$$

• **Variations.** Pour $x \in [-\pi,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$, on a $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} < 0$ et donc $f_1'(x) < 0$. On en déduit que f_1 est strictement décroissante sur $\left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right[$, sur $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$ et sur $\left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$.

• **Graphe.**



2) • Périodicité, parité. Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \in D_{f_2} \Leftrightarrow x + 2\pi \in D_{f_2}$ et pour $x \in D_{f_2}$,

$$f_2(x+2\pi) = \frac{\sin(x+2\pi)}{2-\cos(x+2\pi)} = \frac{\sin(x)}{2-\cos(x)} = f_2(x).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \in D_{f_2} \Leftrightarrow -x \in D_{f_2}$ et pour $x \in D_{f_2}$,

$$f_2(-x) = \frac{\sin(-x)}{2-\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{2-\cos(x)} = -f_2(x).$$

f_2 est 2π-périodique et impaire. On étudie dorénavant f_2 sur $[0,\pi]$.

• **Domaine de définition.** Soit $x \in [0,\pi]$. On a $2-\cos(x) > 0$ et donc $f_2(x)$ existe. Par suite, $D_{f_2} \cap [0,\pi] = [0,\pi]$.

• **Dérivée.** f_2 est dérivable sur $[0,\pi]$ (et même sur $\mathbb{R}$) en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0,\pi]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,\pi]$ et pour $x \in [0,\pi]$

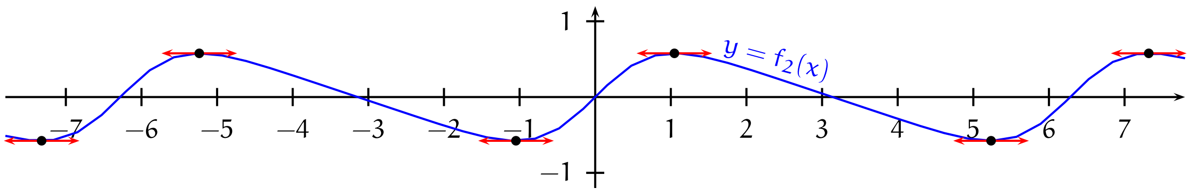
$$f'(x) = \frac{\cos(x)(2-\cos(x)) - \sin(x)(\sin(x))}{(2-\cos(x))^2} = \frac{2\cos(x)-1}{(2-\cos(x))^2}.$$

• **Variations.** Soit $x \in [0,\pi]$.

$$2\cos(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow \cos(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[,$$

et $2\cos(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$. Ainsi, f_2' est strictement positive sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right[$, strictement négative sur $\left]\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ et s'annule en $\frac{\pi}{3}$. f_2 est donc strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.

- **Graphe.**



⋗ Commentaire. *Pour étudier le signe de f_1', on a transformé l'expression $\cos(x) + \sin(x)$ en $\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$ comme nous avons appris à le faire de manière générale dans le chapitre « trigonométrie » (transformation de $a\cos(x) + b\sin(x)$). L'idée sous-jacente est toujours la même : on veut que la variable x n'apparaisse qu'une seule fois.*

6 Les fonctions circulaires réciproques

Au collège, on a su rapidement fournir un réel positif x tel que $x^2 = 4$ ou $x^2 = 9$ mais il a fallu attendre le symbole $\sqrt{\ }$ pour fournir une écriture de l'unique réel positif x tel que $x^2 = 2$ à savoir $\sqrt{2}$. Le nombre $\sqrt{2}$ se révéla par la suite quelque peu mystérieux. On sait que le carré de ce nombre vaut 2 mais il faut prendre la machine pour en obtenir quelques décimales. Néanmoins, on sait que ce nombre existe puisqu'il est égal à la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1. De même aujourd'hui, on sait résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$: cette équation admet l'unique solution $x = \frac{\pi}{6}$. Mais on ne dispose pas encore de notation permettant de fournir la solution dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de l'équation $\sin(x) = \frac{1}{3}$ et tout ce que l'on peut faire est de donner une valeur approchée de sa solution en degrés ou en radians. On définit aujourd'hui les notations manquantes.

6.1 Les fonction Arcsin et Arccos

6.1.1 La fonction Arcsin

La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Elle réalise donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[-\sin\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}\right] = [-1, 1]$. Donc

Définition 2. La fonction arcsinus, notée Arcsin, est la réciproque de la fonction $\begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$.

A partir des propriétés usuelles de la réciproque d'une bijection, on peut énoncer

Théorème 13.

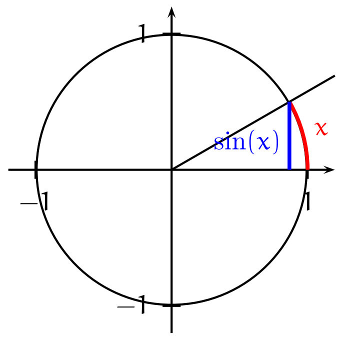
❶ La fonction Arcsin est une bijection de $[-1, 1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

❷ $\forall (x, y) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [-1, 1],\ \sin(x) = y \Leftrightarrow x = \text{Arcsin}(y)$.

❸ $\forall x \in [-1, 1],\ \sin(\text{Arcsin}(x)) = x$ et $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ \text{Arcsin}(\sin(x)) = x$.

L'arcsinus d'un réel élément de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est, comme son nom l'indique, la longueur d'un arc dont on connaît le sinus.

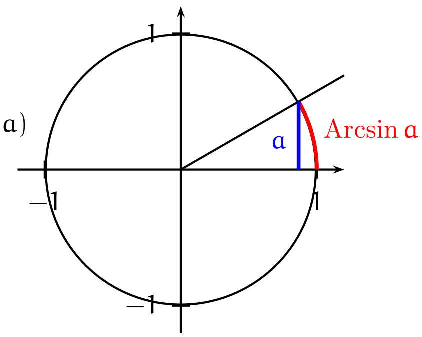
L'arcsinus de $a \in [-1, 1]$ est le réel élément de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut a.



$\forall a \in [-1,1]$,

$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

$\sin(x) = a \Leftrightarrow x = \text{Arcsin}(a)$



Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : **1)** $\sin(x) = \frac{1}{3}$, **2)** $\sin(x) = -\frac{3}{4}$ **3)** $\sin(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Solution.
1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sin(x) = \frac{1}{3} &\Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\text{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right)\right)\\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \pi - \text{Arcsin}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi.\end{aligned}$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sin(x) = -\frac{3}{4} &\Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(-\text{Arcsin}\left(\frac{3}{4}\right)\right)\\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = -\text{Arcsin}\left(\frac{3}{4}\right) + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \pi + \text{Arcsin}\left(\frac{3}{4}\right) + 2k\pi.\end{aligned}$$

3) Soit $a \in \mathbb{R}$.
- Si $|a| > 1$, l'équation $\sin(x) = a$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- Si $a = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\sin(x) = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$.
- Si $a = -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\sin(x) = -1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$.
- Si $a = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\sin(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = k\pi)$.
- Si $a \in]-1,0[\cup]0,1[$, pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\sin(x) = a &\Leftrightarrow \sin(x) = \sin(\text{Arcsin}(a))\\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \text{Arcsin}(a) + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \pi - \text{Arcsin}(a) + 2k\pi.\end{aligned}$$

➢ **Commentaire** . *Quand* $a \in]-1,1[$, $\theta = \text{Arcsin}(a)$ *est* ***la*** *solution de l'équation* $\sin(x) = a$ *qui appartient à* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Poursuivons l'étude de la fonction arcsinus.

Théorème 14. La fonction Arcsin est impaire.

Démonstration . Soient $x \in [-1,1]$ puis $y = \text{Arcsin}(x)$. Alors $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $x = \sin(y)$. Comme $-x \in [-1,1]$ et que la fonction sinus est impaire, on a

$$\text{Arcsin}(-x) = \text{Arcsin}(-\sin(y)) = \text{Arcsin}(\sin(-y)) = -y = -\text{Arcsin}(x).$$

$(\text{Arcsin}(\sin(-y)) = -y$ car $-y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$. ❑

➢ **Commentaire** . *Cette démonstration se généralise à toute bijection impaire : la réciproque d'une bijection impaire est impaire.*

Valeurs usuelles de la fonction arcsinus.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{Arcsin}(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

On fournit maintenant une identité usuelle. Il s'agit de donner le cosinus d'un réel élément de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ quand on en connaît le sinus.

Théorème 15.

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1],\ \cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1 - x^2}.}$$

Démonstration . Soit $x \in [-1, 1]$. On a

$$|\cos(\text{Arcsin}(x)| = \sqrt{\cos^2(\text{Arcsin}(x))} = \sqrt{1 - \sin^2(\text{Arcsin}(x))} = \sqrt{1 - x^2} \quad (*).$$

De plus, $\text{Arcsin}(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et donc $\cos(\text{Arcsin}(x)) \geq 0$. L'égalité $(*)$ permet alors d'affirmer que $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$. ❑

Ensuite, comme la fonction sinus est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on sait que

Théorème 16. La fonction Arcsin est continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$.

Théorème 17.
❶ La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ (\text{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.}$$

❷ La fonction Arcsin n'est pas dérivable en 1 et en -1 mais sa courbe représentative admet aux points d'abscisses 1 et -1 une demi-tangente parallèle à (Oy).
❸ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{Arcsin}\, x}{x} = 1$.

Démonstration . ❶ Pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, posons $f(x) = \sin(x)$. f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et la fonction dérivée $f' = \cos$ ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On en déduit que $f^{-1} = \text{Arcsin}$ est dérivable sur $f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]-1, 1[$ et pour $x \in]-1, 1[$,

$$\text{Arcsin}'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sin'(\text{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

❷ Soit $x \in [-1, 1[$. Posons $y = \text{Arcsin}(x)$ de sorte que $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $x = \sin(y)$.

$$\frac{\text{Arcsin}(x) - \text{Arcsin}(1)}{x - 1} = \frac{y - \frac{\pi}{2}}{\sin(y) - \sin(\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\dfrac{\sin(y) - \sin(\frac{\pi}{2})}{y - \frac{\pi}{2}}}.$$

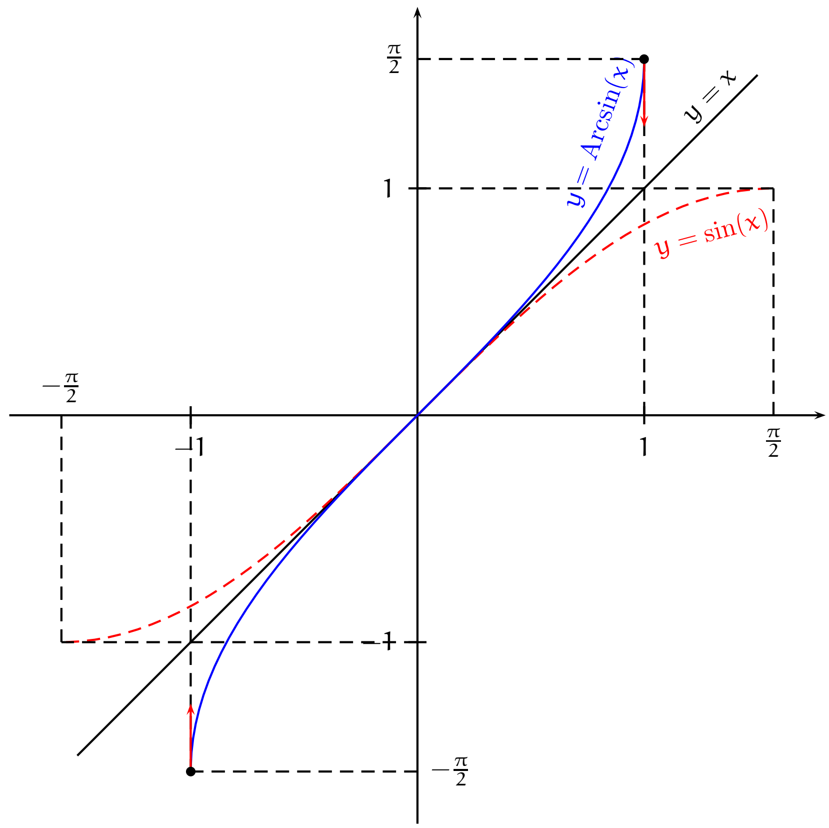
Maintenant, quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, $y = \text{Arcsin}(x)$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures puis $\dfrac{\sin(y) - \sin(\frac{\pi}{2})}{y - \frac{\pi}{2}}$ tend vers $\sin'(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ par valeurs supérieures. Finalement,

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{\text{Arcsin}(x) - \text{Arcsin}(1)}{x - 1} = +\infty.$$

Donc, la fonction Arcsin n'est pas dérivable en 1 mais sa courbe représentative admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente parallèle à (Oy). La fonction Arcsin étant impaire, le résultat est identique en -1.
❸ Pour $x \neq 0$, $\frac{\text{Arcsin}\, x}{x} = \frac{\text{Arcsin}\, x - \text{Arcsin}\, 0}{x - 0}$ et donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{Arcsin}\, x}{x} = (\text{Arcsin})'(0) = \frac{1}{\sqrt{1 - 0^2}} = 1$. ❑

On donne le graphe de la fonction $x \mapsto \text{Arcsin}(x)$ à la page suivante. On rappelle que celui-ci s'obtient à partir du graphe de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ par réflexion d'axe la droite d'équation $y = x$.

Graphe de la fonction Arcsin**.**



6.1.2 La fonction Arccos

La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$. Elle réalise donc une bijection de $[0, \pi]$ sur $[\cos \pi, \cos 0] = [-1, 1]$. Donc

Définition 3. La fonction arccosinus, notée Arccos, est la réciproque de la fonction $\begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$.

Théorème 18.

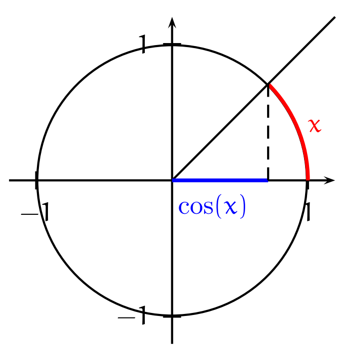
❶ La fonction Arccos est une bijection de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$.

❷ $\forall (x, y) \in [0, \pi] \times [-1, 1],\ \cos(x) = y \Leftrightarrow x = \text{Arccos}(y)$.

❸ $\forall x \in [-1, 1],\ \cos(\text{Arccos}(x)) = x$ et $\forall x \in [0, \pi],\ \text{Arccos}(\cos(x)) = x$.

L'arccosinus d'un réel élément de $[-1, 1]$ est la longueur d'un arc dont on connaît le cosinus. Il y a donc bien deux lettres c consécutives dans le mot arccosinus.

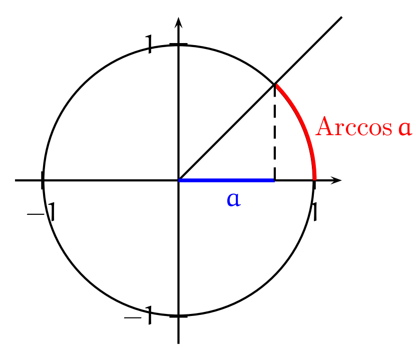
L'arccosinus de $a \in [-1, 1]$ est le réel élément de $[0, \pi]$ dont le cosinus vaut a.



$\forall a \in [-1, 1]$,

$\forall x \in [0, \pi]$,

$\cos(x) = a \Leftrightarrow x = \text{Arccos}(a)$



Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : **1)** $\cos(x) = \frac{2}{3}$, **2)** $\cos(x) = -\frac{1}{4}$ **3)** $\cos(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Solution.
1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cos(x) = \frac{2}{3} &\Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\text{Arccos}\left(\frac{2}{3}\right)\right)\\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \text{Arccos}\left(\frac{2}{3}\right) + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = -\text{Arccos}\left(\frac{2}{3}\right) + 2k\pi.\end{aligned}$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cos(x) = -\frac{1}{4} &\Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\text{Arccos}\left(-\frac{1}{4}\right)\right)\\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \text{Arccos}\left(-\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = -\text{Arccos}\left(-\frac{1}{4}\right) + 2k\pi.\end{aligned}$$

3) Soit $a \in \mathbb{R}$.
• Si $|a| > 1$, l'équation $\cos(x) = a$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
• Si $a = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\cos(x) = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = 2k\pi)$.
• Si $a = -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\cos(x) = -1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \pi + 2k\pi)$.
• Si $a = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi)$.
• Si $a \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\cos(x) = a &\Leftrightarrow \cos(x) = \cos(\text{Arccos}(a)))\\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \text{Arccos}(a) + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = -\text{Arccos}(a) + 2k\pi.\end{aligned}$$

Valeurs usuelles de la fonction arccosinus.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{Arccos}(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Comme semble le suggérer le tableau ci-dessus et le tableau correspondant pour la fonction Arcsin, il existe un lien entre l'arcsinus et l'arccosinus d'un réel élément de $[-1, 1]$.

Théorème 19.

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1],\ \text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}.}$$

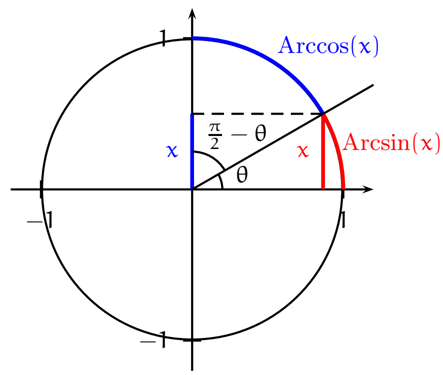
Démonstration. Soient $x \in [-1, 1]$ puis $\theta = \text{Arcsin}(x)$. On a alors $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\sin(\theta) = x$. Par suite,

$$\begin{aligned}\text{Arccos}(x) &= \text{Arccos}(\sin\theta) = \text{Arccos}\left(\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)\right)\\ &= \frac{\pi}{2} - \theta \text{ (car } -\frac{\pi}{2} \leq 0 \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{2} - \theta \leq \pi)\\ &= \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x).\end{aligned}$$

❑

⋗ Commentaire.
◇ *L'application* $\theta \mapsto \frac{\pi}{2} - \theta$ *est la symétrie* $s_{\pi/4}$ *par rapport au réel* $\frac{\pi}{4}$. *Pour écrire l'encadrement* $0 \leq \frac{\pi}{2} - \theta \leq \pi$, *nous n'avons pas pensé deux étapes* $(\ldots \leq -\theta \leq \ldots$ *puis* $\ldots \leq \frac{\pi}{2} - \theta \leq \ldots)$ *mais une seule* $(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow s_{\pi/4}(\frac{\pi}{2}) \leq \theta \leq s_{\pi/4}(-\pi/2))$.

⋄ *La relation* $\text{Arcsin}(x)+\text{Arccos}(x)=\dfrac{\pi}{2}$ *n'est rien d'autre que la relation* $\sin(\theta)=\cos(\dfrac{\pi}{2}-\theta)$. *Elle se visualise sur le dessin suivant*



Pour se convaincre que l'arc coloré en bleu est bien $\text{Arccos}(x)$, *il faut lire différemment le cercle trigonométrique : penchez la tête vers la droite, prenez l'origine des arcs au point* $(0,1)$ *et non plus au point* $(1,0)$ *et parcourez le cercle en sens contraire. Le cosinus de l'arc bleu est alors lisible sur l'axe* (Oy) *et il est bien égal à* x.

⋄ *Une autre démonstration de ce théorème est fournie un peu plus loin.*

On peut donner le sinus d'un réel élément de $[0,\pi]$ quand on en connaît le cosinus.

Théorème 20.

$$\boxed{\forall x\in[-1,1],\ \sin(\text{Arccos}(x))=\sqrt{1-x^2}.}$$

Démonstration . Soit $x\in[-1,1]$. On a

$$|\sin(\text{Arccos}(x)|=\sqrt{\sin^2(\text{Arccos}(x))}=\sqrt{1-\cos^2(\text{Arccos}(x))}=\sqrt{1-x^2}\quad(*).$$

De plus, $\text{Arccos}(x)\in[0,\pi]$ et donc $\sin(\text{Arccos}(x))\geq 0$. L'égalité $(*)$ permet alors d'affirmer que $\sin(\text{Arccos}(x))=\sqrt{1-x^2}$. ❏

Ensuite, comme la fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$, on sait que

Théorème 21. La fonction Arccos est continue et strictement décroissante sur $[-1,1]$.

Théorème 22.
❶ La fonction Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ (\text{Arccos})'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

❷ La fonction Arccos n'est pas dérivable en 1 et en -1 mais sa courbe représentative admet aux points d'abscisses 1 et -1 une demi-tangente parallèle à (Oy).

Démonstration . ❶ La fonction cos est dérivable sur $]0,\pi[$ et sa dérivée $-\sin$ ne s'annule pas sur $]0,\pi[$. On en déduit que la fonction Arccos est dérivable sur $\cos(]0,\pi[)=]-1,1[$ et pour $x\in]-1,1[$,

$$\text{Arccos}'(x)=\frac{1}{\cos'(\text{Arccos}(x))}=\frac{1}{-\sin(\text{Arccos}(x))}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pour ❷, nous vous laissons adapter la démonstration correspondante pour l'arcsinus.

❏

On peut alors donner une nouvelle démonstration du théorème 19 : $\forall x\in[-1,1],\ \text{Arcsin}(x)+\text{Arccos}(x)=\dfrac{\pi}{2}$.
Pour $x\in[-1,1]$, posons $f(x)=\text{Arcsin}(x)+\text{Arccos}(x)$. f est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et pour $x\in]-1,1[$

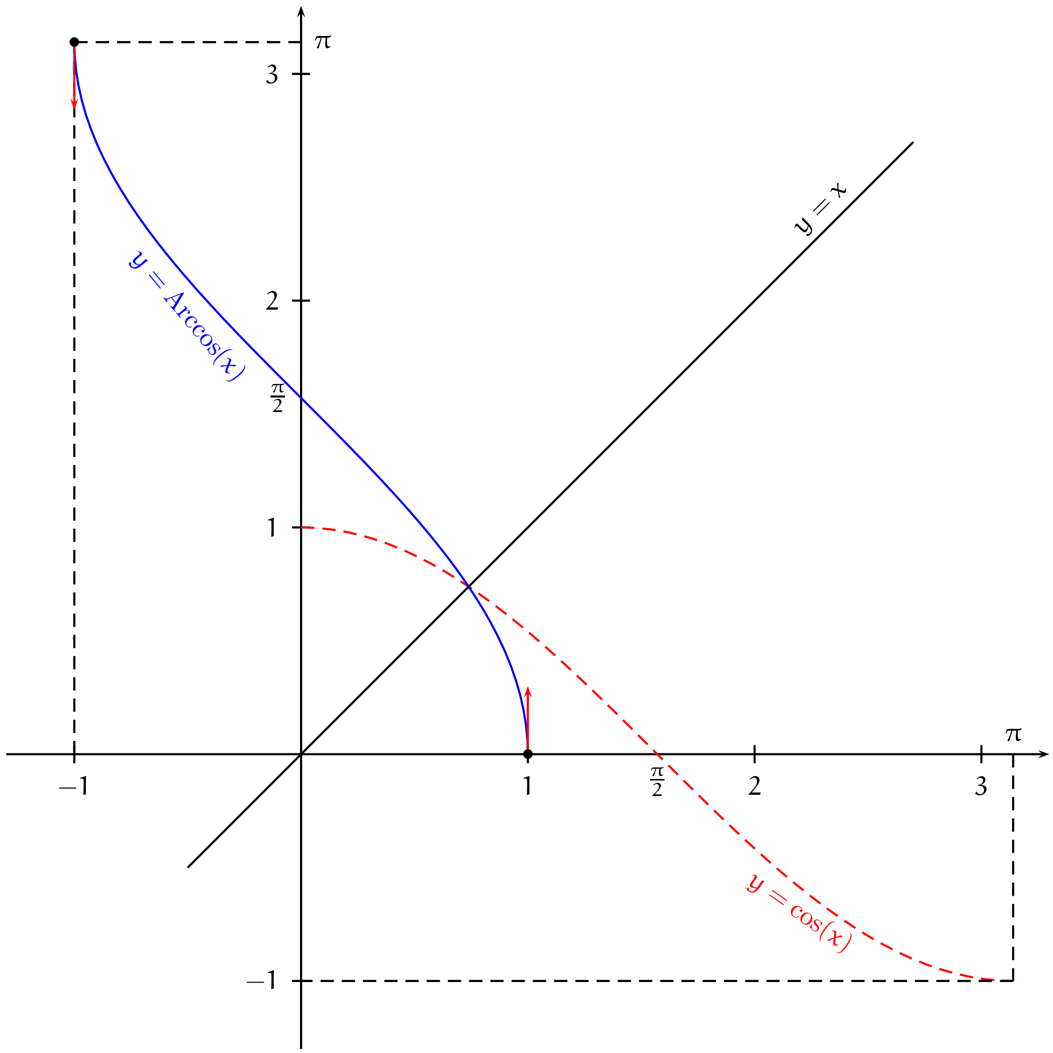
$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0.$$

Par suite, f est constante sur $[-1,1]$ et pour tout réel x de $[-1,1]$, on a

$$f(x)=f(0)=\text{Arcsin}(0)+\text{Arccos}(0)=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

⩾ **Commentaire .** *Dans la démonstration ci-dessus, il faut bien prendre garde à la nature des différents intervalles écrits, tantôt* $[-1,1]$ *et tantôt* $]-1,1[$.

Graphe de la fonction Arccos.



Exercice 7. Donner le domaine de définition puis simplifier :

1) $f_1 : x \mapsto \sin(\text{Arcsin}(x))$, **2)** $f_2 : x \mapsto \cos(\text{Arccos}(x))$
3) $f_3 : x \mapsto \text{Arcsin}(\sin(x))$, **4)** $f_4 : x \mapsto \text{Arccos}(\cos(x))$,
5) $f_5 : x \mapsto \sin(\text{Arccos}(x))$, **6)** $f_6 : x \mapsto \cos(\text{Arcsin}(x))$
7) $f_7 : x \mapsto \text{Arcsin}(\cos(x))$, **8)** $f_8 : x \mapsto \text{Arccos}(\sin(x))$

Solution.

1) et **2)** f_1 et f_2 sont définies sur $[-1, 1]$ et $\forall x \in [-1, 1]$, $f_1(x) = f_2(x) = x$.

3) f_3 est définie sur $\mathbb{R}$. Soit alors $x \in \mathbb{R}$.

• **1 er cas.** S'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, alors $x - 2k\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$\text{Arcsin}(\sin(x)) = \text{Arcsin}(\sin(x - 2k\pi)) = x - 2k\pi.$$

• **2 ème cas.** S'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, alors $x - 2k\pi \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ puis $\pi - (x - 2k\pi) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc

$$\text{Arcsin}(\sin(x)) = \text{Arcsin}(\sin(\pi - (x - 2k\pi))) = -x + \pi + 2k\pi.$$

4) f_4 est définie sur $\mathbb{R}$. Soit alors $x \in \mathbb{R}$.

• **1 er cas.** S'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$, alors $x - 2k\pi \in [0, \pi]$ et

$$\text{Arccos}(\cos(x)) = \text{Arccos}(\cos(x - 2k\pi)) = x - 2k\pi.$$

• **2 ème cas.** S'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$, alors $x - 2k\pi \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ puis $\pi - (x - 2k\pi) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc

$$\text{Arcsin}(\sin(x)) = \text{Arcsin}(\sin(\pi - (x - 2k\pi))) = -x + \pi + 2k\pi.$$

5) et 6) f_5 et f_6 sont définies sur $[-1, 1]$ et on a vu que pour tout réel x de $[-1, 1]$, on a

$$\sin(\text{Arccos}\, x) = \cos(\text{Arcsin}\, x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

7) f_7 est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique. De plus, f_7 est paire et pour $x \in [0, \pi]$,

$$\text{Arcsin}(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arccos}(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x.$$

Par parité, pour $x \in [-\pi, 0]$, $\text{Arcsin}(\cos x) = \text{Arccos}(\cos(-x)) = \frac{\pi}{2} - (-x)$ et donc pour $x \in [-\pi, \pi]$, $\text{Arcsin}(\cos x) = \frac{\pi}{2} - |x|$. Enfin, pour $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif k tel que $-\pi + 2k\pi \leq x < \pi + 2k\pi$. On a alors $x - 2k\pi \in [-\pi, \pi[$ et donc $f_7(x) = f(x - 2k\pi) = \frac{\pi}{2} - |x - 2k\pi|$.

8) f_8 sont définies sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique. Pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\text{Arccos}(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x,$$

et pour $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, on a $x - \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc

$$\text{Arccos}(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(\sin x) = \frac{\pi}{2} + \text{Arcsin}(\sin(x - \pi)) = \frac{\pi}{2} + (x - \pi) = x - \frac{\pi}{2}.$$

En résumé, pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\text{Arccos}(\sin x) = \left|x - \frac{\pi}{2}\right|$. Enfin, pour $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif k tel que $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ et on a $\text{Arccos}(\sin x) = \left|x - 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right|$.

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\text{Arcsin}(2x) = \text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}(x\sqrt{2})$.

Solution.
1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si x est solution de l'équation proposée, on a nécessairement $2x \in [-1, 1]$, $x \in [-1, 1]$ et $x\sqrt{2} \in [-1, 1]$ ce qui équivaut à $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
Soit donc $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

$$\begin{aligned}
\text{Arcsin}(2x) = \text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}(x\sqrt{2}) &\Rightarrow \sin(\text{Arcsin}(2x)) = \sin(\text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}(x\sqrt{2})) \quad (*)\\
&\Leftrightarrow 2x = \sin(\text{Arcsin}(x))\cos(\text{Arcsin}(x\sqrt{2})) + \cos(\text{Arcsin}(x))\sin(\text{Arcsin}(x\sqrt{2}))\\
&\Leftrightarrow 2x = x\sqrt{1 - 2x^2} + x\sqrt{2}\sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2 = \sqrt{1 - 2x^2} + \sqrt{2 - 2x^2}.
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 - 2x^2} + \sqrt{2 - 2x^2} = 2 &\Leftrightarrow (1 - 2x^2) + 2\sqrt{(1 - 2x^2)(2 - 2x^2)} + (2 - 2x^2) = 4\\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{(1 - 2x^2)(2 - 2x^2)} = 1 + 4x^2 \Leftrightarrow 4(1 - 2x^2)(2 - 2x^2) = (1 + 4x^2)^2\\
&\Leftrightarrow 32x^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{7}{32}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{7}{32}}.
\end{aligned}$$

Réciproquement, les nombres 0, $\sqrt{\frac{7}{32}} = \frac{\sqrt{14}}{8}$ et $-\frac{\sqrt{14}}{8}$ sont éléments de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Il reste alors à se demander si la seule implication écrite $(*)$ est une équivalence.
Pour $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, on a $\text{Arcsin}(2x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. D'autre part, puisque $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, on a $\text{Arcsin}\, x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ et de même $x\sqrt{2} \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et donc $\text{Arcsin}(x\sqrt{2}) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. On en déduit

que $\text{Arcsin}\, x + \text{Arcsin}(x\sqrt{2}) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

En résumé, pour $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $\text{Arcsin}(2x)$ et $\text{Arcsin}\, x + \text{Arcsin}(x\sqrt{2})$ sont deux réels éléments de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Par suite, si ces deux réels ont même sinus, ils sont égaux ce qui montre que $(*)$ est une équivalence. Finalement,

$$\mathscr{S} = \left\{0, \sqrt{\frac{7}{32}}, -\sqrt{\frac{7}{32}}\right\}.$$

6.2 La fonction Arctan

La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Elle réalise donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\left]\tan\left(-\frac{\pi^+}{2}\right), \tan\left(\frac{\pi^-}{2}\right)\right[=]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$. Donc

Définition 4. La fonction arctangente, notée Arctan, est la réciproque de la fonction $\begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$.

Théorème 23.

❶ La fonction Arctan est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

❷ $\forall (x, y) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R},\ \tan(x) = y \Leftrightarrow x = \text{Arctan}(y)$.

❸ $\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\text{Arctan}(x)) = x$ et $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \text{Arctan}(\tan(x)) = x$.

L'arctangente d'un réel élément de $[0, +\infty[$ est la longueur d'un arc dont on connaît la tangente.

L'arctangente du réel a est le réel élément de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut a.

Théorème 24. La fonction Arctan est impaire.

La démonstration de ce théorème est identique à la démonstration du théorème 14 page 21.

Valeurs usuelles de la fonction arctangente.

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\text{Arctan}(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Théorème 25. La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ (\text{Arctan})'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.}$$

Démonstration. Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, posons $f(x) = \tan x$. f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = 1 + \tan^2 x$. Comme f' ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que la fonction $\text{Arctan} = f^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x,

$$\text{Arctan}'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\text{Arctan}\, x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

❏

Théorème 26. La fonction Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim_{x \to +\infty} \text{Arctan}\, x = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \to -\infty} \text{Arctan}\, x = -\frac{\pi}{2}$.

Théorème 27.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Arctan} x}{x}=1.}$$

Démonstration . $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Arctan} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Arctan} x-\operatorname{Arctan} 0}{x-0}=\operatorname{Arctan}'(0)=\frac{1}{1+0^2}=1.$ ❑

Théorème 28.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\text{ si } x>0\\ -\frac{\pi}{2}\text{ si } x<0\end{cases}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x),\text{ où }\operatorname{sgn}(x)\text{ désigne le signe du réel non nul }x.}$$

Démonstration .
1ère démonstration. Soient $x\in]0,+\infty[$ puis $\theta=\operatorname{Arctan} x$. Alors $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $x=\tan(\theta)$. On a

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\tan\theta}\right)=\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right).$$

Maintenant, $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\frac{\pi}{2}-\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. On en déduit que $\operatorname{Arctan}\left(\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)\right)=\frac{\pi}{2}-\theta$ et finalement que $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan} x$.
Soit maintenant $x\in]-\infty,0[$.

$$\operatorname{Arctan} x+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=-\left(\operatorname{Arctan}(-x)+\operatorname{Arctan}\left(-\frac{1}{x}\right)\right)=-\frac{\pi}{2}.$$

2ème démonstration. Pour $x\in\mathbb{R}^*$, posons $f(x)=\operatorname{Arctan} x+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$. f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et impaire. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel non nul x,

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\left(-\frac{1}{x^2}\right)\times\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0.$$

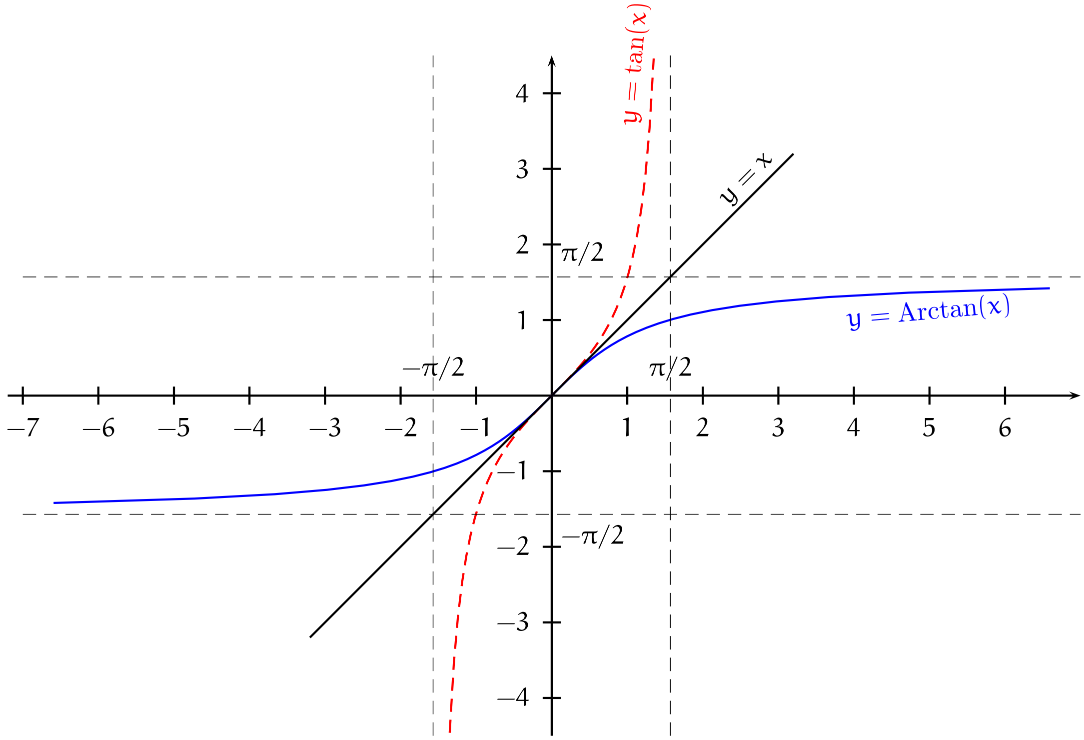
f est donc constante sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$, $f(x)=f(1)=2\operatorname{Arctan}(1)=\frac{\pi}{2}$ puis, f étant impaire, pour $x<0$, $f(x)=-\frac{\pi}{2}$. ❑

⊳ Commentaire .

◇ *Dans la deuxième démonstration, la dérivée de* f *est nulle sur* $\mathbb{R}^*$ *et pourtant la fonction* f *n'est pas constante sur* $\mathbb{R}^*$*. Le théorème « si la dérivée de* f *est nulle, alors* f *est constante » est faux. Le théorème exact est « Soit* f *une fonction dérivable sur un* ***intervalle*** I*. Si la dérivée de* f *est nulle sur* I*,* f *est constante sur* I *».*
De même, le théorème « si la dérivée de f *est négative,* f *est décroissante » est faux. Le théorème exact est « Soit* f *une fonction dérivable sur un* ***intervalle*** I*. Si la dérivée de* f *est négative sur* I*,* f *est décroissante sur* I *». Par exemple, la fonction* $f\ :\ x\mapsto\frac{1}{x}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *et sa dérivée* $f'\ :\ x\mapsto-\frac{1}{x^2}$ *est négative sur* $\mathbb{R}^*$*. Pourtant,* f *n'est pas décroissante sur* $\mathbb{R}^*$ *car par exemple* $f(-1)=-1<1=f(1)$ *mais bien sûr,* f *est décroissante sur* $]-\infty,0[$ *et aussi sur* $]0,+\infty[$*.*
On doit encore noter que les phrases « f *est constante (resp. décroissante) sur* $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ *» et «* f *est constante (resp. décroissante) sur* $]-\infty,0[$ *et sur* $]0,+\infty[$ *» ne sont pas les mêmes phrases.*

◇ *Pour dériver* $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$*, on utilise* $(g\circ f)'=f'\times g'\circ f$*. Cela donne* $\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=\left(\frac{1}{x}\right)'\times\operatorname{Arctan}'\left(\frac{1}{x}\right)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\times\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$.

Graphe de la fonction Arctan**.**



Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\tan x = 2$.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\tan x = 2 \Leftrightarrow \tan x = \tan(\text{Arctan}\, 2) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \text{Arctan}\, 2 + k\pi$.

$$\boxed{\mathscr{S} = \text{Arctan}\, 2 + \pi\mathbb{Z}.}$$

⩾ **Commentaire** . Arctan 2 *est le réel élément de* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *dont la tangente vaut* 2 *ou encore la solution dans* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *de l'équation* $\tan x = 2$. *Mais il y a d'autres solutions.*

Exercice 10. Ensemble de définition et expression simplifiée de $\tan(\text{Arctan}\, x)$ et $\text{Arctan}(\tan x)$.

Solution. On sait d'après le cours que $\tan(\text{Arctan}\, x)$ existe pour tout réel x et vaut x.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\text{Arctan}\, x) = x.}$$

L'expression $\text{Arctan}(\tan x)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$. Mais alors $x - k\pi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc

$$\text{Arctan}(\tan x) = \text{Arctan}(\tan(x - k\pi)) = x - k\pi.$$

⩾ **Commentaire** . $\text{Arctan}(\tan x)$ *ne vaut* x *que si* $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. *De manière générale,* $\theta = \text{Arctan}(\tan x)$ *est le réel élément de* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *qui a même tangente que le réel* x.

Exercice 11. Calculer $\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)$.

Solution. $0 \leq \frac{1}{2} < 1$ et donc $0 \leq \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) < \text{Arctan}\, 1 = \frac{\pi}{4}$. De même, $0 \leq \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{\pi}{4}$. On en déduit que $0 \leq \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{\pi}{2}$. Par suite on peut calculer la tangente de $\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$ et on obtient

$$\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)=\frac{\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)}{1-\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}}=\frac{7}{9}.$$

En résumé, $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)=\frac{7}{9}$. On en déduit que $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{7}{9}\right)$.

De même, $\operatorname{Arctan}\left(\frac{7}{9}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et

$$\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{7}{9}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)\right)=\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\times\frac{1}{8}}=\frac{56+9}{72-7}=1,$$

et donc $\operatorname{Arctan}\left(\frac{7}{9}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)=\operatorname{Arctan}1=\frac{\pi}{4}$.

$$\boxed{\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{\pi}{4}.}$$

Exercice 12. Ensemble de définition et valeurs de $\cos(\operatorname{Arctan}x)$ et $\sin(\operatorname{Arctan}x)$.

Solution. Soit $x\in\mathbb{R}$. $\operatorname{Arctan}x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et on peut écrire

$$\cos^2(\operatorname{Arctan}x)=\frac{1}{1+\tan^2(\operatorname{Arctan}x)}=\frac{1}{1+x^2}.$$

De plus, puisque $\operatorname{Arctan}x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos(\operatorname{Arctan}x)>0$ et donc $\cos(\operatorname{Arctan}x)=+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. D'autre part,

$$\sin(\operatorname{Arctan}x)=\tan(\operatorname{Arctan}x)\times\cos(\operatorname{Arctan}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(\operatorname{Arctan}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\text{ et }\sin(\operatorname{Arctan}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.}$$

➢ **Commentaire**. *Calculer* $\cos(\operatorname{Arctan}x)$ *consiste à calculer le cosinus d'un nombre quand on en connaît sa tangente. On cherche donc une formule de trigonométrie donnant le but, le cosinus en fonction de la donnée, la tangente :* $\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}$. *Mais alors, calculer* $\sin(\operatorname{Arctan}x)$ *consiste à calculer le sinus d'un nombre quand on en connaît le cosinus et la tangente et non pas uniquement le cosinus. La solution proposée est bien meilleure qu'un démarrage du genre* $\sin^2(\operatorname{Arctan}x)=1-\cos^2(\operatorname{Arctan}x)$...

Exercice 13. Soient a et b deux réels tels que $ab\neq 1$. Calculer $\operatorname{Arctan}a+\operatorname{Arctan}b$.

Solution. Soient a et b deux réels tels que $ab\neq 1$. Puisque $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Arctan}a<\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Arctan}b<\frac{\pi}{2}$, on a

$$-\pi<\operatorname{Arctan}a+\operatorname{Arctan}b<\pi.$$

Vérifions tout d'abord que $\operatorname{Arctan}a+\operatorname{Arctan}b\notin\left\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\}$. D'après l'exercice n° 12, on a

$$\cos(\operatorname{Arctan}a+\arctan b)=\cos(\operatorname{Arctan}a)\cos(\operatorname{Arctan}b)-\sin(\operatorname{Arctan}a)\sin(\operatorname{Arctan}b)=\frac{1-ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}\ (*).$$

Par suite, $\cos(\operatorname{Arctan} a + \arctan b) \neq 0$ et $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b \notin \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$. On peut alors calculer la tangente de $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b$.

$$\tan(\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b) = \frac{\tan(\operatorname{Arctan} a) + \tan(\operatorname{Arctan} b)}{1 - \tan(\operatorname{Arctan} a)\tan(\operatorname{Arctan} b)} = \frac{a+b}{1-ab}\ (**).$$

En résumé, $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b \in]-\pi, \pi[\setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$ et $\tan(\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b) = \frac{a+b}{1-ab}$.

1er cas. Si $ab < 1$, d'après $(*)$, on a $\cos(\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b) > 0$ et puisque $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b \in]-\pi, \pi[\setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$, on a plus précisément $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On déduit alors de $(**)$ que $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.

2ème cas. Si $ab > 1$, d'après $(*)$, on a $\cos(\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b) < 0$ et donc $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.
Plus précisément,

- si $a < 0$ et donc $b < 0$ puisque $ab > 1$, on a $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b < 0$ et donc $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$.
  Dans ce cas, $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b + \pi$ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et a même tangente que $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b$ à savoir $\frac{a+b}{1-ab}$.
  On en déduit que $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b + \pi = \operatorname{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$ et donc $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) - \pi$.
- si $a > 0$, on a $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b > 0$ et donc $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.
  Dans ce cas, $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + \pi$.

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ ab \neq 1 \Rightarrow \operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b = \begin{cases} \operatorname{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) \text{ si } ab < 1 \\ \operatorname{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + \pi \text{ si } ab > 1 \text{ et } a > 0 \\ \operatorname{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) - \pi \text{ si } ab > 1 \text{ et } a < 0 \end{cases}.}$$

➢ **Commentaire** . *Le cas où $ab = 1$ est le théorème 28, page 29 :* $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} \frac{1}{a} = \frac{\pi}{2} sgn(a)$.

Exercice 14. Simplifier le plus possible $\operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ après avoir précisé les valeurs de x pour lesquelles cette expression existe. Trouver une solution utilisant la trigonométrie et une solution où l'on commence par dériver.

Solution. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$. Pour $x \in \mathbb{R}$

$$x \in D_f \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1.$$

Or, pour tout réel x, on a

$$-1 = \frac{-1-x^2}{1+x^2} \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1.$$

Donc, f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, f est paire.

1ère solution. Soient $x \in \mathbb{R}^+$ puis $\theta = 2\operatorname{Arctan} x$. Alors $\theta \in [0, \pi[$ et $x = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ puis

$$\begin{aligned}\operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) &= \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right) = \operatorname{Arccos}(\cos\theta) \\ &= \theta \text{ (car } \theta \in [0, \pi[) \\ &= 2\operatorname{Arctan} x.\end{aligned}$$

Par parité, pour tout réel x, $\text{Arccos}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\,\text{Arctan}\,|x|$.

En effet, si $x \in [-1, 0]$, $f(x) = f(-x) = 2\,\text{Arctan}(-x) = 2\,\text{Arctan}\,|x|$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Arccos}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\,\text{Arctan}\,|x|.}$$

2ème solution. On sait déjà que pour tout réel x, $-1 \leq \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$. Plus précisément, $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} > \dfrac{-1-x^2}{1+x^2} = -1$ et d'autre part, $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = 1 \Leftrightarrow 1-x^2 = 1+x^2 \Leftrightarrow x = 0$. Ainsi, pour tout réel x de $]-1, 0[\cup]0, 1[$, on a $-1 < \dfrac{1-x^2}{1+x^2} < 1$. f est donc dérivable sur $]0, 1]$ (on rappelle que f est paire) et pour $x \in]0, 1]$

$$f'(x) = \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \times -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{4x}{(1+x^2)\sqrt{4x^2}} = \frac{2}{1+x^2} = (2\,\text{Arctan})'(x).$$

On en déduit qu'il existe un réel C tel que $\forall x \in]0, 1]$, $f(x) = 2\,\text{Arctan}\,x + C$. Quand x tend vers 0, on obtient $\text{Arccos}\,1 = 0 + C$ et donc $C = 0$. Donc, $\forall x \in]0, 1[$, $f(x) = 2\,\text{Arctan}\,x$. Par continuité en 0 puis parité, on réobtient : $\forall x \in [-1, 1]$, $f(x) = 2\,\text{Arctan}\,|x|$.

➢ **Commentaire**. *Ainsi, pour* $x \geq 0$, *on a* $\text{Arctan}\,x = \dfrac{1}{2}\text{Arccos}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ *voire* $\text{Arctan}\,x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)$. *Ce genre d'identité exprimant* Arctan *en fonction de* Arcsin *peut par exemple servir à quelqu'un qui utilise un logiciel de calcul formel pas très performant ne possédant que la fonction* Arcsin *et pas la fonction* Arctan.

7 Les fonctions logarithmes et exponentielles

7.1 Un peu d'histoire

Nous ne ferons qu'esquisser ici l'invention des logarithmes autour de l'année 1600, mais nous vous engageons fortement à aller lire des livres d'histoire des mathématiques sur le sujet. Leur découverte fut une vraie révolution. Pour témoin, citons cet écrit de Kepler en 1624 : « ... *Je résous la question par le bienfait des logarithmes, je ne pense pas que quelque chose soit supérieur à la théorie de* Neper... ».

C'est en effet, John Neper (ou Napier, baron de Merchiston) (1550-1617) qui a inventé le mot logarithme du grec *logos* « rapport » et *arithmos* « nombre » (les logarithmes ne sont au début, que des nombres entiers ou fractionnaires). Son ami Henry Briggs (1561-1630) et lui, créent en 1615 les logarithmes décimaux et en publient une table. En schématisant beaucoup, ils se sont demandé comment compléter le tableau suivant (la deuxième ligne contient les logarithmes décimaux des nombres de la première)

10^0	10^1	$47 = 10^?$	10^2	10^3	$1203 = 10^?$	10^4	10^5
0	1	?	2	3	?	4	5

de manière à ce que persiste la règle $10^n \times 10^p = 10^{n+p}$ (ces règles sur les exposants entiers étant quant à elles connues depuis longtemps : Archimède avait déjà « conscience » que pour **multiplier** deux éléments d'une suite géométrique, il suffisait d'**additionner** les exposants). Ils systématisent ainsi une idée qui avait déjà plus ou moins surgi avant eux, celle de « rendre continues » les deux suites en acceptant des exposants non entiers.

Le premier ouvrage de Neper, intitulé *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, date de 1614. On y découvre des tables de logarithmes de sinus d'angles, le but initial de Neper étant de simplifier un certain nombre de calculs trigonométriques envisagés en astronomie, en optique...

Ce qu'il y a de remarquable, c'est qu'à l'époque, le calcul infinitésimal (dérivée, tangente à une courbe, équations différentielles, intégrales, ...) ainsi que la notion de fonction elle-même, n'existent pas encore, même si nombre de scientifiques du moment, comme par exemple Kepler ou Descartes, essaient de résoudre des problèmes contenant en germes ces notions. Neper ne s'est donc absolument pas demandé quelle était la fonction dont la dérivée valait $1/x$.

Son invention (les logarithmes) est certainement une des bases de la découverte du calcul différentiel des années plus tard (Leibniz, Newton,...) et l'a donc précédée. Il faudra attendre encore avant de parler de **fonction logarithme**, de dériver cette fonction pour trouver $\dfrac{1}{x}$ (ou plus généralement $\dfrac{a}{x}$) ou de savoir calculer l'aire sous une hyperbole (d'équation $y = \dfrac{a}{x}$).

7.2 La fonction logarithme népérien

7.2.1 Exercices d'introduction

Exercice 15. Déterminer les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ transformant les produits en sommes.

Solution. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x) + f(y).$$

En particulier, pour x réel quelconque et $y = 0$, on obtient $f(x) + f(0) = f(0)$ et donc $f(x) = 0$. Ainsi, si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ transformant les produits en sommes, f est nécessairement la fonction nulle. Réciproquement, la fonction nulle convient clairement.

Il existe une et une seule fonction réelle, définie sur $\mathbb{R}$, transformant les produits en sommes à savoir la fonction nulle.

Donc, si l'on cherche une fonction non triviale, définie sur un intervalle, transformant les produits en sommes, il faut se placer sur un intervalle ne contenant pas 0, intervalle que l'on choisira le plus simple et le plus grand possible.

Exercice 16. Soit f une fonction définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ transformant les produits en sommes. Déterminer $f(1)$ et la dérivée de f.

Solution. Soit f une fonction définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ f(xy) = f(x) + f(y).$$

Pour $x = y = 1$, on obtient en particulier $2f(1) = f(1)$ et donc $f(1) = 0$.
Soit alors x un réel strictement positif fixé. Par hypothèse, les fonctions $y \mapsto f(xy)$ et $y \mapsto f(x) + f(y)$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$ et en dérivant, on obtient :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ xf'(xy) = f'(y).$$

Pour $y = 1$ et $x \in]0,+\infty[$ donné, on obtient en notant a le réel $f'(1)$:

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \frac{a}{x}.$$

Si f est une fonction définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ transformant les produits en sommes, $f(1) = 0$ et il existe un réel a tel que : $\forall x \in]0+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{a}{x}$.

Nous allons maintenant nous intéresser plus particulièrement à la fonction f définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ telle que **1)** $f(1) = 0$, **2)** $\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{1}{x}$, ou encore à la primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

7.2.2 Définition de la fonction ln

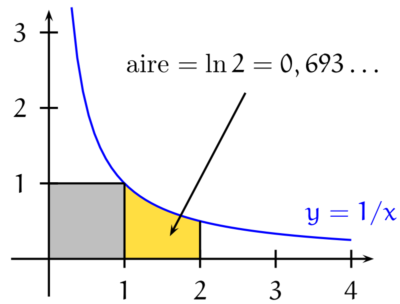
Nous verrons dans le chapitre « Intégration sur un segment » que, si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors, pour tout choix d'un élément x_0 de I, il existe une et une seule primitive de f sur I s'annulant en x_0. On peut donc poser la définition suivante :

Défnition 5. La fonction logarithme népérien, notée ln, est la primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, qui s'annule en 1.

Ainsi,

$D_{\ln} =]0,+\infty[$, $\ln(1) = 0$,
$\ln$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[,\ (\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall x \in]0,+\infty[,\ \ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.

Le logarithme népérien de 2 (à savoir $0,693...$) est donc l'aire du domaine $D = \left\{(x,y) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R} / \ 1 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq \dfrac{1}{x}\right\}$, exprimée en unités d'aire et on peut en calculer des valeurs approchées par exemple en appliquant la méthode des rectangles à $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt$ (ce que nous ferons dans le chapitre « Approximations »).



Plus généralement, si $X \in [1,+\infty[$, $\ln(X)$ est l'aire du domaine $D = \{(x,y) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R} / \ 1 \leq x \leq X \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$, exprimée en unités d'aire. Pour mémoire, citons quelques valeurs approchées usuelles de la fonction logarithme népérien, elles sont à connaître.

$$\boxed{\ln 1 = 0 \quad \ln 2 = 0,693\ldots \quad \ln 3 = 1,09\ldots \quad \ln 5 = 1,6\ldots \quad \ln 10 = 2,3\ldots \quad \ln(0,5) = -0,693.}$$

7.2.3 Propriétés algèbriques de ln

Théorème 29.

$$\boxed{\forall (x,y) \in (]0,+\infty[)^2,\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).}$$

⋗ **Commentaire**. *Nous verrons plus loin que la fonction* ln *réalise une bijection de* $]0,+\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$. *Le résultat précédent permet alors d'affirmer que* ln *est un* ***isomorphisme*** *du groupe* $(]0,+\infty[,\times)$ *sur le groupe* $(\mathbb{R},+)$.

Démonstration. Soit $a \in]0,+\infty[$ fixé. Pour $x \in]0,+\infty[$, posons $f(x) = \ln(ax) - \ln(x) - \ln(a)$. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{a}{ax} - \dfrac{1}{x} = 0$. f est donc constante sur $]0,+\infty[$. Par suite, pour $x \in]0,+\infty[$, $f(x) = f(1) = \ln(a) - \ln(a) - \ln(1) = 0$. On a montré que :

$$\forall (a,x) \in (]0,+\infty[)^2,\ \ln(ax) = \ln(a) + \ln(x).$$

❑

Corollaire.

❶ $\forall x \in]0,+\infty[,\ \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$,

❷ $\forall (x,y) \in (]0,+\infty[)^2,\ \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$,

❸ $\forall r \in \mathbb{Q},\ \ln(x^r) = r\ln(x)$.

Démonstration.

❶ Soit $x \in]0,+\infty[$. Puisque $\ln(x) + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln\left(x \times \dfrac{1}{x}\right) = \ln(1) = 0$, on a bien $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

❷ Soit $(x,y) \in (]0,+\infty[)^2$. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \dfrac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

❸ Soient $x \in]0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{Z}$.
Si $n > 0$ $\ln(x^n) = \ln(x \times x \times ... \times x) = \ln(x) + \ln(x) + ... + \ln(x) = n\ln(x)$ (une récurrence serait le plus propre).
Si $n = 0$, $\ln(x^n) = \ln(1) = 0 = 0 \times \ln(x)$.
Si $n < 0$, $\ln(x^n) = \ln((x^{-n})^{-1}) = -\ln(x^{-n}) = -(-n)\ln(x) = n\ln(x)$. On a ainsi montré que : $\forall n \in \mathbb{Z},\ \ln(x^n) = n\ln(x)$.
Soit ensuite $n \in \mathbb{N}^*$. $n\ln(x^{1/n}) = \ln((x^{1/n})^n) = \ln(x)$. On a ainsi montré que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(x^{1/n}) = \dfrac{1}{n}\ln(x)$.
Soit finalement $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

$$\ln(x^{p/q}) = \ln((x^p)^{1/q}) = \frac{1}{q}\ln(x^p) = \frac{1}{q} \times p\ln(x) = \frac{p}{q}\ln(x).$$

On a montré que : $\forall r \in \mathbb{Q},\ \ln(x^r) = r\ln(x)$.

❑

7.2.4 Etude de la fonction ln

Nous avons regroupé en une seule proposition l'ensemble des propriétés de la fonction ln.

Théorème 30 (propriétés analytiques de la fonction $\ln$).

❶ La fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

❷ $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln(x)=-\infty$.

❸ ln réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

❹ $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ (par suite, le graphe de ln admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox)) et $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x)=0$.

❺ $\lim_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$ ou encore $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$.

Démonstration .

❶ ln est dérivable sur $]0,+\infty[$, à dérivée strictement positive et donc strictement croissante sur cet intervalle.

❷ Puisque la fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, ln a une limite quand x tend vers $+\infty$ qui est soit un réel ℓ, soit $+\infty$. Mais si cette limite était un réel ℓ, l'égalité $\ln(2x)=\ln(2)+\ln(x)$, valable pour tout réel strictement positif x, fournirait par passage à la limite quand x tend vers $+\infty$: $\ell=\ln(2)+\ell$, ce qui est impossible.

D'autre part, quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ et donc $\ln(x)=-\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ tend vers $-\infty$.

❸ Puisque ln est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, ln réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\ln(]0,+\infty[)$ avec $\ln(]0,+\infty[)=]\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\ln(x),\lim_{x\to+\infty}\ln(x)[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$.

❹ Comparons d'abord $2\sqrt{x}$ et $\ln(x)$ (la fonction $x\mapsto 2\sqrt{x}$ a une dérivée plus simple que la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$). Pour cela, posons pour $x>0$, $f(x)=2\sqrt{x}-\ln(x)$. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour $x>0$ donné :

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-1}{x}=\frac{x-1}{x(\sqrt{x}+1)}.$$

Pour $x\geq 1$, on a $f'(x)\geq 0$. Par suite, f est croissante sur $[1,+\infty[$ et pour $x\geq 1$, $f(x)\geq f(1)=2>0$. On a montré que :

$$\forall x\in[1,+\infty[,\ \ln(x)\leq 2\sqrt{x}.$$

Mais alors, pour $x\geq 1$,

$$0\leq\frac{\ln(x)}{x}\leq\frac{2\sqrt{x}}{x}=\frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Quand x tend vers $+\infty$, $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ tend vers 0, et, d'après le « théorème des gendarmes », $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$.

Ensuite, pour $x>0$,

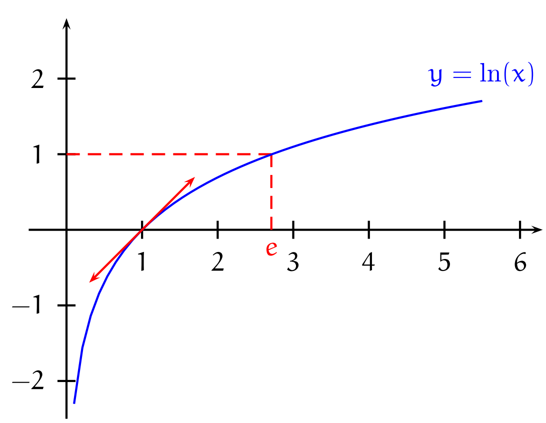
$$x\ln(x)=-x\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\ln(1/x)}{1/x}.$$

Or, quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$, et ce qui précède montre que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x\ln(x)=0$.

❺ La fonction ln est dérivable en 1 et $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=(\ln)'(1)=\frac{1}{1}=1$.

❑

Graphe de $\ln$.



Citons encore :

Théorème 31. Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, **ne s'annulant pas sur** I. Alors, la fonction $\ln\circ|u|$ (c'est-à-dire la fonction $x \mapsto \ln(|u(x)|)$) est dérivable sur I et, $(\ln\circ|u|)' = \dfrac{u'}{u}$.

Démonstration. La fonction u est dérivable et est donc continue sur I. Puisque de plus u ne s'annule pas sur I, u garde un signe constant sur I (par l'absurde, si u changeait de signe, u devrait s'annuler au moins une fois d'après le théorème des valeurs intermédiaires). Donc, ou bien u est strictement positive sur I, ou bien u est strictement négative sur I.

Si u est strictement positive sur I, le théorème de dérivation des fonctions composées permet d'affirmer que $\ln\circ|u| = \ln\circ u$ est dérivable sur I et que $(\ln\circ|u|)' = \dfrac{u'}{u}$.

Si u est strictement négative sur I, le théorème de dérivation des fonctions composées permet d'affirmer que $\ln\circ|u| = \ln\circ(-u)$ est dérivable sur I et que $(\ln\circ|u|)' = \dfrac{-u'}{-u} = \dfrac{u'}{u}$. ❏

Dérivée logarithmique.

La formule précédente permet de dériver facilement des expressions contenant de nombreux produits (quotients, exposants...). En effet, à partir de la formule $(\ln\circ|f|))' = \dfrac{f'}{f}$, on peut écrire $f' = (\ln\circ|f|))' \times f$, formule qui transforme le problème du calcul de f' en celui de $(\ln\circ|f|))'$. La nuance réside dans le fait que si f contient de nombreux produits, ln transforme tous ces produits en sommes, ce qui facilite énormément la dérivation. C'est la notion de *linéarisation* qui refait surface sous une autre forme :

On préfère dériver ou intégrer des sommes ou des différences que des produits ou des quotients.

Exercice 17. Calculer les dérivées de $f\ :\ x \mapsto \sqrt[3]{(x-1)^4(x+1)}$ et $g\ :\ x \mapsto \dfrac{(x+2)^3}{(x-1)^2(x+1)^4}$

Solution.

❶ Pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $|f(x)| > 0$ et $\ln|f(x)| = \dfrac{1}{3}(4\ln|x-1| + \ln|x+1|)$:

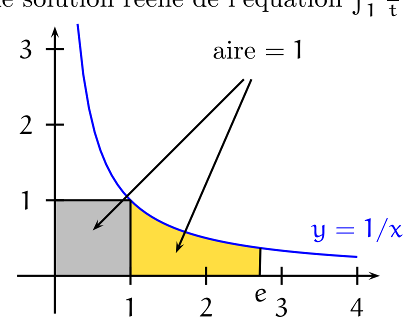
$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln\circ|f|)'(x) \times f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)(x-1)^{4/3}(x+1)^{1/3} \\ &= \frac{1}{3}(4(x+1) + (x-1))(x-1)^{1/3}(x+1)^{-2/3} = \frac{5x+3}{3}\sqrt[3]{\frac{x-1}{(x+1)^2}}. \end{aligned}$$

❷ Sur $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,-1,1\}$, $|f|$ est dérivable et strictement positive. Donc,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-1} - \frac{4}{x+1}\right)\frac{(x+2)^3}{(x-1)^2(x+1)^4} \\ &= (3(x-1)(x+1) - 2(x+2)(x+1) - 4(x+2)(x-1))\frac{(x+2)^2}{(x-1)^3(x+1)^5} = \frac{(-3x^2-10x+1)(x+2)^2}{(x-1)^3(x+1)^5}. \end{aligned}$$

7.2.5 Le nombre de Néper : e

La fonction logarithme népérien est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Par suite, il existe un et un seul réel x tel que $\ln(x) = 1$. Ce nombre est noté e. C'est l'unique réel X tel que l'aire du domaine $\{(x,y) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}/\ 1 \leq x \leq X \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$ soit égale à 1 ou encore l'unique solution réelle de l'équation $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = 1$.



Nous détaillerons dans le chapitre « Approximations » différents calculs de valeurs approchées de e. On doit savoir que

$\boxed{e = 2{,}718\ldots}$.

7.3 La fonction exponentielle

7.3.1 Exercice d'introduction

On connait les règles de calculs sur les exposants entiers :

$$\forall a \in]0,+\infty[,\ \forall(n,m) \in \mathbb{Z}^2,\ a^n.a^m = a^{n+m}.$$

On cherche à prolonger ces règles de calculs à des exposants réels. Donc :

Exercice 18. Que dire de la valeur en 0 et de la dérivée de toutes les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ transformant les sommes en produits ?

Solution. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)f(y).$$

En particulier, pour $x = y = 0$, on obtient $f(0)^2 = f(0)$ et donc $f(0) \in \{0,1\}$.
1er cas. Si $f(0) = 0$, pour $x \in \mathbb{R}$ donné, $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$. Donc, si $f(0) = 0$, f est nécessairement la fonction nulle. Réciproquement, la fonction nulle convient clairement.
2ème cas. Si $f(0) = 1$, soit $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y} = \frac{f(x)f(y)-f(x)}{y} = f(x)\frac{f(y)-1}{y} = f(x)\frac{f(y)-f(0)}{y-0}.$$

Quand y tend vers 0 à x fixé, on obtient, en posant $f'(0) = k$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = kf(x).$$

Ainsi, si f est une fonction, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, non nulle et transformant les sommes en produits, nécessairement $f(0) = 1$ (cet exercice est donc une motivation possible de la convention $a^0 = 1$) et il existe un réel k tel que $f' = kf$. Nous allons maintenant nous interesser plus particulièrement au cas où $k = 1$.

7.3.2 Définition et propriétés de la fonction exponentielle

On résume en trois théorèmes les différentes propriétés de la fonction exponentielle.

Théorème 32 (définition de l'exponentielle de base e).

❶ La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Sa réciproque, notée exp, est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$. Ces deux bijections sont réciproques l'une de l'autre.

❷ $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0$.

❸ $\forall x \in]0,+\infty[,\ \exp(\ln(x)) = x$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x$.

❹ $\forall(x,y) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ (\ln(x) = y \Leftrightarrow x = \exp(y))$.

❺ $\exp(0) = 0$ et $\exp(1) = e$.

Ces propriétés sont la traduction usuelle des liens existant entre une bijection et sa réciproque.

Théorème 33 (propriétés algébriques de l'exponentielle de base e).

❶ $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(x) \times \exp(y) = \exp(x+y)$

❷ $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(x)/\exp(y) = \exp(x-y)$

❸ $\forall x \in \mathbb{R},\ 1/\exp(x) = \exp(-x)$

❹ $\forall(x,r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q},\ (\exp(x))^r = \exp(rx)$

⩾ **Commentaire** . *Ainsi, la fonction exponentielle est un isomorphisme du groupe* $(\mathbb{R},+)$ *sur le groupe* $(]0,+\infty[,\times)$.

Démonstration . Tous ces résultats se prouvent à partir des propriétés de la fonction logarithme népérien. Par exemple, les deux nombres $\exp(x+y)$ et $\exp(x) \times \exp(y)$ ont même logarithme à savoir $x+y$. Puisque la fonction logarithme est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que ces deux nombres sont égaux. ❑

Théorème 34 (propriétés analytiques de l'exponentielle de base e).

❶ La fonction $x \mapsto \exp(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ (\exp)'(x) = \exp(x)$.

❷ La fonction $x \mapsto \exp(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

❸ $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

❹ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\exp(x) = 0$.

Démonstration . Pour $x \in]0,+\infty[$, posons $f(x) = \ln(x)$. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$. Puisque f' ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$, la fonction $\exp = f^{-1}$ est dérivable sur $f(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$\exp'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1/\exp(x)} = \exp(x).$$

Les propriétés ❷ et ❸ viennent du fait que exp est la réciproque de ln. Enfin,

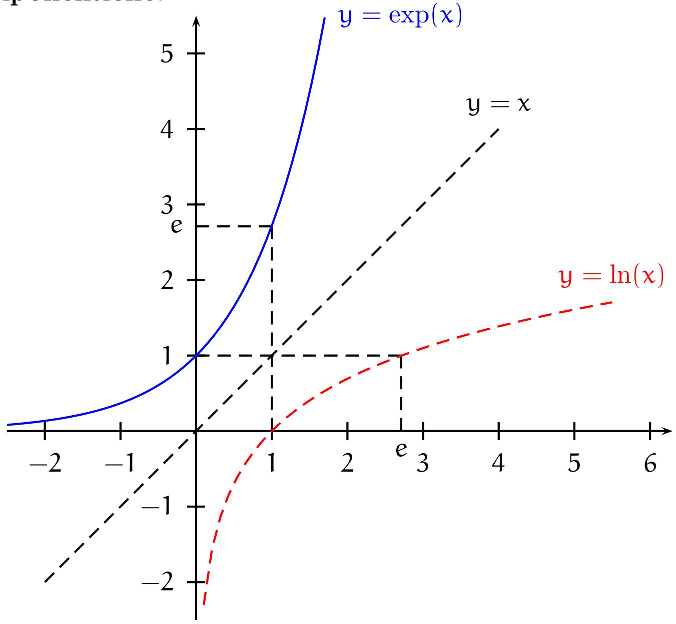
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\exp(\ln X)}{\ln X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\ln X} = +\infty,$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} x\exp(x) = \lim_{X\to+\infty} (-X)\exp(-X) = \lim_{X\to+\infty} -\frac{X}{\exp(X)} = 0.$$

❑

Graphe de la fonction exponentielle.



7.3.3 Changement de notation : e^x

On a vu que pour tout rationnel r et tout réel x, $(\exp(x))^r = \exp(rx)$. En prenant $x = 1$, on obtient donc pour tout rationnel r, $\exp(r) = e^r$ (en tenant compte de $\exp(1) = e$). On peut montrer (et nous le ferons en analyse) qu'un réel x étant donné, on peut trouver une suite de rationnels (r_n), convergeant vers x (ou encore, aussi près qu'on le désire d'un réel x, il y a au moins un nombre rationnel). Ceci nous invite à poser pour assurer la continuité de la notation :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = e^x.}$$

7.4 Les fonctions logarithmes et exponentielles de base a

On se donne un réel strictement positif a, distinct de 1. Pour x réel strictement positif, on définit le **logarithme en base a** de x par

$$\boxed{\forall x > 0,\ \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}.$$

Si $a = 10$, c'est le cas particulier du **logarithme décimal**, noté log :

$$\boxed{\forall x > 0,\ \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}}$$

avec $\ln(10) = 2,3\ldots$ et si $a = e$, le logarithme de base a n'est autre que le logarithme népérien.

Pour $x > 0$ et y réel, résolvons alors l'équation $\log_a(x) = y$:

$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = y \Leftrightarrow \ln(x) = y\ln(a) \Leftrightarrow x = e^{y\ln(a)}.$$

On peut alors définir l'exponentielle de base a. Si a est un réel strictement positif (ici, on accepte donc le cas $a = 1$), on pose

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ a^x = e^{x\ln(a)}}.$$

Quand $a = 10$, on obtient l'exponentielle de base 10 : pour x réel, $10^x = e^{x\ln(10)}$. Quand $a = e$, il s'agit de la fonction exponentielle usuelle.

On a résumé en un seul théorème l'ensemble des propriétés des logarithmes et exponentielles de base a, proposition que nous fournissons sans démonstration.

Théorème 35 (définition et propriétés des logarithmes et exponentielles de base a).
Soit $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.

❶ $\forall x \in]0,+\infty[,\ \log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ a^x = e^{x\ln(a)}$.

❷ $x \mapsto \log_a(x)$ est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto a^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$. Ces deux bijections sont réciproques l'une de l'autre.

❸ $\forall x \in \mathbb{R},\ a^x > 0$.

❹ $\forall x \in]0,+\infty[,\ a^{\log_a(x)} = x$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \log_a(a^x) = x$.

❺ $\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ (\log_a(x) = y \Leftrightarrow x = a^y)$.

❻

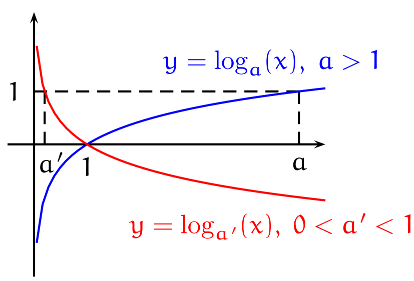
$\log_a(1) = 0$ et $\log_a(a) = 1$	$a^0 = 1$ et $a^1 = a$
$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$	$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ a^x \times a^y = a^{x+y}$
$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$	$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ a^x/a^y = a^{x-y}$
$\forall x \in]0,+\infty[,\ \log_a(1/x) = -\log_a(x)$	$\forall x \in \mathbb{R},\ 1/a^x = a^{-x}$
$\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ \log_a(x^y) = y\log_a(x)$	$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (a^x)^y = a^{xy}$.

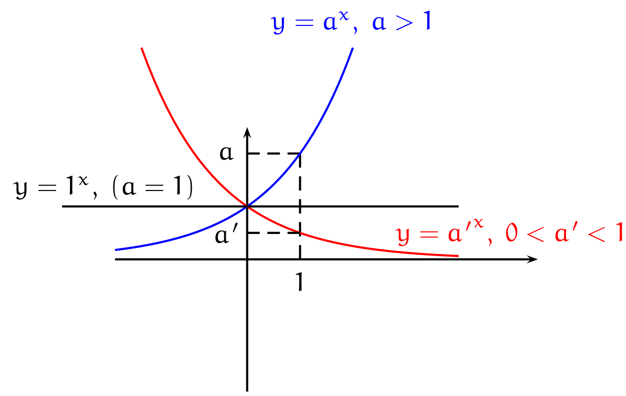
❼

$x \mapsto \log_a(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ (\log_a)'(x) = \dfrac{1}{x \ln(a)}$	$x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ (a^x)'(x) = \ln(a) a^x$
si $a > 1$	
$x \mapsto \log_a(x)$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \log_a(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log_a(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x \log_a(x) = 0$	$x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x a^x = 0$
si $0 < a < 1$	
$x \mapsto \log_a$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \log_a(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log_a(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x \log_a(x) = 0$	$x \mapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{a^x}{x} = 0$

➢ Commentaire. *Une des règles ci-dessus affirme que* $a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a(y)$. *Ainsi, l'équation* $10^{2x-1} = 13$ *ne doit pas se résoudre sous la forme* $10^{2x-1} = 13 \Leftrightarrow e^{(2x-1)\ln(10)} = 13 \Leftrightarrow (2x-1)\ln(10) = \ln(13)\ldots$, *mais directement sous la forme* $10^{2x-1} = 13 \Leftrightarrow 2x - 1 = \log_{10}(13)\ldots$

Graphes.





Exercice 19. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$ et $2^{4\cos^2 x+1} + 16 \times 2^{4\sin^2 x-3} = 20$.

Solution. 1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1} \Leftrightarrow 3^{2x} + 3^{2x-1} = 2^{x+\frac{1}{2}} + 2^{x+\frac{7}{2}} \Leftrightarrow 3^{2x-1}(3+1) = 2^{x+\frac{1}{2}}(1+2^3) \Leftrightarrow 3^{2x-3} = 2^{x-\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)\ln 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)\ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{3\ln 3 - \frac{3}{2}\ln 2}{2\ln 3 - \ln 2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$2^{4\cos^2 x+1} + 16 \times 2^{4\sin^2 x-3} = 20 \Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x+1} + 16 \times 2^{1-4\cos^2 x} = 20 \Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x+1} - 20 + 16 \times 2^2 \times 2^{-(1+4\cos^2 x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^{4\cos^2 x+1})^2 - 20(2^{4\cos^2 x+1}) + 64 = 0 \ (\text{car } 2^{4\cos^2 x+1} \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x+1} \text{ solution de l'équation } X^2 - 20X + 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x+1} = 4 = 2^2 \text{ ou } 2^{4\cos^2 x+1} = 16 = 2^4 \Leftrightarrow 4\cos^2 x + 1 = 2 \text{ ou } 4\cos^2 x + 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \text{ ou } \cos^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos x \in \left\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right)$$

Exercice 20. Trouver la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\ln(n)/n}$. Pour x réel supérieur ou égal à 1, posons alors $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour $x \geq 1$,

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Sur $[1, +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$ et donc f croit sur $[1, e]$ puis décroit. En particulier, pour n entier supérieur ou égal à $e = 2,71...$, on a $f(n) \leq f(3)$ et donc, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

$$\sqrt[n]{n} = e^{f(n)} \leq e^{f(3)} = \sqrt[3]{3} = 1,44\ldots.$$

Comme d'autre part, $\sqrt[1]{1} = 1$ et $\sqrt{2} = 1,41\ldots$, pour tout entier naturel non nul, on a : $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3}$. $\sqrt[3]{3} = 1,44\ldots$ est la valeur cherchée.

Exercice 21. Trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 et $a < b$ tels que $a^b = b^a$.

Solution. Soient a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 tels que $a < b$.

$$a^b = b^a \Leftrightarrow b\ln(a) = a\ln(b) \Leftrightarrow \frac{\ln(a)}{a} = \frac{\ln(b)}{b} \Leftrightarrow f(a) = f(b)$$

où f est la fonction étudiée dans l'exercice précédent. f est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. Par suite, si a et b sont tous deux dans $[e, +\infty[$ ou encore dans $[3, +\infty[$, $f(a) \neq f(b)$ et le couple (a, b) n'est pas solution. Ceci impose donc $a = 2$ et $b \geq 3$. Maintenant, f étant strictement décroissante sur $[3, +\infty[$, l'équation $f(b) = f(2)$ ou encore l'équation $2^b = b^2$ a au plus une solution dans cet intervalle. Cherchons cette éventuelle solution. $2^3 = 8 \neq 9 = 3^2$, puis $2^4 = 16 = 4^2$. Donc, $b = 2$.
Il existe un et un seul couple solution, le couple $(2, 4)$.

Fonctions du type $u(x)^{v(x)}$.
En Maths Sup, on aura fréquemment à étudier des fonctions de la forme $f : x \mapsto u(x)^{v(x)}$. Cette expression est à coup sûr définie quand ($u(x)$ et $v(x)$ existent et) $u(x) > 0$. Pour de tels x, on a alors

$$\boxed{u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}}$$

Si de plus les fonctions u et v sont dérivables sur un intervalle I (et u est strictement positive sur I), alors f est dérivable sur I et

$$f' = ((\ln|f|)'.f = (v\ln u)'u^v = \left(v'\ln u + \frac{vu'}{u}\right)u^v \text{ (dérivée logarithmique).}$$

Théorème 36. Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, u étant strictement positive sur I. Alors la fonction u^v est dérivable sur I et $(u^v)' = \dfrac{v'u\ln u + u'v}{u}u^v$.

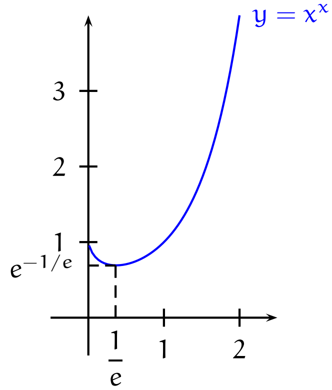
⋗ Commentaire . *Il serait bien sûr absurde de vouloir mémoriser la formule précédente, mais on doit par contre absolument noter qu'en dérivant u^v, on retrouve u^v dans le résultat final. D'autre part, il est tout à fait possible que l'expression $u(x)^{v(x)}$ ait un sens pour certains x tels que $u(x) \leq 0$. Par exemple, quand $x = -1$, $x^x = (-1)^{-1} = -1$. Dans la pratique, on ne se préoccupe pas de ces x anecdotiques, mais on en tient compte dans la rédaction du domaine de définition : on ne cherche pas, contrairement à d'habitude, le domaine tout entier à l'aide d'équivalences, mais simplement une partie du domaine à l'aide d'implications (si $x\ldots$ alors$\ldots$, ou bien $x \in D_f \Leftarrow \ldots$). Il est possible qu'un énoncé nous dégage de ce genre de problèmes en imposant un domaine d'étude.*

Exercice 22. Etudier la fonction $f : x \mapsto x^x$.

Solution.
Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) = x^x$ existe **si** $x > 0$ et dans ce cas, $f(x) = e^{x\ln(x)}$. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$f'(x) = (\ln(x) + x\frac{1}{x})x^x = (\ln(x) + 1)x^x.$$

Puisque $x^x > 0$, $f'(x)$ est, sur $]0, +\infty[$, du signe de $\ln(x) + 1$. Par suite, f' est strictement négative sur $\left]0, \dfrac{1}{e}\right[$ et strictement positive sur $\left]\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$. f est donc strictement décroissante sur $\left]0, \dfrac{1}{e}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$. f admet un minimum en $\dfrac{1}{e}$ égal à $(1/e)^{1/e} = 0,69\ldots$
Quand x tend vers 0, $x\ln(x)$ tend vers 0 et donc, $f(x)$ tend vers $e^0 = 1$.
Quand x tend vers $+\infty$, $x\ln(x)$ tend vers $+\infty$ et donc $f(x)$ tend vers $+\infty$.



8 Fonctions puissances

◇ Pour $x > 0$ réel strictement positif et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $x^\alpha = e^{\alpha\ln(x)}$. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est une **fonction puissance**. Quand α est un réel quelconque, on la définit à partir de la fonction exponentielle. Vous devez néanmoins la différencier d'une fonction exponentielle par le fait que **l'exposant ne varie pas**.

◇ Quand α est **rationnel**, l'écrire comme une exponentielle est souvent très maladroit voire absurde : x^2 est une expression simple définie sur $\mathbb{R}$, alors que $e^{2\ln(x)}$ est une expression compliquée définie uniquement sur $]0, +\infty[$.

◇ Comme cela a été établi dans le paragraphe précédent, l'expression x^α obéit aux règles usuelles de calculs sur les exposants. Pour x et α et β réels donnés :

Pour x et y réels strictement positifs et α et β réels donnés :
$x^0 = 1$, $1^\alpha = 1$
$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$, $x^\alpha/x^\beta = x^{\alpha-\beta}$, $1/x^\alpha = x^{-\alpha}$
$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$ et $x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$.

Théorème 37 (dérivée d'une fonction puissance). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $f_\alpha\ :\ x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour $x > 0$, $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Démonstration. La dérivabilité est claire. Une dérivée logarithmique fournit $f'_\alpha(x) = (\alpha\ln)'(x)x^\alpha = \dfrac{\alpha}{x}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$. ❑

On vérifie aisément les résultats suivants :

◇ Le cas où $\alpha = 0$ est simple : f_0 est la fonction constante $x \mapsto 1$.

◇ Le cas où $\alpha = 1$ est également simple : $\forall x > 0,\ f_1(x) = x$.

◇ f_α est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ si $\alpha < 0$, strictement croissante sur $]0, +\infty[$ si $\alpha > 0$.

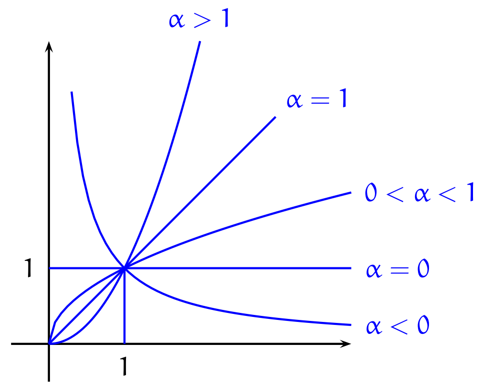
◇ $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha$ est $+\infty$ si $\alpha > 0$ et 0 si $\alpha > 0$. Dans ce deuxième cas, on peut prolonger f_α par continuité en 0 en posant de plus $f_\alpha(0) = 0$ ou encore $0^\alpha = 0$.

◇ Si $\alpha \in]0, 1[$, f_α (prolongée) n'est pas dérivable en 0, mais son graphe admet au point $(0, 0)$ l'axe $(0y)$ pour demi-tangente. Si $\alpha \in]1, +\infty[$, f_α (prolongée) est dérivable en 0, et son graphe admet au point $(0, 0)$ l'axe $(0x)$ pour demi-tangente.

◇ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha$ est 0 si $\alpha < 0$ et $+\infty$ si $\alpha > 0$.

◇ Si $\alpha \in]0,1[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{x} = 0$ et le graphe de f_α admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox).
Si $\alpha \in]1,+\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{x} = +\infty$ et le graphe de f_α admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).

Graphe des fonctions puissances.



9 Les théorèmes de croissances comparées

Théorème 38 (théorèmes de croissances comparées).

❶ $\forall a > 1$, $\forall \alpha > 0$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log_a^\beta(x)}{x^\alpha} = 0$ et $\forall a > 1$, $\forall \alpha > 0$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha |\log_a(x)|^\beta = 0$.

❷ $\forall a > 1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$ et $\forall a > 1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha a^x = 0$.

Démonstration .

❶ Soient $a > 1$, $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Le résultat est clair si $\beta \leq 0$. Si $\beta > 0$, on se ramène à $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(X)}{X}$ de la façon suivante :

$$\frac{\log_a^\beta(x)}{x^\alpha} = \left(\frac{\log_a(x)}{x^{\alpha/\beta}}\right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha\ln(a)}\right)^\beta \left(\frac{\ln(x^{\alpha/\beta})}{x^{\alpha/\beta}}\right)^\beta.$$

Puisque $\alpha/\beta > 0$, $x^{\alpha/\beta}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et donc, $\dfrac{\ln(x^{\alpha/\beta})}{x^{\alpha/\beta}}$ tend vers 0. Il en est de même de $\left(\dfrac{\beta}{\alpha\ln(a)}\right)^\beta \left(\dfrac{\ln(x^{\alpha/\beta})}{x^{\alpha/\beta}}\right)^\beta$ puisque $\beta > 0$.

Ensuite, quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $X = \dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$, et donc $x^\alpha|\log_a(x)|^\beta = \dfrac{|\log_a(1/X)|^\beta}{X^\alpha} = \dfrac{|\log_a(X)|^\beta}{X^\alpha}$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

❷ Soient $a > 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $x > 0$,

$$\ln\left(\frac{a^x}{x^\alpha}\right) = x\ln(a) - \alpha\ln(x) = x\ln(a)\left(1 - \frac{\alpha}{\ln(a)}\frac{\ln(x)}{x}\right).$$

Cette dernière expression tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et donc, $\dfrac{a^x}{x^\alpha} = \exp\left(\ln\left(\dfrac{a^x}{x^\alpha}\right)\right)$ tend aussi vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. La dernière limite s'étudie de manière similaire.

❏

⩥ Commentaire .

◇ *Ainsi, par exemple,* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln_2^{10}(x)}{\sqrt[3]{x}} = 0$, $\lim\limits_{x\to0} \sqrt{x}\ln(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{10}e^x = 0$ *ou encore* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1,01)^x}{x^{10000}} = +\infty$.
Ce dernier résultat, pourtant tout à fait exact, peut surprendre car par exemple, pour $x = 100$, $(1,01)^{100} = 2,7\ldots$ *alors que* 100^{10000} *est le nombre* $1\underbrace{0\ldots0}_{20000}$, *mais* 100 *n'est pas* $+\infty$ *!*

◇ *Dans la démonstration précédente, nous avons établi que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{a^x}{x^\alpha}\right) = +\infty$, *et nous avons voulu en déduire que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$. *Pour cela, nous avons exprimé* ***explicitement le but*** $\dfrac{a^x}{x^\alpha}$ ***en fonction de la donnée*** $\ln\left(\dfrac{a^x}{x^\alpha}\right)$ *en écrivant* $\dfrac{a^x}{x^\alpha} = \exp\left(\ln\left(\dfrac{a^x}{x^\alpha}\right)\right)$. *Vous devez systématiquement avoir ce genre de démarche dont la portée est générale.*

◇ *On a l'habitude de dire que « les exponentielles l'emportent sur les puissances »(en $+\infty$ ou $-\infty$). Il faut donner un sens précis à cette phrase qui ne doit pas être transformée en « une exponentielle de n'importe quoi l'emporte devant n'importe quoi d'autre ». Par exemple, l'expression $e^{\ln(x)}$ n'est pas du tout prépondérante devant x en $+\infty$.*

10 Trigonométrie hyperbolique

10.1 Les fonctions hyperboliques

10.1.1 Exercice d'introduction

Exercice 23. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ (ou plus généralement sur un domaine D de $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0) à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Montrer qu'il existe un et un seul couple (g, h) de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tel que :
1) g est paire, **2)** h est impaire, **3)** $f = g + h$.

Solution.
Unicité. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si les fonctions g et h existent, on a nécessairement

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) \end{array}\right. \quad \text{ou encore } \forall x \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{array}\right.,$$

et donc, en additionnant et retranchant membre à membre ces deux égalités, on a nécessairement

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \text{ et } h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

Ceci montre l'unicité du couple (g, h).

Existence. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Posons

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \text{ et } h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

- Pour tout réel x, $g(x) + h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)) = f(x)$, et donc $f = g + h$.
- Pour tout réel x, $g(-x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) = g(x)$, et g est paire.
- Pour tout réel x, $h(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -h(x)$, et h est impaire.

Donc, g et h ainsi définies conviennent.

On a montré que

Pour toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), il existe un et un seul couple (g, h) de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), tel que g est paire, h est impaire et $f = g + h$.

⪢ **Commentaire** . *La démarche qui consiste à montrer d'abord l'unicité puis à vérifier ensuite l'existence peut surprendre. Comment montrer l'unicité d'un objet si on ne sait même pas que cet objet existe ? Cette démarche se motive de la façon suivante :*

◇ *Quand on démontre l'unicité d'abord, on cherche au passage l'expression de g et de h avec un raisonnement du type, « si g et h existent,..., nécessairement, g et h ne peuvent être que les fonctions... ». On élimine ainsi presque tous les couples (g, h) sauf un. Il serait donc peu logique, avec cet ordre là, de démontrer l'unicité en écrivant « Soient (g_1, h_1) et (g_2, h_2) deux couples solutions. Vérifions que $g_1 = g_2$ et $h_1 = h_2$... »*

◇ *On peut alors vérifier que le seul couple (g, h) encore candidat est effectivement solution du problème et on a ainsi démontré l'existence du couple (g, h).*

Définition 6. Soit f une fonction définie $\mathbb{R}$ (respectivement sur un domaine D de $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0) à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ (respectivement sur D) par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \text{ et } h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

g s'appelle la **partie paire** de f et est notée $P(f)$ et h s'appelle la **partie impaire** de f et est notée $I(f)$.

Exemples.

• Si, pour tout réel x, $f(x) = 2x^7 - x^5 + x^4 + x + 1$, $P(f)(x) = x^4 + 1$ et $I(f)(x) = 2x^7 - x^5 + x$. De manière générale, si P est un polynôme non nul, sa partie paire (resp. impaire) est la somme des monômes d'exposants pairs (resp. impairs).

• Si, pour tout réel non nul x, $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x^3 + x^2 + x}$,

$$\begin{aligned} P(f)(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3 - x^2 + 1}{x^3 + x^2 + x} + \frac{-x^3 - x^2 + 1}{-x^3 + x^2 - x}\right) = \frac{1}{2}\frac{(x^3 - x^2 + 1)(x^2 - x + 1) + (x^3 + x^2 - 1)(x^2 + x + 1)}{x(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)} \\ &= \frac{x^5 + 2x^3 - x}{x(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{x^4 + 2x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1}. \end{aligned}$$

• Si, pour tout réel x, $f(x) = e^{ix}$, alors, $P(f)(x) = \cos x$ et $I(f)(x) = i \sin x$ alors que $\mathrm{Re}(f)(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) + \overline{f(x)}) = \dfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \cos x$ et $\mathrm{Im}(f)(x) = \dfrac{1}{2i}(f(x) - \overline{f(x)}) = \dfrac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \sin x$.

10.1.2 Définition des fonctions *sinus hyperbolique* et *cosinus hyperbolique*

Définition 7. La fonction **cosinus hyperbolique**, notée ch est la partie paire de la fonction exponentielle et la fonction **sinus hyperbolique**, notée sh, est la partie impaire de la fonction exponentielle.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\, x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \text{ et } \mathrm{sh}\, x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).}$$

10.1.3 Etude conjointe de ch et sh

Par définition de ch et sh,

Théorème 39 (parité). ch est paire et sh est impaire.

sh étant impaire, on a en particulier $\mathrm{sh}(0) = 0$. Par calcul, on a aussi $\mathrm{ch}(0) = 1$. Ensuite,

Théorème 40 (dérivées).

❶ ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x) \text{ et } \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x).}$$

❷ En particulier, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sh}(x)}{x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x} = 0$.

Démonstration . Le calcul des dérivées est immédiat. Mais alors, puisque la fonction sh est dérivable en 0, quand x tend vers 0, le taux $\frac{\mathrm{sh}(x) - \mathrm{sh}(0)}{x - 0} = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x}$ tend vers $(\mathrm{sh})'(0) = \mathrm{ch}(0) = 1$. De même, quand x tend vers 0, le taux $\dfrac{\mathrm{ch}(x) - \mathrm{ch}(0)}{x - 0} = \dfrac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x}$ tend vers $(\mathrm{ch})'(0) = \mathrm{sh}(0) = 0$. ❏

Géométriquement, le graphe de sh admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = x$ et le graphe de ch admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à (Ox).

Maintenant, pour tout réel x, $\mathrm{ch}\, x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$. Donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Mais alors, pour $x > 0$, $\mathrm{sh}\, x > \mathrm{sh}\, 0 = 0$. ch est donc strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et, par parité, strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$. Le théorème suivant est immédiat.

Théorème 41.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \mathrm{ch}\, x = +\infty,\ \lim_{x \to +\infty} \mathrm{sh}\, x = +\infty,\ \lim_{x \to -\infty} \mathrm{ch}\, x = +\infty,\ \lim_{x \to -\infty} \mathrm{sh}\, x = -\infty.}$$

Position relative. Pour tout réel x, $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}) = e^{-x} > 0$. Donc la courbe représentative de ch est strictement au-dessus de la courbe représentative de sh.

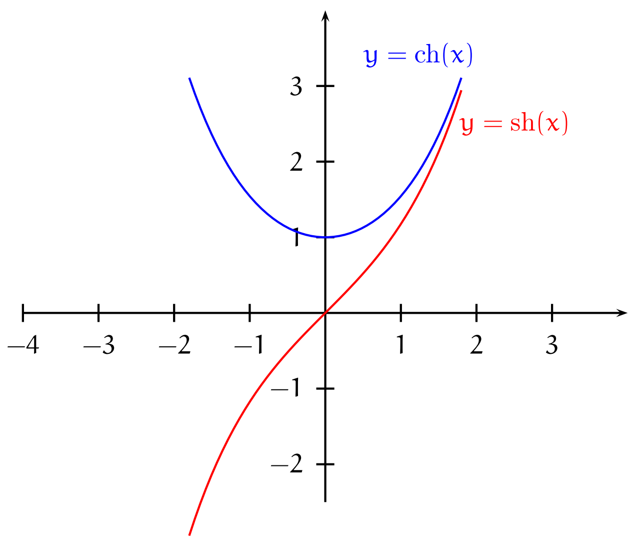
Comportement asymptotique. Tout d'abord, $\lim\limits_{x\to+\infty} (\text{ch}(x) - \text{sh}(x)) = 0$. Par suite, les courbes représentatives de ch et sh sont asymptotes l'une à l'autre en $+\infty$. De plus, pour $x \in]0, +\infty[$, $\frac{\text{ch}(x)}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^x}{x} + \frac{e^{-x}}{x}\right)$, et donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\text{ch}(x)}{x} = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\text{sh}(x)}{x} = +\infty$.

Théorème 42 (croissances comparées).

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{ch}(x)}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{\text{sh}(x)}{x} = +\infty}.$$

On en déduit que les graphes des fonctions ch et sh admettent en $+\infty$ des branches paraboliques de direction (Oy).

Graphes.



Nous montrerons que le graphe de la fonction *cosinus hyperbolique* « est » la courbe que dessine une chaînette suspendue à deux clous. Pour cette raison, le graphe de ch est souvent appelé **la chaînette**, les lettres c et h ayant alors le bon goût d'être les initiales des mots cosinus et hyperbolique, mais aussi les deux premières lettres du mot chaînette. Le graphe de la fonction *cosinus hyperbolique* est encore la courbe que dessine le fil du téléphone netre deux poteaux ou le cable d'un téléphérique ....

10.1.4 Formulaire de trigonométrie hyperbolique

A priori, la seule formule de trigonométrie à connaître dans le programme officiel de Maths Sup est

Théorème 43. Pour tout réel x, $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.

Démonstration . Soit x un réel. $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = (\text{ch}(x) - \text{sh}(x))(\text{ch}(x) + \text{sh}(x)) = e^{-x}e^x = 1$. ❏

◇ Ainsi, comme en trigonométrie circulaire, connaissant $\text{sh}(x)$, on peut fournir $\text{ch}(x)$ ($\text{ch}(x) = \sqrt{\text{sh}^2(x) + 1}$) et connaîssant $\text{ch}(x)$, on peut fournir $\text{sh}(x)$ ($\text{sh}(x) = \text{sgn}(x)\sqrt{\text{ch}^2(x) - 1}$). Par exemple, si on sait que $\text{sh}(x)$ vaut 1, alors $\text{ch}(x)$ vaut $\sqrt{1^2 + 1} = \sqrt{2}$.

◇ Dans la preuve ci-dessus, nous avons utilisé au passage des formules immédiates qui doivent être connues (on rappelle en parallèle les définitions de $\text{ch}(x)$ et $\text{sh}(x)$).

$$\boxed{\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\text{Pour tout réel } x, \text{ on a}} \\ \text{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \text{sh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \text{ch}(x) + \text{sh}(x) = e^x & \text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x}. \end{array}}$$

◇ Le théorème 43 permet de comprendre le mot hyperbolique. La trigonométrie circulaire permet de paramétrer les cercles et plus généralement les ellipses qui ne sont que des cercles déformés. Le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ (dans un certain repère orthonormé) est l'ensemble des points $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ où θ décrit $\mathbb{R}$. Dans le chapitre « Coniques », on verra plus généralement qu'une ellipse étant donnée, il existe un repère orthonormé dans lequel cette ellpise a pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ où a et b sont des réels strictement positifs donnés, puis que cette ellipse est l'ensemble des points $(a\cos(\theta), b\sin(\theta))$ où θ décrit $\mathbb{R}$. On verra de même qu'une hyperbole étant donnée, il existe un repère orthonormé dans lequel cette hyperbole a pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, puis qu'une des deux branches de cette hyperbole est l'ensemble des $(a\,\mathrm{ch}(\theta), b\,\mathrm{sh}(\theta))$ où θ d'écrit $\mathbb{R}$ (entre autre car $\dfrac{(a\,\mathrm{ch}(\theta))^2}{a^2} - \dfrac{(b\,\mathrm{sh}(\theta))^2}{b^2} = \mathrm{ch}^2(\theta) - \mathrm{sh}^2(\theta) = 1$).

◇ Si une seule formule est à connaître, on doit néanmoins savoir que l'on peut construire tout un formulaire de trigonométrie hyperbolique ressemblant étrangement à un formulaire usuel de trigonométrie circulaire. Nous en établirons certaines à travers un exercice.

Exercice 24. Etablir les formules d'addition et de duplication pour les fonctions ch et sh.

Solution. Soient a et b deux réels.

$$\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) = \frac{1}{4}(e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b}) = \frac{1}{4}(e^{a+b} + e^{-(a+b)} + e^{a-b} + e^{-(a-b)}) = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}(a+b) + \mathrm{ch}(a-b))$$

et de même

$$\mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b) = \frac{1}{4}(e^{a+b} + e^{-(a+b)} - e^{a-b} - e^{-(a-b)}) = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}(a+b) - \mathrm{ch}(a-b)).$$

En additionnant ces deux égalités et en retranchant ces deux égalités, on obtient

$$\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b) = \mathrm{ch}(a+b) \text{ et } \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b) = \mathrm{ch}(a-b).$$

De même,

$$\mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) = \frac{1}{4}(e^a - e^{-a})(e^b + e^{-b}) = \frac{1}{4}(e^{a+b} - e^{-(a+b)} + e^{a-b} + e^{-(a-b)}) = \frac{1}{2}(\mathrm{sh}(a+b) + \mathrm{sh}(a-b))$$

et (en échangeant les rôles de a et b)

$$\mathrm{sh}(b)\,\mathrm{ch}(a) = \frac{1}{2}(\mathrm{sh}(a+b) - \mathrm{sh}(a-b))$$

($\mathrm{sh}(-a+b) = -\mathrm{sh}(a-b)$ puisque sh est impaire). Par suite,

$$\mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(b)\,\mathrm{ch}(a) = \mathrm{sh}(a+b) \text{ et } \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(b)\,\mathrm{ch}(a) = \mathrm{sh}(a-b).$$

Pour tout couple (a, b) de réels, on a
$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$, $\mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$,
$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(b)\,\mathrm{ch}(a)$, $\mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(b)\,\mathrm{ch}(a)$.

En égalant b à a dans les formules précédentes, on obtient

Pour tout réel a, on a
$\mathrm{ch}(2a) = \mathrm{ch}^2(a) + \mathrm{sh}^2(a)$ et $\mathrm{sh}(2a) = 2\,\mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(a)$.

De manière générale, toute formule de trigonométrie circulaire a son équivalent en trigonométrie hyperbolique, soit telle quelle ($(\sin)' = \cos$ et $(\mathrm{sh})' = \mathrm{ch}$, $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$ et $\mathrm{sh}(2a) = 2\,\mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(a)\ldots$), soit en changeant un signe ($(\cos)' = -\sin$ et $(\mathrm{ch})' = \mathrm{sh}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ et $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$, $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$ et $\mathrm{ch}(2a) = \mathrm{ch}^2(a) + \mathrm{sh}^2(a)\ldots$).

Exercice 25. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sum_{k=1}^{100} \text{sh}(2+kx) = 0$ $(*)$.

Solution. 0 n'est pas solution de l'équation proposée. Pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100} \text{sh}(2+kx) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{100} e^{2+kx} - \sum_{k=1}^{100} e^{-2-kx}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{2+x}\frac{e^{100x}-1}{e^x-1} - e^{-2-x}\frac{1-e^{-100x}}{1-e^{-x}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2+x}(e^{100x}-1)}{e^x-1} - \frac{e^{-2-x}e^{-100x}(e^{100x}-1)}{e^{-x}(e^x-1)}\right) = \frac{e^{2+x}(e^{100x}-1) - e^{-100x-2}(e^{100x}-1)}{2(e^x-1)}\\ &= \frac{(e^{100x}-1)(e^{2+x}-e^{-100x-2})}{2(e^x-1)} = \frac{e^{-100x-2}(e^{100x}-1)(e^{101x+4}-1)}{2(e^x-1)}\end{aligned}$$

Ainsi, x est solution de $(*)$ si et seulement si $x \neq 0$ et $\dfrac{e^{-101x-2}(e^{100x}-1)(e^{101x+4}-1)}{2(e^x-1)} = 0$, ou encore $e^{101x+4}-1 = 0$, ou enfin $x = -\dfrac{4}{101}$.

10.1.5 La fonction « tangente hyperbolique »

Pour tout réel x, $\text{ch}(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$. En particulier, la fonction ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On peut donc poser

Définition 7. Pour tout réel x, la **tangente hyperbolique** du réel x, notée $\text{th}(x)$, est le rapport de son cosinus hyperbolique sur son sinus hyperbolique.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}}.$$

En explicitant $\text{ch}(x)$ et $\text{sh}(x)$, on obtient différentes expressions de $\text{th}(x)$.

Théorème 43. Pour tout réel x, $\text{th}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

Démonstration. La deuxième expression est obtenue en mettant e^{-x} en facteur au numérateur et au dénominateur et la troisième en mettant e^x en facteur au numérateur et au dénominateur (de la fraction initiale). ❑

Théorème 44.

❶ Pour tout réel x, $1 - \text{th}^2(x) = \dfrac{1}{\text{ch}^2(x)}$.

❷ Pour tout réel x, $\text{th}(x) \in]-1, 1[$.

Démonstration.

❶ Soit x un réel. $1 - \text{th}^2(x) = 1 - \dfrac{\text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \dfrac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \dfrac{1}{\text{ch}^2(x)}$.

❷ Soit x un réel. $1 - \text{th}^2(x) = \dfrac{1}{\text{ch}^2(x)} > 0$ permet d'écrire $\text{th}^2(x) < 1$. Par stricte croissance de la fonction $X \mapsto \sqrt{X}$ sur $[0, +\infty[$, on a alors $\sqrt{\text{th}^2(x)} < \sqrt{1}$ ou encore $|\text{th}(x)| < 1$ ou enfin $-1 < \text{th}(x) < 1$.

❑

Théorème 45. La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ (\text{th})'(x) = 1 - \text{th}^2(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}}.$$

Démonstration. Puisque la fonction ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et pour x réel,

$$\text{th}'(x) = \frac{(\text{sh})'(x)\,\text{ch}(x) - \text{sh}(x)(\text{ch})'(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = 1 - \text{th}^2(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}.$$

❏

Ensuite, puisque la fonction sh est impaire et la fonction ch est paire,

Théorème 46. La fonction th est impaire. En particulier, $\text{th}(0) = 0$.

Les théorèmes 44 et 45 montrent que la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Pour achever l'étude de la fonction th et en tracer le graphe, il reste à déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{th}(x)$. Or, pour x réel, $\text{th}(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$. Comme e^{-2x} tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{th}(x) = 1$. La fonction th étant impaire, on a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{th}(x) = -1$.

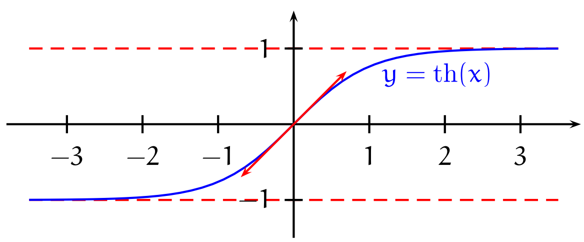
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \text{th}(x) = -1 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \text{th}(x) = 1.}$$

Théorème 47. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{th}(x)}{x} = 1$.

Démonstration. La fonction th est dérivable en 0. Donc, quand x tend vers 0, le taux $\dfrac{\text{th}(x)-\text{th}(0)}{x-0} = \dfrac{\text{th}(x)}{x}$ tend vers $(\text{th})'(0) = 1 - \text{th}^2(0) = 1$. ❏

On en déduit que le graphe de th admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = x$. On peut maintenant tracer le graphe de th. On prendra garde au fait que, si le graphe de tan est « vertical », le graphe de th est « horizontal ».

Graphe.



Exercice 26.

1) Montrer que pour tout réel x, on a $\text{th}(2x) = \dfrac{2\,\text{th}(x)}{1+\text{th}^2(x)}$, et en déduire que pour tout réel x non nul, $\dfrac{2}{\text{th}(2x)} - \dfrac{1}{\text{th}(x)} = \text{th}(x)$.

2) a étant un réel strictement positif et n un entier naturel, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k\,\text{th}(2^k a)$.

Solution. 1) Soit x un réel. Puisque $\text{ch}(x)$ n'est pas nul, et d'après l'exercice n° 24, page 48, on a

$$\text{th}(2x) = \frac{\text{sh}(2x)}{\text{ch}(2x)} = \frac{2\,\text{sh}(x)\,\text{ch}(x)}{\text{ch}^2(x)+\text{sh}^2(x)} = \frac{\text{ch}^2(x)}{\text{ch}^2(x)}\,\frac{2\,\text{sh}(x)/\,\text{ch}(x)}{1+\text{sh}^2(x)/\,\text{ch}^2(x)} = \frac{2\,\text{th}(x)}{1+\text{th}^2(x)}$$

et donc, $\text{th}(2x) = \dfrac{2\,\text{th}(x)}{1+\text{th}^2(x)}$ (si on ne veut pas faire appel à l'exercice n° 48, le plus simple est de passer en e^x).

Maintenant, th ne s'annulant qu'en 0, pour x non nul, on a $\dfrac{2}{\text{th}(2x)} = \dfrac{1+\text{th}^2(x)}{\text{th}(x)} = \dfrac{1}{\text{th}(x)} + \text{th}(x)$ et donc, $\dfrac{2}{\text{th}(2x)} - \dfrac{1}{\text{th}(x)} = \text{th}(x)$.

2) Soient a un réel strictement positif et n un entier naturel. Pour tout entier naturel k, le réel $x = 2^k a$ n'est pas nul et d'après 1), $2^k\,\text{th}(2^k a) = 2^k\left(\dfrac{2}{\text{th}(2\times 2^k a)} - \dfrac{1}{\text{th}(2^k a)}\right) = \dfrac{2^{k+1}}{\text{th}(2^{k+1}a)} - \dfrac{2^k}{\text{th}(2^k a)}$. En sommant ces égalités pour k variant de 0 à n, on obtient par télescopage

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k\,\text{th}(2^k a) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^{k+1}}{\text{th}(2^{k+1}a)} - \frac{2^k}{\text{th}(2^k a)}\right) = \frac{2^{n+1}}{\text{th}(2^{n+1}a)} - \frac{1}{\text{th}(a)}.$$

10.2 Les fonctions hyperboliques réciproques

10.2.1 La fonction « argument sinus hyperbolique »

Soit y un réel donné. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\text{sh}(x) = y$. Pour x réel,

$$\text{sh}(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = y \Leftrightarrow e^x - 2y - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2y(e^x) - 1 = 0 \ (*),$$

(en multipliant les deux membres par le réel non nul e^x).

Le discriminant réduit de l'équation $X^2 - 2yX - 1 = 0$ vaut $\Delta' = y^2 + 1 > 0$. Cette équation admet les deux solutions $X_1 = y + \sqrt{y^2+1}$ et $X_2 = y - \sqrt{y^2+1}$. Maintenant, $\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = |y|$. En se rappelant que $|y|$ est, parmi les deux nombres y et $-y$, celui qui est le plus grand, on obtient $\sqrt{y^2+1} > -y$ ce qui fournit $X_1 > 0$ et $\sqrt{y^2+1} > y$ ce qui fournit $X_2 < 0$. Revenons alors à l'équation $(*)$.

$$x \text{ solution de } (*) \Leftrightarrow e^x = X_1 \text{ ou } e^x = X_2 \Leftrightarrow e^x = X_1 \Leftrightarrow x = \ln(X_1) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

On vient de montrer que pour tout réel y, il existe un et un seul réel x tel que $\text{sh}(x) = y$, à savoir $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$. Ainsi, par exemple, le réel x dont le sinus hyperbolique vaut 1 est $\ln(1+\sqrt{2})$. Ce calcul et les résultats usuels sur la réciproque d'une bijection permettent d'énoncer la proposition suivante qui, au passage, définit la fonction « argument sinus hyperbolique ».

Théorème 48 (définition et propriétés de l'argument sinus hyperbolique).

❶ La fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

❷ La réciproque de sh, appelée **argument sinus hyperbolique** et notée argsh, est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

❸ Pour tout réel x, on a $\text{argsh}(\text{sh}(x)) = x$ et $\text{sh}(\text{argsh}(x)) = x$.

❹ Pour tout couple de réels (x, y), on a $\text{sh}(x) = y \Leftrightarrow x = \text{argsh}(y)$.

❺ Pour tout réel x, on a $\text{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Les calculs qui précèdent cette proposition doivent être connus et maîtrisés. Néanmoins, on peut refaire le même travail de manière nettement plus élégante. Tout d'abord, puisque sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{sh}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{sh}(x) = +\infty$, sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Ceci assure, avant tout calcul, le fait que l'équation $(*)$ a une et une seule solution. On trouve alors l'expression de la réciproque argsh par le calcul suivant valable pour tout réel x (on rappelle que pour tout réel X, $\text{ch}(X) + \text{sh}(X) = e^X$ et que $\text{ch}(X) = \sqrt{\text{sh}^2(X)+1}$) :

$$\text{argsh}(x) = \ln(e^{\text{argsh}(x)}) = \ln(\text{sh}(\text{argsh}(x)) + \text{ch}(\text{argsh}(x))) = \ln\left(x + \sqrt{\text{sh}^2(\text{argsh}(x))+1}\right) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Théorème 49 (parité de argsh). La fonction argsh est impaire.

Démonstration. Soit x un réel. Posons $y = \text{argsh}(x)$ de sorte que $x = \text{sh}(y)$. Alors, sh étant une fonction impaire,

$$\text{argsh}(-x) = \text{argsh}(-\text{sh}(y)) = \text{argsh}(\text{sh}(-y)) = -y = -\text{argsh}(x).$$

❑

⩥ **Commentaire**. *On peut aussi constater directement que* $(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x) = (x^2+1) - x^2 = 1$ *et donc que* $\text{argsh}(-x) = \ln(-x+\sqrt{x^2+1}) = \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = -\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = -\text{argsh}(x)$. *Néanmoins, il est plus naturel de déduire l'imparité de* argsh *de celle de* sh*, sa réciproque.*

Théorème 50 (dérivée de argsh). La fonction argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $(\text{argsh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Démonstration. La fonction $x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0, +\infty[$ et la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de la fonction $x \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$. De plus, cette fonction est à valeurs dans $]0, +\infty[$ (voir plus haut). On en déduit que la fonction $x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1}) = \text{argsh}(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour x réel,

$$(\text{argsh})'(x) = \left(1 + 2x\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\right)\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\,\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

❑

$\vartriangleright$ **Commentaire.** *L'étude de* argsh *semble différente de celle de* arcsin. *La nuance vient du fait que* argsh *n'est pas une « vraie » nouvelle fonction, mais une composée de fonctions usuelles déjà connues. On a donc pu la dériver directement. Mais on aurait aussi pu dériver* argsh *comme réciproque de* sh, *ce qui donnerait :* $(\text{argsh})'(x) = \dfrac{1}{(\text{sh})'(\text{argsh}(x))} = \dfrac{1}{\text{ch}(\text{argsh}(x))} = \dfrac{1}{\sqrt{\text{sh}^2(\text{argsh}(x))+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

La fonction argsh est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (mais nous le savions à l'avance, argsh étant réciproque d'une bijection strictement croissante). Pour terminer l'étude de argsh et en construire le graphe, il nous manque l'étude en $+\infty$ et $-\infty$, et une précision sur la tangente au point d'abscisse 0. Immédiatement, $\lim_{x\to+\infty} \text{argsh}(x) = +\infty$. Pour la limite en $-\infty$, argsh étant impaire, on a

$$\lim_{x\to-\infty} \text{argsh}(x) = \lim_{X\to+\infty} \text{argsh}(-X) = \lim_{X\to+\infty} -\text{argsh}(X) = -\infty.$$

Il aurait été beaucoup plus maladroit de calculer directement cette limite. Néanmoins, il est intéressant de voir comment on lève l'indétermination grâce à l'utilisation d'une **quantité conjuguée**. Pour tout réel x, puisque $\sqrt{x^2+1}-x \neq 0$, on a

$$\sqrt{x^2+1}+x = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}.$$

Quand x tend vers $-\infty$, $\sqrt{x^2+1}-x$ tend vers $+\infty$ puis $\sqrt{x^2+1}+x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ tend vers 0, et enfin $\text{argsh}(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ tend vers $-\infty$.

Comparons maintenant les croissances des fonctions $x \mapsto \text{argsh}(x)$ et $x \mapsto x$ quand x tend vers $+\infty$. Pour $x > 0$ (pour pouvoir écrire $\sqrt{x^2} = x$ le moment venu), on a

$$\frac{\text{argsh}(x)}{x} = \frac{1}{x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right) = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right).$$

Cette dernière exepression tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Théorème 51 (comportement de argsh en l'infini).

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{argsh}(x) = +\infty$.

❷ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{argsh}(x)}{x} = 0$. Par suite, le graphe de argsh admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox).

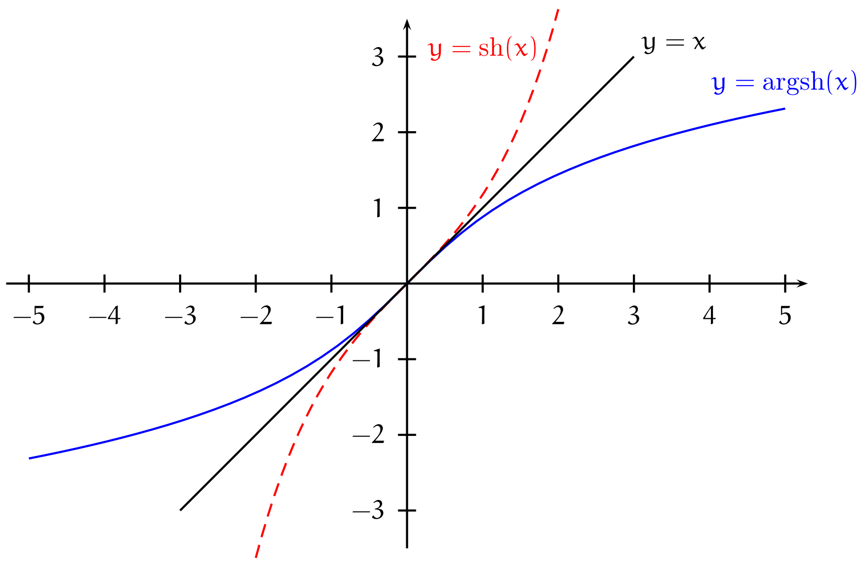
Enfin, comme cela a été constaté de nombreuses fois maintenant, le taux $\dfrac{\text{argsh}(x)}{x} = \dfrac{\text{argsh}(x)-\text{argsh}(0)}{x-0}$ tend vers $(\text{argsh})'(0) = \sqrt{1+0^2} = 1$ quand x tend vers 0.

Théorème 52.

❶ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{argsh}(x)}{x} = 1$.

❷ La courbe de argsh admet la droite d'équation $y = x$ pour tangente au point d'abscisse 0.

Graphe.



10.2.2 La fonction « argument cosinus hyperbolique »

La démarche est la même que pour argsh, avec cependant des complications : la fonction ch n'est pas injective sur $\mathbb{R}$ et les réels strictement inférieurs à 1 n'ont pas d'antécédents par ch (la fonction ch ayant un minimum égal à 1).

On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $\text{ch}(x) = y$ ou encore l'équation $(e^x)^2 - 2y(e^x) + 1 = 0$ $(*)$, où y est un réel supérieur ou égal 1 donné. Le discriminant réduit de l'équation $X^2 - 2yX + 1 = 0$ $(**)$ vaut $y^2 - 1$. $(**)$ admet une et une seule solution quand $y = 1$, à savoir $X = 1$ et donc $(*)$ admet une et une seule solution, à savoir $x = 0$.
Quand $y > 1$, $(**)$ admet deux solutions réelles distinctes à savoir $X_1 = y + \sqrt{y^2 - 1}$ et $X_2 = y - \sqrt{y^2 - 1}$. Mais cette fois-ci, les deux réels X_1 et X_2 sont strictement positifs (en effet, leur produit vaut $1 > 0$ de sorte que X_1 et X_2 sont non nuls et de même signe, et on conclut par le signe de leur somme : $X_1 + X_2 = 2y > 0$). $(*)$ admet donc les deux solutions distinctes $x_1 = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$ et $x_2 = \ln\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right)$.
Maintenant, puisque $0 < X_2 < X_1$ (car $X_1 - X_2 = 2\sqrt{y^2 - 1} > 0$), $X_1 = \dfrac{1}{X_2} > \dfrac{1}{X_1}$ et donc, $X_1^2 > 1$ ou enfin, $X_1 > 1$. On montre de même que $X_2 < 1$. Ceci montre que $x_1 > 0$ et $x_2 < 0$. Ainsi, $(*)$ admet une et une seule solution dans $[0, +\infty[$ à savoir $x_1 = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$ (ce qui reste vrai quand $y = 1$).
On peut maintenant énoncer la proposition suivante.

Théorème 53 (définition et propriétés de l'argument cosinus hyperbolique).

❶ La restriction de ch à $[0, +\infty[$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

❷ La réciproque de cette bijection, appelée **argument cosinus hyperbolique** et notée argch, est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

❸ argch est définie et continue sur $[1, +\infty[$.

❹ Pour tout réel x de $[0, +\infty[$, on a $\text{argch}(\text{ch}(x)) = x$ et, pour tout réel x de $[1, +\infty[$, on a $\text{ch}(\text{argch}(x)) = x$.

❺ Pour tout couple de réels $(x, y) \in [0, +\infty[\times [1, +\infty[$, on a $\text{ch}(x) = y \Leftrightarrow x = \text{argch}(y)$.

❻ Pour tout réel $x \in [1, +\infty[$, on a $\text{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

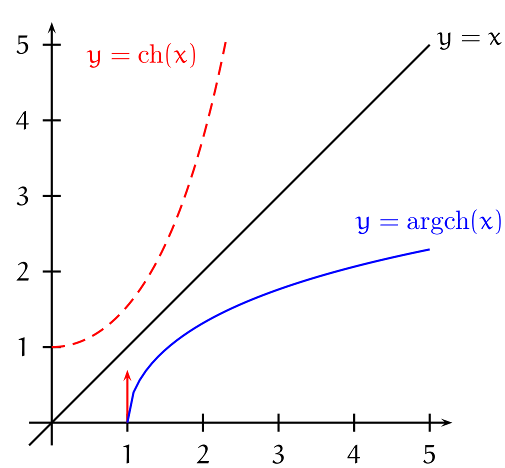
❼ La fonction argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ et, pour $x > 1$, $(\text{argch})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

❽ $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{\text{argch}(x)}{x - 1} = +\infty$ et la fonction argch n'est pas dérivable en 1, mais la courbe représentative de argch admet au moint d'abscisse 1 une demi-tangente parallèle à (Oy).

❾ $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \text{argch}(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{argch}(x)}{x} = 0$. Le graphe de argch admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox).

Démonstration . Le travail à effectuer est analogue au travail effectué sur argsh. Seule nécessite un commentaire supplémentaire : la fonction ch est dérivable en 0 et $(\text{ch})'(0) = 0$ et on sait alors que argch n'est pas dérivable en $\text{ch}(0) = 1$. ❑

Graphe.



Exercice 27. Domaine de définition et expressions simplifiées de $\text{ch}(\text{argch}(x))$, $\text{argch}(\text{ch}(x))$ et $\text{ch}(\ln(x-\sqrt{x^2-1}))$.

Solution.
• $\text{ch}(\text{argch}(x))$ existe si et seulement si $x \geq 1$ et pour $x \geq 1$, $\text{ch}(\text{argch}(x)) = x$.
• $\text{argch}(\text{ch}(x))$ existe pour tout réel x. Si $x \geq 0$, $\text{argch}(\text{ch}(x)) = x$. Si $x < 0$, $\text{argch}(\text{ch}(x)) = \text{argch}(\text{ch}(-x)) = -x$ (car $-x \in [0,+\infty[$). Ainsi, pour tout réel x, $\text{argch}(\text{ch}(x)) = |x|$.
• L'expression $\text{ch}(\ln(x-\sqrt{x^2-1}))$ n'a pas de sens si $-1 < x < 1$ et si $x \leq -1$ (car alors $x-\sqrt{x^2-1} < 0$).
Si $x \geq 1$, $\sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2} = x$ et donc $x-\sqrt{x^2-1} > 0$. Par suite, $\text{ch}(\ln(x-\sqrt{x^2-1}))$ existe si et seulement si $x \geq 1$. Pour un tel x, on a alors $(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1}) = 1$ et donc

$$-\ln(x-\sqrt{x^2-1}) = \ln\left(\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

Par suite

$$\text{ch}(\ln(x-\sqrt{x^2-1})) = \frac{1}{2}\left(e^{\ln(x-\sqrt{x^2-1})} + e^{-\ln(x-\sqrt{x^2-1})}\right) = \frac{1}{2}(x-\sqrt{x^2-1}+x+\sqrt{x^2-1}) = x.$$

➢ Commentaire. *Pour les deux premières questions, c'est exactement le même problème avec les fonctions* $x \mapsto x^2$ *et* $x \mapsto \sqrt{x}$. $(\sqrt{x})^2$ *n'existe que pour* $x \geq 0$ *et vaut* x. $\sqrt{x^2}$ *existe pour tout réel* x *mais ne vaut* x *que pour* $x \geq 0$.
Pour la dernière question, nous avons redécouvert que la fonction ch *réalise une bijection de* $]-\infty,0]$ *sur* $[1,+\infty[$ *et que la réciproque de cette bijection est la fonction* $\begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \to &]-\infty,0] \\ x & \mapsto & \ln(x-\sqrt{x^2-1}) \end{array}$.

Exercice 28. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\text{argch}(x) = \text{argsh}(2-x)$.

Solution. Un réel $x < 1$ n'est pas solution de l'équation.
Soit $x \geq 1$. On note tout d'abord que $\text{argch}(x) \geq 0$ et donc, $\text{sh}(\text{argch}(x)) \geq 0$. Par suite,

$$\text{sh}(\text{argch}(x)) = +\sqrt{\text{ch}^2(\text{argch}(x)) - 1} = \sqrt{x^2-1}.$$

Puisque sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, on a alors

$$\begin{aligned}\text{argch}(x) = \text{argsh}(2-x) &\Leftrightarrow \text{sh}(\text{argch}(x)) = \text{sh}(\text{argsh}(2-x)) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} = 2-x \\ &\Leftrightarrow x^2-1 = (2-x)^2 \text{ et } 2-x \geq 0 \Leftrightarrow 4x-5 = 0 \text{ et } 2-x \geq 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Comme $\frac{5}{4} \geq 1$, $\mathscr{S} = \left\{\frac{5}{4}\right\}$.

10.2.3 La fonction « argument tangente hyperbolique »

Soit y un réel donné. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\text{th}(x) = y$. Déjà, on sait que pour tout réel x, $-1 < \text{th}(x) < 1$. Donc, cette équation n'a pas de solution quand $|y| \geq 1$. Soit alors y un réel élément de $]-1,1[$. Pour x réel,

$$\begin{aligned}\text{th}(x) = y &\Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = y \Leftrightarrow e^{2x}-1 = y(e^{2x}+1) \Leftrightarrow e^{2x}(1-y) = 1+y \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \text{ (car } y \neq 1) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \text{ (car, pour } y \in]-1,1[,\ \frac{1+y}{1-y} > 0).\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel $y \in]-1,1[$, il existe un et un seul réel x tel que $\text{th}(x) = y$, à savoir $x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème 54 (définition et expression de l'argument tangente hyperbolique).
❶ La fonction th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.
❷ La réciproque de cette bijection, appelée **argument tangente hyperbolique** et notée argth, est une bijection de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$.

❸ Pour tout réel x, on a $\text{argth}(\text{th}(x)) = x$ et, pour tout réel $x \in]-1,1[$, $\text{th}(\text{argth}(x)) = x$.

❹ Pour tout couple de réels $(x,y) \in \mathbb{R}\times]-1,1[$, on a $\text{th}(x) = y \Leftrightarrow x = \text{argth}(y)$.

❺ Pour tout réel $x \in]-1,1[$, on a $\text{argth}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Nous vous laissons le soin de démontrer les résultats qui suivent.

Théorème 55 (propriétés de l'argument tangente hyperbolique).

❶ La fonction argth est impaire.

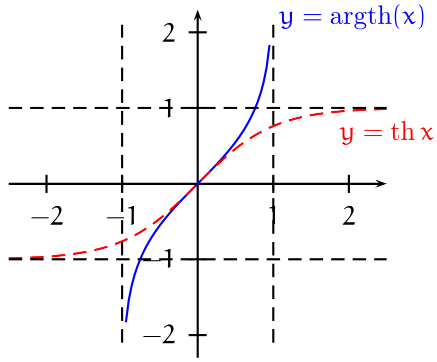
❷ La fonction argth est dérivable sur $]-1,1[$ et pour $x \in]-1,1[$, $(\text{argth})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

❸ La fonction argth est strictement croissante sur $]-1,1[$.

❹ $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \text{argth}(x) = +\infty$.

❺ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{argth}(x)}{x} = 1$.

Graphe.



11 Fonction valeur absolue

11.1 Définition et propriétés de la valeur absolue

Définition 8. Soit x un réel. La **valeur absolue** de x est x si x est positif et $-x$ si x est négatif. Elle est notée $|x|$.

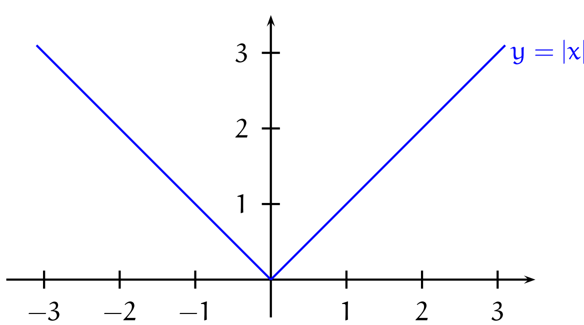
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.}$$

Donc, $|-2,3| = 2,3$ et $|4| = 4$. Dans tous les cas, il s'agissait d'obtenir le nombre sans son signe.

On peut exprimer la valeur absolue d'un nombre à l'aide des fonctions usuelles : $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \sqrt{x^2}$. On notera une bonne fois pour toutes que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = |x| \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^+,\ (\sqrt{x})^2 = x.}$$

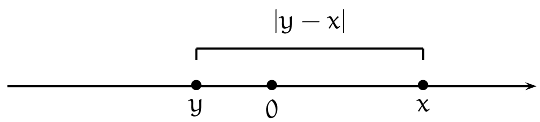
La fonction « valeur absolue » est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et non dérivable en 0. Si on pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = |x|$, alors, pour $x < 0$, $f'(x) = -1$ et pour $x > 0$, $f'(x) = 1$. Voici le graphe de cette fonction :



Une conséquence du graphique précédent est le théorème 56 qui peut aussi se montrer numériquement.

Théorème 56. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq x$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq -x$.

Rappelons l'interprétation géométrique de la valeur absolue d'un nombre. Sur l'axe réel, pour tout réel x, $|x|$ est la distance usuelle de x à 0 et plus généralement, pour tous réels x et y, $|y - x|$ est la distance usuelle de x à y.



Numériquement, on a

Théorème 57. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|y - x| = \begin{cases} y - x & \text{si } y \geq x \\ x - y & \text{si } x \geq y \end{cases}$.

$|y - x|$ est égal au plus grand des deux nombres x ou y moins le plus petit.

La vision géométrique de la valeur absolue fournit rapidement les résultats qui suivent.

Théorème 58.
1) $\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2$, $|A| = |B| \Leftrightarrow B = A$ ou $B = -A$.
2) $\forall (A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $|A| = B \Leftrightarrow A = B$ ou $A = -B$.
3) $\forall (A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $|A| \leq B \Leftrightarrow -B \leq A \leq B$.
4) $\forall (A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $|A| \geq B \Leftrightarrow A \geq B$ ou $A \leq -B$.

On doit aussi connaître le lien avec les intervalles. Soient x_0 un réel et r un réel strictement positif. Pour tout réel x, on a :

$$\begin{gathered} |x - x_0| = r \Leftrightarrow x = x_0 - r \text{ ou } x = x_0 + r \\ |x - x_0| \leq r \Leftrightarrow x \in [x_0 - r, x_0 + r] \\ |x - x_0| < r \Leftrightarrow x \in]x_0 - r, x_0 + r[\\ |x - x_0| \geq r \Leftrightarrow x \in]-\infty, x_0 - r] \cup [x_0 + r, +\infty[\\ |x - x_0| > r \Leftrightarrow x \in]-\infty, x_0 - r[\cup]x_0 + r, +\infty[. \end{gathered}$$

Ces résultats sont géométriquement évidents.

Exercice 29. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :
1) $|x + 3| = 5$, $|x + 3| \leq 5$ et $|x + 3| > 5$.
2) $|2x - 5| = |x^2 - 4|$.
3) $|x + 12| \leq |x^2 - 8|$.

Solution.
1) Soit $x \in \mathbb{R}$. $|x + 3| = 5 \Leftrightarrow x = -3 - 5$ ou $x = -3 + 5 \Leftrightarrow x = -8$ ou $x = 2$.
$|x + 3| \leq 5 \Leftrightarrow -3 - 5 \leq x \leq -3 + 5 \Leftrightarrow -8 \leq x \leq 2$ et $|x + 3| > 5 \Leftrightarrow x < -8$ ou $x > 2$.
2) Soit x un réel.

$$\begin{aligned} |2x - 5| = |x^2 - 4| &\Leftrightarrow x^2 - 4 = 2x - 5 \text{ ou } x^2 - 4 = -2x + 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ ou } x^2 + 2x - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \left\{1, -1 - \sqrt{10}, -1 + \sqrt{10}\right\}. \end{aligned}$$

3) Plutôt que d'étudier de nombreux cas de figures, il est plus judicieux d'élever au carré les deux membres (positifs) de l'inéquation en remarquant que la carré d'un réel est encore le carré de sa valeur absolue.

$$\begin{aligned} |x + 12| \leq |x^2 - 8| &\Leftrightarrow (x + 12)^2 \leq (x^2 - 8)^2 \Leftrightarrow ((x^2 - 8) - (x + 12))((x^2 - 8) + (x + 12)) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - x - 20)(x^2 + x + 4) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 20 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -4] \cup [5, +\infty[. \end{aligned}$$

Analysons maintenant le comportement de la valeur absolue avec les deux opérations $+$ et $\times$. La valeur absolue se comporte bien avec la multiplication et mal avec l'addition, comme le montre le théorème suivant :

Théorème 59 (propriétés algébriques de la valeur absolue).

❶ (valeur absolue et produit)

a) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |xy| = |x|\times|y|$.

b) $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|}$.

c) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\ \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

d) $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ |x^n| = |x|^n$.

e) $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \forall n\in\mathbb{Z},\ |x^n| = |x|^n$.

❷ (valeur absolue et somme)

a) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x+y|\leq |x|+|y|$.
De plus, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (|x+y| = |x|+|y| \Leftrightarrow x=0$ ou $y=0$ ou ($x\neq 0$ et $y\neq 0$ et x et y ont même signe)).

b) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x-y|\geq \big||x|-|y|\big|$.

Démonstration. Les résultats du 1) sont immédiats. Pour l'inégalité triangulaire, il suffit de comparer les carrés des deux membres :

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 \leq x^2+2|xy|+y^2 = (|x|+|y|)^2.$$

De plus, l'inégalité écrite est une égalité si et seulement si $xy = |xy|$ ce qui équivaut à $xy\geq 0$ ou encore à $x=0$ ou $y=0$ ou $x\neq 0$ et $y\neq 0$ et x et y de mêmes signes.

Pour l'inégalité du b), on écrit, pour x et y réels donnés : $|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y|+|y|$ et donc $|x|-|y|\leq |x-y|$. Mais alors, en échangeant les rôles de x et y, on a aussi $|y|-|x|\leq |x-y| = |y-x|$. Maintenant, l'un des deux nombres $|x|-|y|$ ou $|y|-|x|$ est $\big||x|-|y|\big|$ et finalement $\big||x|-|y|\big|\leq |x-y|$.

❏

◇ L'inégalité $|x+y|\leq |x|+|y|$ s'appelle l'**inégalité triangulaire**. Elle est plus généralement valable dans $\mathbb{C}$ où elle s'interprète effectivement dans un triangle.
La maîtrise de la valeur absolue est vitale pour l'analyse et on sera fréquemment amené à majorer ou minorer des valeurs absolues. Les seules règles pratiques à disposition sont les suivantes :

$$\boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \big||x|-|y|\big| \leq |x\pm y| \leq |x|+|y|.}$$

c'est à dire que la valeur absolue d'une somme ou d'une différence est dans tous les cas plus petite que la **somme** des valeurs absolues et plus grande que la différence de ces valeurs absolues.

◇ Dans l'activité qui consiste à majorer une valeur absolue, une erreur est fréquemment commise. En voici un exemple : pour $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right| \leq \left|\sin\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$. Ceci est faux. Par exemple, pour $x=-\dfrac{\pi}{2}$, $\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right| = |-1-\dfrac{1}{2}| = \dfrac{3}{2} > \dfrac{1}{2}$. L'erreur de manipulation vient du résultat suivant.

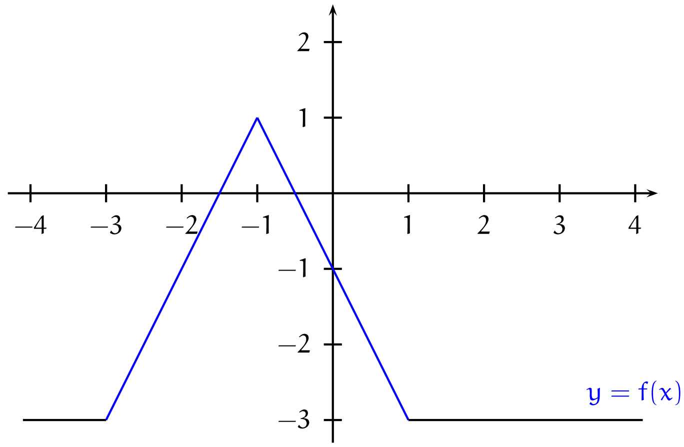
La fonction « valeur absolue » n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$. Donc, on ne majore pas à l'« intérieur » d'une valeur absolue.

11.2 Tableau de valeurs absolues. Fonctions affines par morceaux et continues

On se contentera de l'étude d'un exemple. On veut construire le graphe de la fonction $f\ :\ x\mapsto |x+3|-2|x+1|+|1-x|-3$. Pour cela, on a besoin d'une expression simplifiée de f, c'est à dire sans valeurs absolues. Par exemple, si $-3\leq x\leq -1$, alors $x+3\geq 0$, $x+1\leq 0$ et $1-x\geq 0$, ce qui permet d'écrire $|x+3| = x+3$, $|x+1| = -x-1$ et $|1-x| = 1-x$. On peut représenter les différents cas de figure dans un **tableau de valeurs absolues** :

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$\lvert x+3\rvert$	$-x-3$	$x+3$	$x+3$	$x+3$	
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$	
$\lvert 1-x\rvert$	$-x+1$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$	
$f(x)$	-3	$2x+3$	$-2x-1$	-3	

On est alors en mesure de construire le graphe de cette fonction.



On peut noter que l'utilisation d'un tableau n'est absolument pas obligatoire. Il est en fait bien plus efficace d'écrire en lignes. Par exemple, pour $-3 \leq x \leq -1$, $|x+3|-2|x+1|+|1-x|-3 = (x+3)-2(-x-1)+(1-x)-3 = 2x+3$.

Une telle fonction est appelée **fonction affine par morceaux**. Les fonctions du type $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |x-a_k|$ $(*)$, λ_1,..., λ_n réels, a_1,...,a_n réels deux à deux distincts, ont ce type de graphe. Inversement, on peut montrer que si f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et affine par morceaux sur ce segment alors f peut s'écrire sous la forme $(*)$.

11.3 Minimum et maximum d'un couple de réels

Définition 9. Soient x et y deux réels. Le plus grand de ces deux réels est appelé le **maximum** de l'ensemble des deux réels x et y et est noté $\max\{x, y\}$. Le plus petit de ces deux réels est appelé le **minimum** de l'ensemble des deux réels x et y et est noté $\min\{x, y\}$.

On a immédiatement :

Théorème 60.

❶ $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \max\{x, -x\}$.

❷ $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq |x|$ et $-x \leq |x|$.

Le maximum et le minimum de deux réels peut s'exprimer à partir de la valeur absolue.

Théorème 61. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \max(x, y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$ et $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$.

Démonstration . Soient x et y deux réels. $|y-x|$ est le plus grand de ces deux nombres moins le plus petit. En ajoutant $x+y$ à cette différence, on fait disparaître le plus petit des deux et on obtient deux fois le plus grand. Pour l'autre égalité, l'expression $-|x-y|$ peut être pensée comme le plus petit des deux nombres moins le plus grand, et le raisonnement est identique. ❑

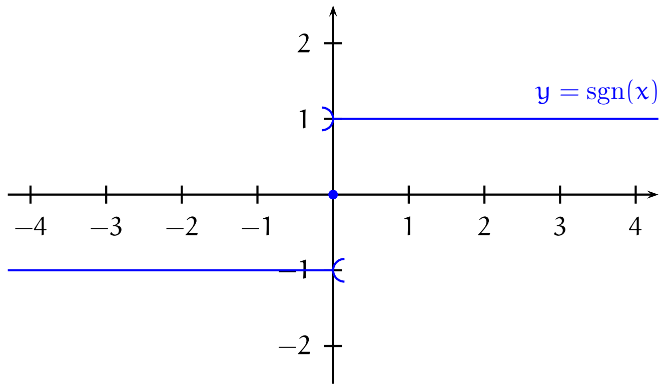
11.4 La fonction « signe »

Définition 10. Soit x un réel.
Si x est non nul, le signe de x, noté $\text{sgn}(x)$, est le nombre $\frac{x}{|x|}$ et si x est nul le signe de x est 0.

On obtient immédiatement à partir de la définition

Théorème 62. $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Le graphe de la fonction signe est le suivant :



Théorème 63. $\forall x \in \mathbb{R},\ x = \mathrm{sgn}(x) \times |x|$.

Ce résultat signifie qu'un réel est composé de son signe et de sa valeur absolue qui, elle, ne comporte plus de signe.

La fonction signe est volontiers utilisée pour diminuer la quantité de calcul. Par exemple, pour simplifier ou dériver l'expression $\frac{\sqrt{|x|}}{x}$, plutôt que de faire deux calculs, un si $x > 0$ et un si $x < 0$, on peut n'en faire qu'un seul : soient x un réel non nul et ε le signe de x. Alors,

$$\frac{\sqrt{|x|}}{x} = \frac{\sqrt{\varepsilon x}}{\varepsilon \times \varepsilon x} = \frac{\sqrt{\varepsilon x}}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon x}\sqrt{\varepsilon x}} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon x}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|x|}}.$$

Si maintenant on doit dériver cette expression, on peut de nouveau n'effectuer qu'un seul calcul sans séparer les cas $x < 0$ et $x > 0$.

$$\left(\frac{\sqrt{|x|}}{x}\right)' = \left(\varepsilon.(\varepsilon x)^{-1/2}\right)' = \varepsilon \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \varepsilon \times (\varepsilon x)^{-3/2} = \frac{-1}{2|x|^{3/2}}.$$

Le signe d'un réel non nul obeit aux règles de calcul évidentes suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Soient } x \text{ un réel non nul et } \varepsilon \text{ le signe de } x.\\ 1)\ x = \varepsilon|x|,\ 2)\ |x| = \varepsilon x,\ 3)\ \varepsilon^2 = 1,\ 4)\ \dfrac{1}{\varepsilon} = \varepsilon.\end{array}}$$

12 Fonction « partie entière »

12.1 Définition et propriétés de la partie entière

Définition 11. Soit x un réel.
La partie entière de x, notée $E(x)$ (ou aussi $[x]$), est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

Par exemple, $E(2,7) = 2$, $E(3) = 3$, $E(-1,2) = -2$. A partir de la définition précédente, on a immédiatement :

Théorème 64. Soit x un réel et k un entier relatif.

$$\boxed{k = E(x) \Leftrightarrow k \leq x < k+1 \Leftrightarrow x-1 < k \leq x}.$$

On a ainsi deux encadrements classiques à connaître :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ E(x) \leq x < E(x)+1 \text{ et } x-1 < E(x) \leq x}.$$

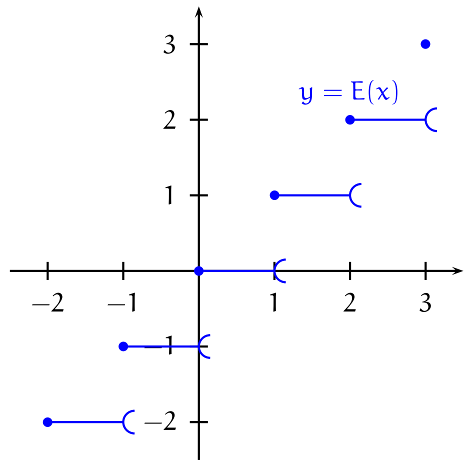
Théorème 65. La fonction « partie entière »est croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soient x et y deux réels tels que $x \leq y$. $E(x)$ est un entier relatif inférieur ou égal à x et donc à y. Comme $E(y)$ est le plus grand des entiers relatifs inférieurs ou égaux à y, on a bien $E(x) \leq E(y)$. ❏

Théorème 66. $\forall x \in \mathbb{R},\ E(x+1) = E(x)+1$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $E(x) \leq x < E(x)+1$, puis $E(x)+1 \leq x+1 < (E(x)+1)+1$. Comme $E(x)+1 \in \mathbb{Z}$, $E(x+1) = E(x)+1$. ❏

Voici le graphe de la fonction « partie entière ».



Le petit arc de cercle à la fin de chaque trait horizontal à droite signifie que le dernier point n'est pas compris, comme le [à droite dans $[2,3[$ signifie que 3 n'est pas compris. La fonction « partie entière » n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Elle est continue en tout réel non entier, continue à droite mais pas à gauche en tout entier.

Attention, en général $E(x+y) \neq E(x)+E(y)$. Par exemple, $E(2,7+3,6) = E(6,3) = 6$ alors que $E(2,7)+E(3,6) = 2+3 = 5$.

Exercice 30. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ E(x+y) \geq E(x)+E(y)$.

Solution. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $E(x)+E(y)$ est un entier relatif inférieur ou égal à $x+y$ et comme $E(x+y)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x+y$, on a $E(x)+E(y) \leq E(x+y)$.
Plus précisément, $E(x) \leq x < E(x)+1$ et $E(y) \leq y < y+1$. Donc, $E(x)+E(y) \leq x+y < E(x)+E(y)+2$.
Par suite, puisque $E(x)+E(y) \in \mathbb{Z}$, $E(x+y) = E(x)+E(y)$ ou $E(x+y) = E(x)+E(y)+1$ suivant que $x+y$ soit dans l'intervalle $[E(x)+E(y), E(x)+E(y)+1[$ ou dans l'intervalle $[E(x)+E(y)+1, E(x)+E(y)+2[$).

Exercice 31. Soit x un réel. Déterminer l'unique entier relatif k tel que $x-2k\pi \in]-\pi,\pi]$ et l'unique entier k' tel que $x-2k'\pi \in [0,2\pi[$.

Solution.
1) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$. $-\pi < x-2k\pi \leq \pi \Leftrightarrow x-\pi \leq 2k\pi < x+\pi \Leftrightarrow \dfrac{x}{2\pi}-\dfrac{1}{2} \leq k < \dfrac{x}{2\pi}+\dfrac{1}{2}$.
Dans l'intervalle $\left[\dfrac{x}{2\pi}-\dfrac{1}{2}, \dfrac{x}{2\pi}+\dfrac{1}{2}\right[$, il y a un et un seul entier.
Si $\dfrac{x}{2\pi}-\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, cet entier est $E\left(\dfrac{x}{2\pi}-\dfrac{1}{2}\right)+1 = E\left(\dfrac{x}{2\pi}+\dfrac{1}{2}\right)$ qui est l'entier k cherché.
Si $\dfrac{x}{2\pi}-\dfrac{1}{2} \in \mathbb{Z}$, $k = E\left(\dfrac{x}{2\pi}-\dfrac{1}{2}\right)$. (On note que $\dfrac{x}{2\pi}-\dfrac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ si et seulement si x est congru à π modulo 2π).
2) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k' \in \mathbb{Z}$.

$$0 \leq x-2k'\pi < 2\pi \Leftrightarrow \frac{x}{2\pi}-1 < k' \leq \frac{x}{2\pi} \Leftrightarrow \frac{x}{2\pi}-1 < k' \text{ et } k' \leq \frac{x}{2\pi}$$
$$\Leftrightarrow k' \leq \frac{x}{2\pi} < k'+1 \Leftrightarrow k' = E\left(\frac{x}{2\pi}\right).$$

Exercice 32. n étant un entier naturel non nul donné, combien y-a-t-il d'entiers pairs entre 0 et n, 0 et n compris ? Combien y-a-t-il d'entiers impairs ?

Solution. Un entier pair est un entier de la forme $2p$, où p est un entier. Or,

$$0 \leq 2p \leq n \Leftrightarrow 0 \leq p \leq \frac{n}{2} \Leftrightarrow 0 \leq p \leq E\left(\frac{n}{2}\right).$$

Le nombre d'entiers pairs est donc le nombre d'entiers de la forme $2p$ où p est un entier vérifiant $0 \leq p \leq E\left(\dfrac{n}{2}\right)$. Il y a donc
$E\left(\dfrac{n}{2}\right)+1$ ou encore $E\left(\dfrac{n}{2}+1\right)$ entiers pairs compris au sens large entre 0 et n. De même,

$$0 \leq 2p+1 \leq n \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq p \leq \frac{n-1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq p \leq E\left(\frac{n-1}{2}\right).$$

Il y a donc $E\left(\frac{n-1}{2}\right)+1$ ou encore $E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ entiers impairs compris au sens large entre 0 et n.

Exercice 33. Trouver l'exposant de 2 et de 5 dans la décomposition en facteurs premiers de 1000!. Par combien de zéros finit l'écriture décimale 1000! ?

Solution.
1000! est le produit $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \ldots \times 998 \times 999 \times 1000$. Dans la décomposition en facteurs premiers des nombres 2, 6, 10, 14..., c'est à dire des nombres pairs non divisibles par 4, le facteur premier 2 apparaît une et une seule fois. Dans la décomposition en facteurs premiers des nombres 4, 12, 20,..., c'est à dire des nombres divisibles par 4 mais non divisibles par 8, le facteur premier 2 apparaît exactement deux fois. Dans la décomposition en facteurs premiers des nombres 8, 24, 40..., c'est à dire des nombres divisibles par 8 mais non divisibles par 16, le facteur premier 2 apparaît exactement trois fois.

Pour obtenir, l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de 1000!, nous allons compter 1 pour chaque multiple de 2 inférieur à 1000, puis rajouter 1 pour chaque multiple de 4 inférieur à 1000, puis rajouter encore 1 pour chaque multiple de 8 inférieur à 1000, et encore 1 par multiple de 16,... et encore 1 par multiple de 512. Ainsi, par exemple, pour l'entier 24, nous l'aurons compté une fois en tant que multiple de 2, une fois en tant que multiple de 4 et une fois en tant que multiple de 8, soit au total 3 fois, 3 étant l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de 24.

Il y a $E\left(\frac{1000}{2}\right)=500$ nombres pairs compris au sens large entre 1 et 1000 ($1 \leq 2p \leq 1000 \Leftrightarrow 1 \leq p \leq 500$), puis $E\left(\frac{1000}{4}\right)=250$ multiple de 4, puis $E\left(\frac{1000}{8}\right)=125$, multiple de 8,... et un multiple de 512 compris au sens large entre 1 et 1000. L'exposant de 2 cherché est donc

$$E\left(\frac{1000}{2}\right)+E\left(\frac{1000}{4}\right)+\ldots E\left(\frac{1000}{512}\right)=\sum_{k=1}^{9} E\left(\frac{1000}{2^k}\right)=500+250+125+62+31+15+7+3+1=994.$$

De même, l'esposant de 5 dans la décomposition en facteurs premiers de 1000! est

$$\sum_{k=1}^{4} E\left(\frac{1000}{5^k}\right)=200+40+8+1=249.$$

L'entier 1000! peut donc s'écrire $2^{994} \times 3^{\alpha} \times 5^{249} \times 7^{\beta} \ldots$. ou encore $(2 \times 5)^{249} \times 2^{745} \times 3^{\alpha} \times 5^{0} \times 7^{\beta} \ldots$ en enfin $10^{249} \times K$ où K est un entier non divisible par 10 car non divisible par 5. Finalement,

l'écriture décimale de 1000! se termine par 249 zéros.

12.2 La fonction « partie décimale »

Définition 12. La partie décimale d'un réel x, notée $d(x)$, est la différence entre ce réel et sa partie entière.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ d(x)=x-E(x).}$$

Par exemple, $d(3,7)=0,7$ et $d(-3,7)=0,3$ car $-3,7=-4+0,3$.

Théorème 67. La fonction d est 1-périodique ou encore $\forall x \in \mathbb{R},\ d(x+1)=d(x)$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après le théorème 66, page 59,

$$d(x+1)=(x+1)-E(x+1)=x+1-E(x)-1=x-E(x)=d(x).$$

❑

Voici le graphe de la fonction « partie décimale ».