Intégration

CHAPITRE 6

■ Plan

Introduction

On va définir et étudier dans ce chapitre l'intégrale d'une application continue par morceaux sur un segment, à partir de l'intégrale des applications en escalier sur ce segment, par un passage à la limite. La section 6.1 sert de préparation nécessaire aux sections suivantes.

Dans les sections 6.2 et 6.3, on étudie l'intégrale d'une application continue par morceaux sur un segment.

Le lien entre intégration et dérivation s'effectue dans la section 6.4, où l'on voit que la primitivation est en quelque sorte l'opération réciproque de la dérivation.

Prérequis

- Fonctions réelles ou complexes d'une variable réelle, chapitre 4.
- Dérivation (chapitre 5) pour l'étude de la section 6.4.

Objectifs

- Définition « rigoureuse » de l'intégrale d'une application continue par morceaux sur un segment.
- Étude de l'application $f \longmapsto \int_a^b f$ (linéarité, croissance, ...).
- Extension de la notion d'intégrale au cas des fonctions à valeurs complexes.
- Étude du lien entre intégration et dérivation.
- Les deux outils du calcul intégral : le changement de variable et l'intégration par parties.

Nous allons étudier l'intégration des applications continues par morceaux sur un segment.

6.1 Intégration des applications en escalier sur un segment

Dans tout ce paragraphe 6.1, (a,b) désigne un couple de réels tel que $a < b$.

6.1.1 Algèbre des applications en escalier sur un segment

Cette étude a été amorcée en 4.1.5 p. 128.

L'intégrale d'une application continue par morceaux sur un segment sera définie (§ 6.2.3 p. 214) plus loin par « passage à la limite » à partir d'intégrales d'applications en escalier, d'où l'étude préalable de celles-ci.

Définition 1

On appelle **subdivision** (ou **partage**) de $[a;\, b]$ toute famille finie $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ telle que :

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b \quad (n \geqslant 1).$$

On note ici $\mathcal{S}$ l'ensemble des subdivisions de $[a;\, b]$. Pour toute $s = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{S}$, le **pas** (ou **module**) de s est le réel $p(s)$ défini par : $p(s) = \underset{0 \leqslant i \leqslant n-1}{\text{Max}} (a_{i+1} - a_i)$.

Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies de $[a;\, b]$ contenant $\{a,b\}$. Il est clair que l'application $\theta : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{F}$ qui, à chaque subdivision $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a;\, b]$, associe l'ensemble $\{a_i;\, 0 \leqslant i \leqslant n\}$ est une bijection. L'ensemble $\mathcal{F}$ est naturellement muni de la relation d'ordre définie par l'inclusion ; et il est clair que $\mathcal{F}$ est stable par réunion et intersection :

$$\forall (F,G) \in \mathcal{F}^2, \quad (F \cup G \in \mathcal{F},\ F \cap G \in \mathcal{F}).$$

La bijection θ permet de transporter l'ordre $(\subset)$ et les lois internes $(\cup, \cap)$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{S}$. On définit ainsi dans $\mathcal{S}$:

- une relation d'ordre, notée $\prec$:

$$\forall (s,s') \in \mathcal{S}^2, \quad (s \prec s' \Longleftrightarrow \theta(s) \subset \theta(s'))$$

(on dit alors que s' est **plus fine** que s)

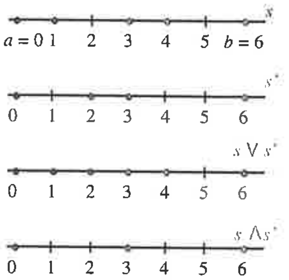
- une loi interne, notée $\vee$:

$$\forall (s,s') \in \mathcal{S}^2, \quad (s \vee s' = \theta^{-1}(\theta(s) \cup \theta(s')))$$

- une loi interne, notée $\wedge$:

$$\forall (s,s') \in \mathcal{S}^2, \quad (s \wedge s' = \theta^{-1}(\theta(s) \cap \theta(s'))).$$

On peut dire brièvement que :
$s \vee s'$ s'obtient en ordonnant la liste réunissant les points de s et de s'
$s \wedge s'$ s'obtient en ordonnant la liste des points communs à s et s'



Exemple : Prenons $a = 0$, $b = 6$, $s = (0,1,3,4,6)$, $s' = (0,2,3,6)$. On a alors $s \vee s' = (0,1,2,3,4,6)$, $s \wedge s' = (0,3,6)$; s et s' ne sont pas comparables pour $\prec$.

Définition 2

1) Une application $e : [a;\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **en escalier** si et seulement s'il existe $s = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathcal{S}$ et $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\forall i \in \{0, \ldots, n-1\},\ \forall x \in]a_i;\, a_{i+1}[,\ e(x) = \lambda_i.$$

On note ici $E(a,b)$ l'ensemble des applications en escalier sur $[a;\, b]$.

2) Etant donnés $s = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathcal{S}$ et $e \in E(a,b)$, on dit que s est **adaptée** à e si et seulement si, pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, la restriction de e à $]a_i;\, a_{i+1}[$ est constante.

Remarques :

1) Par définition, si $e \in E(a,b)$, alors il existe au moins une subdivision de $[a;\, b]$ adaptée à e.

2) Si s est adaptée à e, alors toute subdivision s' plus fine que s (c'est-à-dire telle que $s \prec s'$) est aussi adaptée à e.

3) Pour $e \in E(a,b)$, l'ensemble des subdivisions de $[a;\, b]$ adaptées à e admet un plus petit élément (pour l'ordre $\prec$ dans $\mathcal{S}$), qui est la subdivision formée de a, b et des éventuels points de discontinuité de e.

Proposition 1

$E(a,b)$ est une algèbre unitaire pour les lois usuelles, sous-algèbre unitaire de $\mathbb{R}^{[a;b]}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 1 \in E(a,b) \\ \forall (e_1,e_2) \in (E(a,b))^2, \quad \begin{cases} e_1 + e_2 \in E(a,b) \\ e_1 e_2 \in E(a,b) \end{cases} \\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall e \in E(a,b),\ \lambda e \in E(a,b). \end{cases}$$

Preuve : Si s_1 (resp. s_2) est une subdivision de $[a;b]$ adaptée à e_1 (resp. e_2), alors $e_1 + e_2$ et e_1e_2 sont constantes sur chaque intervalle ouvert joignant deux points consécutifs de $s_1 \vee s_2$. Cf. aussi 4.1.5 p. 129.

La Proposition suivante est immédiate :

Rappel de notation :

$|e| : x \longmapsto |e(x)|$

Car : $\begin{cases} \mathrm{Sup}(e_1,e_2) = \\ \quad \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + |e_1 - e_2|) \\ \mathrm{Inf}(e_1,e_2) = \\ \quad \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - |e_1 - e_2|) \end{cases}$

Proposition 2

$$\forall e \in E(a,b), \quad |e| \in E(a,b).$$

Remarque : Il en résulte (cf. 4.1.2 p. 125) que, si $(e_1,e_2) \in (E(a,b))^2$, alors $\mathrm{Sup}(e_1,e_2) \in E(a,b)$ et $\mathrm{Inf}(e_1,e_2) \in E(a,b)$.

6.1.2 Intégrale d'une application en escalier sur un segment

Proposition-Définition 1

Soient $e \in E(a,b)$, $s = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{S}$ adaptée à e, et, pour chaque $i \in \{0,\dots,n-1\}$, soit λ_i la valeur de e sur $]a_i;a_{i+1}[$. Le réel $\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)\lambda_i$ ne dépend pas de la subdivision s adaptée à e ; ce réel est appelé l'**intégrale** de e sur $[a;b]$, et est noté $\int_a^b e$, ou $\int_a^b e(x)\,dx$.

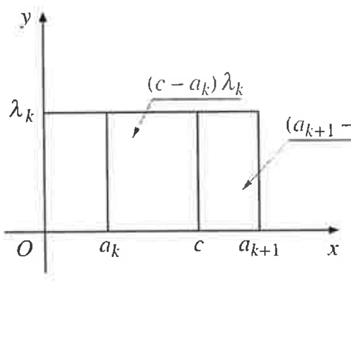
A priori, $I(e,s)$ dépend de e et de s ; nous allons montrer que $I(e,s)$ ne dépend pas de s.

Rappel de notation :
$\theta(s) = \{a_0, \dots, a_n\}$.

Preuve : Notons $I(e,s) = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)\lambda_i$.

1) Soient $s = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{S}$ adaptée à e et, pour chaque $i \in \{0,\dots,n-1\}$, λ_i la valeur de e sur $]a_i;a_{i+1}[$. Soit $c \in [a;b]$ tel que $c \notin \theta(s)$; il existe $k \in \{0,\dots,n-1\}$ tel que $a_k < c < a_{k+1}$.

Notons $s' = (a_0,\dots,a_k,c,a_{k+1},\dots,a_n)$, c'est-à-dire $s' = \theta^{-1}(\theta(s) \cup \{c\})$.



L'application en escalier e est constante égale à λ_k sur $]a_k;a_{k+1}[$ et :

$(c - a_k)\lambda_k + (a_{k+1} - c)\lambda_k = (a_{k+1} - a_k)\lambda_k$.

D'où $I(e,s') = I(e,s)$.

Ceci montre que $I(e,s)$ n'est pas modifié lorsqu'on rajoute un point à s.

On passe de s à t en rajoutant un nombre fini de points.

2) Soient $s,t \in \mathcal{S}$ adaptées à e et telles que $s \prec t$. Par une récurrence immédiate utilisant le 1), on voit que : $I(e,s) = I(e,t)$.

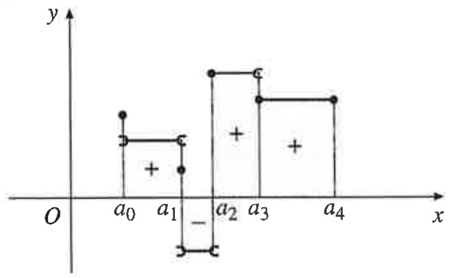
3) Soient $s_1,s_2 \in \mathcal{S}$ adaptées à e. D'après *2)* :

$$\begin{cases} I(e,s_1) = I(e,s_1 \vee s_2) \\ I(e,s_2) = I(e,s_1 \vee s_2) \end{cases}, \quad \text{d'où } I(e,s_1) = I(e,s_2).$$

■

Remarques :

1)



Dans un plan euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct, on interprète géométriquement $\int_a^b e$ comme une somme d'aires algébriques de rectangles.

2) $I(e,s)$ ne dépend pas des valeurs de e en les points de discontinuité.

3) Soient $e_1,e_2 \in E(a,b)$ coïncidant sur $[a;b]$ sauf en un nombre fini de points. Il existe alors $s \in \mathcal{S}$ adaptée à la fois à e_1 et à e_2 et telle que, sur chaque intervalle ouvert joignant deux points consécutifs de s, e_1 et e_2 coïncident ; on a donc $\int_a^b e_1 = \int_a^b e_2$.

Proposition 2

L'application $\begin{array}{l} E(a,b) \longrightarrow \mathbb{R} \\ e \longmapsto \int_a^b e \end{array}$ est linéaire, c'est-à-dire :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall (e_1,e_2) \in (E(a,b))^2, \quad \int_a^b (\alpha e_1 + e_2) = \alpha \int_a^b e_1 + \int_a^b e_2.$$

Preuve : Il existe $s = (a_0,\dots,a_n) \in \mathcal{S}$ adaptée à la fois à e_1 et e_2 (on peut prendre $s = s_1 \vee s_2$, où s_1 est adaptée à e_1 et s_2 est adaptée à e_2) ; puis, pour chaque $i \in \{0,\dots,n-1\}$, il existe $(\lambda_i,\mu_i) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in]a_i;a_{i+1}[, \quad \begin{cases} e_1(x) = \lambda_i \\ e_2(x) = \mu_i \end{cases}.$$

On a alors : $\quad \forall x \in]a_i;a_{i+1}[, \ (\alpha e_1 + e_2)(x) = \alpha\lambda_i + \mu_i, \quad$ d'où :

Pour une application en escalier sur un segment, l'intégrale se ramène à un symbole $\sum$

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha e_1 + e_2) &= \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)(\alpha\lambda_i + \mu_i) \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\lambda_i + \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\mu_i \\ &= \alpha \int_a^b e_1 + \int_a^b e_2. \end{aligned}$$

■

Proposition 3

1) $\forall e \in E(a,b), \quad \left(e \geqslant 0 \Longrightarrow \int_a^b e \geqslant 0\right)$

2) $\forall (e_1,e_2) \in (E(a,b))^2, \quad \left(e_1 \leqslant e_2 \Longrightarrow \int_a^b e_1 \leqslant \int_a^b e_2\right)$

3) $\forall e \in E(a,b), \quad \left|\int_a^b e\right| \leqslant \int_a^b |e|.$

Preuve :

1) Avec les notations de la Proposition-Définition 1, p. 209, puisque $e \geqslant 0$, on a : $\forall i \in \{0,\dots,n-1\}$, $\lambda_i \geqslant 0$, et donc :

$$\int_a^b e = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\lambda_i \geqslant 0.$$

2) $e_1 \leqslant e_2 \iff e_2 - e_1 \geqslant 0 \implies \int_a^b (e_2 - e_1) \geqslant 0 \iff \int_a^b e_2 - \int_a^b e_1 \geqslant 0$

$$\iff \int_a^b e_1 \leqslant \int_a^b e_2.$$

3) D'abord, $|e| \in E(a,b)$ (cf. 6.1.1 Prop. 2 p. 209). Puis, comme $-|e| \leqslant e \leqslant |e|$, on déduit $-\int_a^b |e| \leqslant \int_a^b e \leqslant \int_a^b |e|$, c'est-à-dire $\left|\int_a^b e\right| \leqslant \int_a^b |e|$.

Rappel de notation :

$|e| : x \longmapsto |e(x)|$

Au lieu de $e\big|_{[a;b]}$ et $e\big|_{[b;c]}$, on note souvent encore e, et on a alors : $\int_a^b e + \int_b^c e = \int_a^c e$.

Proposition 4 Relation de Chasles

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a < b < c$, et $e \in E(a,c)$. Alors les restrictions de e à $[a;b]$ et à $[b;c]$ sont en escalier, et :

$$\int_a^b e\big|_{[a;b]} + \int_b^c e\big|_{[b;c]} = \int_a^c e.$$

Preuve : Il existe une subdivision de $[a;c]$ adaptée à e et contenant b. En notant $s = (a_0,\dots,a_n)$, $b = a_k$, λ_i la valeur de e sur $]a_i;a_{i+1}[$ pour chaque i de $\{0,\dots,n-1\}$, on a :

$$\int_a^b e\big|_{[a;b]} + \int_b^c e\big|_{[b;c]} = \sum_{i=0}^{k-1}(a_{i+1}-a_i)\lambda_i + \sum_{i=k}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\lambda_i$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\lambda_i = \int_a^c e.$$

6.2 Intégration des applications continues par morceaux sur un segment

Dans les §§ 6.2.1 à 6.2.5, (a,b) désigne un couple de réels tel que $a < b$.

6.2.1 Algèbre des applications continues par morceaux sur un segment

La notion d'application continue par morceaux sur un segment a été définie en 4.3.1 3) p. 146.

Proposition 1

L'ensemble $\mathcal{CM}$ des applications continues par morceaux sur $[a;b]$ est une sous-algèbre unitaire de $\mathbb{R}^{[a;b]}$ pour les lois usuelles, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 1 \in \mathcal{CM} \\ \forall (f,g) \in (\mathcal{CM})^2, \quad \begin{cases} f+g \in \mathcal{CM} \\ fg \in \mathcal{CM} \end{cases} \\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall f \in \mathcal{CM},\ \lambda f \in \mathcal{CM} \end{cases}.$$

De plus : $\forall f \in \mathcal{CM}, |f| \in \mathcal{CM}$.

Rappel de notation :

$|f| : x \longmapsto |f(x)|$

Ainsi, on pourra ramener l'étude d'une application continue par morceaux sur $[a; b]$ à deux études : celle d'une application continue et celle d'une application en escalier.

Preuve : analogue à celle de la Prop. 1 de 6.1.1. p. 209. ∎

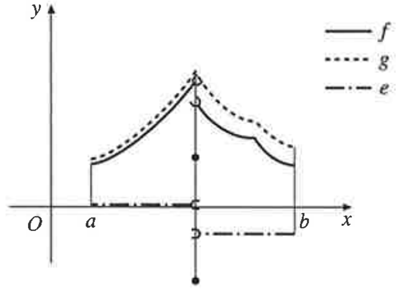
Proposition 2

Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. Il existe $g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $e : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en escalier telles que : $f = g + e$.

Pour obtenir g à partir de f, on garde f sur $[a; c[$ et on décale f (parallèlement à l'axe $y'y$) sur $]c; b]$ de façon à raccorder les deux morceaux.

Preuve : Récurrence sur le nombre ν de points de discontinuité de f

- Si $\nu = 0$, on peut prendre $g = f, e = 0$.
- Si $\nu = 1$, notons c le point de discontinuité de f.



Considérons $g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in [a; c[\\ \lim\limits_{c^-} f \text{ si } x = c \\ f(x) - (\lim\limits_{c^+} f - \lim\limits_{c^-} f) \text{ si } x \in]c; b]. \end{cases}$$

Il est clair que g est continue en tout point de $[a; b] - \{c\}$;

$$\text{de plus : } \begin{cases} \lim\limits_{c^-} g = \lim\limits_{c^-} f \\ g(c) = \lim\limits_{c^-} f \\ \lim\limits_{c^+} g = \lim\limits_{c^+} f - (\lim\limits_{c^+} f - \lim\limits_{c^-} f) = \lim\limits_{c^-} f \end{cases}$$

ce qui montre que g est continue en c.

En notant $e = f - g$, on a bien : $f = g + e$ et $e \in E(a,b)$.

- Supposons la propriété établie pour les applications continues par morceaux admettant ν points de discontinuité, et soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et admettant $\nu + 1$ points de discontinuité. En procédant comme pour le cas $\nu = 1$, on construit $g_1 : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux admettant ν points de discontinuité et $e_1 : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en escalier telles que $f = g_1 + e_1$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $e_2 : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en escalier telles que $g_1 = g + e_2$. Finalement $f = g + (e_1 + e_2)$ où g est continue et $e_1 + e_2$ est en escalier ∎

6.2.2 Approximation d'une application continue par morceaux sur un segment par des applications en escalier

On confond ici le réel ε et l'application constante $\varepsilon : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \varepsilon$.

Théorème

Soient $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $\varphi, \psi : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en escalier telles que :

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \quad \text{et} \quad \psi - \varphi \leqslant \varepsilon.$$

En utilisant 6.2.1 Prop. 2, on se ramène au cas d'une application continue.

Preuve : D'après 6.2.1 Prop. 2, il existe $g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $e_1 : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en escalier telles que $f = g + e_1$. Cherchons d'abord $\varphi_1, \psi_1 : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en escalier telles que : $\varphi_1 \leqslant g \leqslant \psi_1$ et $\psi_1 - \varphi_1 \leqslant \varepsilon$; il est clair qu'alors, en notant $\varphi = \varphi_1 + e_1$, $\psi = \psi_1 + e_1$, le couple (φ, ψ) conviendra :

$$(\varphi,\psi) \in \big(E(a,b)\big)^2, \quad \varphi = \varphi_1 + e_1 \leqslant g + e_1 = f \leqslant \psi_1 + e_1 = \psi,$$
$$\psi - \varphi = \psi_1 - \varphi_1 \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque g est continue sur le segment $[a;\, b]$, d'après le **théorème de Heine** (4.3.6 Th. p. 158), g est uniformément continue sur $[a;\, b]$.

Il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x',x'') \in [a;\, b]^2, \quad (|x' - x''| \leqslant \eta \Longrightarrow |g(x') - g(x'')| \leqslant \varepsilon).$$

On décompose l'intervalle $[a;\, b]$ en intervalles successifs de longueur $\leqslant \eta$.

Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{N} \leqslant \eta$ (par exemple : $N = \mathrm{E}(\dfrac{b-a}{\eta}) + 1$). On remarquera que η et N dépendent de ε.

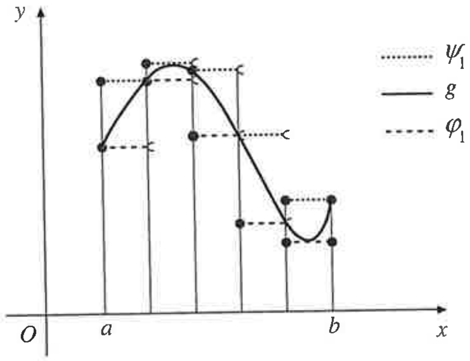
Notons, pour $k \in \{0,\dots,N\}$, $a_k = a + k\,\dfrac{b-a}{N}$, et considérons la subdivision « régulière » $s = (a_k)_{0 \leqslant k \leqslant N}$ de $[a;\, b]$.

Pour chaque k de $\{0,\dots,N-1\}$, g est continue sur le segment $[a_k;\, a_{k+1}]$, donc (cf. 4.3.4 Th. p. 152) $g|_{[a_k;\, a_{k+1}]}$ est bornée ; notons :

$$m_k = \operatorname*{Inf}_{x \in [a_k; a_{k+1}]} g(x), \quad M_k = \operatorname*{Sup}_{x \in [a_k; a_{k+1}]} g(x).$$

Considérons les applications en escalier $\varphi_1, \psi_1 : [a;\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$\begin{cases} \forall k \in \{0,\dots,N-1\},\ \forall x \in [a_k;\, a_{k+1}[, \quad (\varphi_1(x) = m_k \text{ et } \psi_1(x) = M_k) \\ \varphi_1(b) = m_{N-1}, \quad \psi_1(b) = M_{N-1}. \end{cases}$$



Il est clair que : $\varphi_1 \leqslant g \leqslant \psi_1$.

Soit $k \in \{0,\dots,N-1\}$. On a, pour tout (x',x'') de $[a;\, b]^2$:

$$\begin{aligned} (x',x'') \in [a_k;\, a_{k+1}]^2 &\Longrightarrow |x' - x''| \leqslant a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{N} \leqslant \eta \\ &\Longrightarrow |g(x') - g(x'')| \leqslant \varepsilon \Longrightarrow g(x') \leqslant \varepsilon + g(x''). \end{aligned}$$

Utilisation de la définition de M_k comme borne supérieure de g sur $[a_k;\, a_{k+1}]$.

En fixant x'' dans $[a_k;\, a_{k+1}]$ et en passant à la borne supérieure lorsque x' décrit $[a_k;\, a_{k+1}]$, on déduit :

$$M_k \leqslant \varepsilon + g(x''), \quad \text{et donc : } M_k - \varepsilon \leqslant g(x'')$$

Puis, en passant à la borne inférieure lorsque x'' décrit $[a_k;\, a_{k+1}]$: $M_k - \varepsilon \leqslant m_k$, d'où :

$$M_k - m_k \leqslant \varepsilon.$$

Il en résulte :

$$\forall k \in \{0,\dots,N-1\},\ \forall x \in [a_k;\, a_{k+1}[, \quad \psi_1(x) - \varphi_1(x) = M_k - m_k \leqslant \varepsilon.$$

Comme de plus : $\psi_1(b) - \varphi_1(b) = M_{N-1} - m_{N-1} \leqslant \varepsilon$, on conclut : $\psi_1 - \varphi_1 \leqslant \varepsilon$.

6.2.3 Intégrale d'une application continue par morceaux sur un segment

Autrement dit, on considère les applications en escalier $\leqslant f$ et les applications en escalier $\geqslant f$, puis les intégrales de ces applications en escalier.

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.

Notons $\left\{\begin{array}{ll} A = \{\varphi \in E(a,b); & \varphi \leqslant f\} \\ B = \{\psi \in E(a,b); & f \leqslant \psi\} \end{array}\right|$, qui sont des parties de $E(a,b)$,

et $\left\{\begin{array}{l} \mathcal{A} = \left\{\int_a^b \varphi;\ \varphi \in A\right\} \\ \mathcal{B} = \left\{\int_a^b \psi;\ \psi \in B\right\} \end{array}\right|$, qui sont des parties de $\mathbb{R}$.

1) • $A \neq \varnothing$, car, d'après 6.2.2 Th. p. 212 (en prenant $\varepsilon = 1$, par exemple), il existe $\varphi_0 \in A$; donc $\mathcal{A} \neq \varnothing$.
De même, il existe $\psi_0 \in B$; donc $B \neq \varnothing$, puis $\mathcal{B} \neq \varnothing$.
• On a : $\forall \varphi \in A, \quad \varphi \leqslant f \leqslant \psi_0$,

donc : $\forall \varphi \in A, \quad \int_a^b \varphi \leqslant \int_a^b \psi_0$,

ce qui montre que $\mathcal{A}$ est majorée (par $\int_a^b \psi_0$).

De même, $\mathcal{B}$ est minorée (par $\int_a^b \varphi_0$).

Ainsi, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux parties non vides de $\mathbb{R}$, respectivement majorée et minorée ; donc (cf. 1.2.3 *1)* p. 52), $\mathcal{A}$ admet une borne supérieure et $\mathcal{B}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$; notons :

$$\mu_1 = \mathrm{Sup}(\mathcal{A}), \quad \mu_2 = \mathrm{Inf}(\mathcal{B}).$$

2) Montrons $\mu_1 = \mu_2$.
• Comme : $\forall \varphi \in A, \forall \psi \in B, \varphi \leqslant \psi$, on a, en fixant φ dans A et en passant à la **borne inférieure** lorsque ψ décrit B :

$$\forall \varphi \in A, \quad \int_a^b \varphi \leqslant \mu_2,$$

puis, en passant à la **borne supérieure** lorsque φ décrit A : $\mu_1 \leqslant \mu_2$.
• Soit $\varepsilon > 0$. D'après 6.2.2 Th. p. 212, il existe $(\varphi,\psi) \in (E(a,b))^2$ tel que :

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \quad \text{et} \quad \psi - \varphi \leqslant \varepsilon.$$

On a alors $\varphi \in A$, $\psi \in B$ et : $\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi = \int_a^b (\psi - \varphi) \leqslant \int_a^b \varepsilon = (b-a)\varepsilon$,

d'où : $\mu_2 \leqslant \int_a^b \psi \leqslant (b-a)\varepsilon + \int_a^b \varphi \leqslant (b-a)\varepsilon + \mu_1$.

Ainsi : $\forall \varepsilon > 0, \quad \mu_2 - \mu_1 \leqslant (b-a)\varepsilon$, donc $\mu_2 - \mu_1 \leqslant 0, \quad \mu_2 \leqslant \mu_1$.
Finalement : $\mu_1 = \mu_2$.

Par exemple, on fait tendre ε vers 0.

Remarque : les parties $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}$ sont adjacentes.

Résumons l'étude :

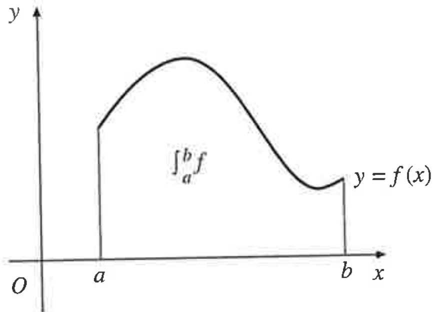
Proposition-Définition

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.

Les parties $\left\{\int_a^b \varphi;\ \varphi \in E(a,b),\ \varphi \leqslant f\right\}$ et $\left\{\int_a^b \psi;\ \psi \in E(a,b),\ f \leqslant \psi\right\}$ de $\mathbb{R}$ admettent respectivement une borne supérieure et une borne inférieure dans $\mathbb{R}$, et ces deux bornes sont égales.

On appelle **intégrale** de f (sur $[a;b]$), et on note $\int_a^b f$ (ou : $\int_{[a;b]} f$, ou : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$) cette borne commune :

$$\int_a^b f = \underset{\substack{\varphi\in E(a,b)\\ \varphi\leqslant f}}{\operatorname{Sup}} \left(\int_a^b \varphi\right) = \underset{\substack{\psi\in E(a,b)\\ f\leqslant \psi}}{\operatorname{Inf}} \left(\int_a^b \psi\right).$$



$\int_a^b f$ représente l'**aire algébrique** de la portion du plan comprise entre les droites d'équation $x=a$, $x=b$, l'axe des x, et la courbe représentative de f (le repère étant orthonormé).

Remarque : La Définition précédente prolonge celle de 6.1.2 p. 209 car, si $e : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est en escalier, alors

$$\left\{\int_a^b \varphi;\ \varphi \in E(a,b),\ \varphi \leqslant e\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\int_a^b \psi;\ \psi \in E(a,b),\ e \leqslant \psi\right\}$$

ont en commun le réel $\int_a^b e$.

6.2.4 Propriétés algébriques

Propriété importante.

Proposition

L'application $\begin{array}{l}\mathcal{CM} \longrightarrow \mathbb{R}\\ f \longmapsto \int_a^b f\end{array}$ est une forme linéaire, c'est-à-dire :

$$\forall (f,g) \in (\mathcal{CM})^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\quad \int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Preuve :

1) Soient $f,g \in \mathcal{CM}$. Montrons : $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après 6.2.2 Th. p. 212, il existe $\varphi_1,\psi_1,\varphi_2,\psi_2 \in E(a,b)$ telles que :

$$\begin{cases}\varphi_1 \leqslant f \leqslant \psi_1\\ \psi_1 - \varphi_1 \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}\varphi_2 \leqslant g \leqslant \psi_2\\ \psi_2 - \varphi_2 \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\end{cases}.$$

En notant $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ et $\psi = \psi_1 + \psi_2$, on a :

$$(\varphi,\psi) \in \big(E(a,b)\big)^2,\quad \varphi \leqslant f+g \leqslant \psi,\quad \psi - \varphi \leqslant \varepsilon,$$

d'où :

$$\begin{cases}\displaystyle\int_a^b (f+g) \leqslant \int_a^b \psi \leqslant (b-a)\varepsilon + \int_a^b \varphi = (b-a)\varepsilon + \int_a^b \varphi_1 + \int_a^b \varphi_2\\ \displaystyle\qquad\qquad \leqslant (b-a)\varepsilon + \int_a^b f + \int_a^b g\\ \displaystyle\int_a^b f + \int_a^b g \leqslant \int_a^b \psi_1 + \int_a^b \psi_2 = \int_a^b \psi \leqslant (b-a)\varepsilon + \int_a^b \varphi \leqslant (b-a)\varepsilon + \int_a^b (f+g),\end{cases}$$

et donc, en faisant tendre ε vers 0^+ :

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

2) Soient $f \in \mathcal{CM}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après 6.2.2 Th. p. 212, il existe $\varphi_1, \psi_1 \in E(a,b)$ telles que :

$$\varphi_1 \leqslant f \leqslant \psi_1 \quad \text{et} \quad \psi_1 - \varphi_1 \leqslant \varepsilon.$$

• Supposons $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

En notant $\varphi = \lambda\varphi_1$, $\psi = \lambda\psi_1$, on a :

$$(\varphi,\psi) \in \big(E(a,b)\big)^2, \quad \varphi \leqslant \lambda f \leqslant \psi, \quad \psi - \varphi \leqslant \lambda\varepsilon,$$

d'où :

$$\left\{\begin{aligned} &\int_a^b (\lambda f) \leqslant \int_a^b \psi \leqslant (b-a)\lambda\varepsilon + \int_a^b \varphi = (b-a)\lambda\varepsilon + \lambda \int_a^b \varphi_1 \\ &\qquad \leqslant (b-a)\lambda\varepsilon + \lambda \int_a^b f \\ &\lambda \int_a^b f \leqslant \lambda \int_a^b \psi_1 \leqslant \lambda(b-a)\varepsilon + \lambda \int_a^b \varphi_1 = \lambda(b-a)\varepsilon + \int_a^b \varphi \\ &\qquad \leqslant \lambda(b-a)\varepsilon + \int_a^b (\lambda f), \end{aligned}\right.$$

et donc, en faisant tendre ε vers 0^+ :

$$\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f.$$

• En notant $A_f = \{\varphi \in E(a,b);\ \varphi \leqslant f\}$, $B_f = \{\psi \in E(a,b);\ f \leqslant \psi\}$, A_{-f}, B_{-f} de même, il est clair que les applications $\begin{array}{c} A_f \longrightarrow B_{-f} \\ \varphi \longmapsto -\varphi \end{array}$ et $\begin{array}{c} B_f \longrightarrow A_{-f} \\ \psi \longmapsto -\psi \end{array}$ sont des bijections, d'où :

$$\begin{aligned} \int_a^b (-f) &= \operatorname*{Sup}_{\varphi \in A_{-f}} \left(\int_a^b \varphi\right) = \operatorname*{Sup}_{\psi \in B_f} \left(\int_a^b -\psi\right) = \operatorname*{Sup}_{\psi \in B_f} \left(-\int_a^b \psi\right) \\ &= -\operatorname*{Inf}_{\psi \in B_f} \left(\int_a^b \psi\right) = -\int_a^b f. \end{aligned}$$

On ramène le cas d'un coefficient $\leqslant 0$ au cas d'un coefficient $\geqslant 0$ en utilisant $-f$.

On déduit, pour $\lambda \in \mathbb{R}_-$:

$$\int_a^b (\lambda f) = \int_a^b (-\lambda)(-f) = -\lambda \int_a^b (-f) = -\lambda\left(-\int_a^b f\right) = \lambda \int_a^b f.$$

Finalement :

$$\forall (f,g) \in (\mathcal{CM})^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \int_a^b (\lambda f + g) = \int_a^b (\lambda f) + \int_a^b g = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Remarque : Si deux applications f,g de $\mathcal{CM}$ ne diffèrent qu'en un nombre fini de points, alors $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$. En effet, il existe $e : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en escalier et à « paliers » nuls, telle que $g = f + e$, d'où $\displaystyle\int_a^b g = \int_a^b f + \int_a^b e = \int_a^b f$.

6.2.5 Propriétés relatives à l'ordre

Les propriétés de ce paragraphe sont très utiles en pratique..

Proposition 1

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. Si $f \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$.

...issance de l'intégration.

Preuve : Puisque $0 \in E(a,b)$ et $0 \leqslant f$, on a $\displaystyle\int_a^b 0 \leqslant \int_a^b f$, c'est-à-dire $\displaystyle 0 \leqslant \int_a^b f$.

Corollaire 1

Si $f,g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues par morceaux, alors :

$$f \leqslant g \Longrightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

...rcice 6.2.5.

Preuve : $\displaystyle f \leqslant g \Longleftrightarrow g - f \geqslant 0 \Longrightarrow \int_a^b (g-f) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$

Corollaire 2

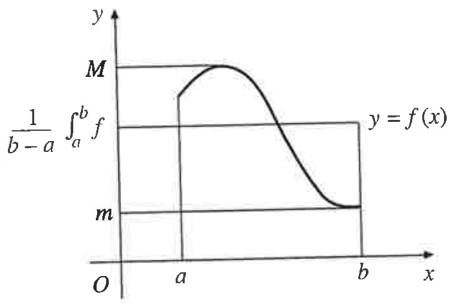
Soient $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, $m = \operatorname*{Inf}_{x\in[a;b]} f(x)$, $M = \operatorname*{Sup}_{x\in[a;b]} f(x)$.

On a :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f \leqslant M(b-a).$$

Définition

Pour $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, on appelle **valeur moyenne de f sur** $[a;b]$ le réel $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f$.



La valeur moyenne de f est la hauteur d'un rectangle (à côtés parallèles aux axes et à base $[a;b]$) d'aire $\displaystyle\int_a^b f$.

Avec les notations du Corollaire 2, la valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est comprise entre m et M.

st

Proposition 2

Pour toute f de $\mathcal{CM}$: $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|.$

ts,

ue

Preuve : $\left\{\begin{array}{l} f \leqslant |f| \\ -f \leqslant |f| \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b |f| \\ \displaystyle -\int_a^b f = \int_a^b (-f) \leqslant \int_a^b |f| \end{array}\right. \Longrightarrow \displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|.$

...our majorer la valeur absolue de ...intégrale d'un produit, il pourra être ...dicieux de garder un des deux facteurs ...en valeur absolue) dans l'intégrale, ici ...e facteur g.

Corollaire 3

1) Soient $f,g \in \mathcal{CM}$, $||f||_\infty = \operatorname*{Sup}_{x\in[a;b]} |f(x)|$. On a :

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant ||f||_\infty \int_a^b |g|.$$

2) Soient $f \in \mathcal{CM}$, $||f||_\infty = \underset{x\in[a;b]}{\text{Sup}} |f(x)|$. On a :

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant (b-a)||f||_\infty.$$

Preuve :

1) $\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \int_a^b |fg| \leqslant \int_a^b ||f||_\infty |g| = ||f||_\infty \int_a^b |g|$.

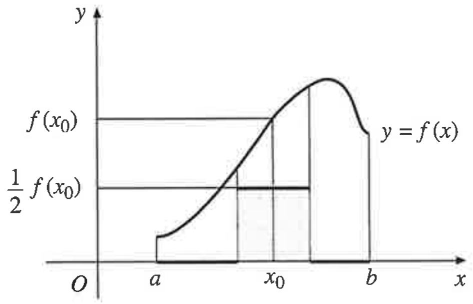
2) Appliquer 1) à $g = 1$. ∎

Proposition 3

Soient $f \in \mathcal{CM}$ telle que $f \geqslant 0$, et $x_0 \in [a;b]$ tel que f soit continue en x_0 et $f(x_0) > 0$. On a alors $\int_a^b f > 0$.

Exercice 6.2.2.

Preuve :



Puisque f est continue en x_0 et que $f(x_0) > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in [a;b] \cap [x_0-\alpha;\ x_0+\alpha]$,

$$f(x) \geqslant \frac{1}{2}f(x_0).$$

Notons $[u;v] = [a;b] \cap [x_0-\alpha; x_0+\alpha]$, et $e : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application en escalier définie par :

$$e(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [a;u[\\ \frac{1}{2}f(x_0) & \text{si } x \in [u;v]. \\ 0 & \text{si } x \in]v;b] \end{cases}$$

On a alors $f \geqslant e$, donc $\int_a^b f \geqslant \int_a^b e = \frac{1}{2}(v-u)\, f(x_0) > 0$. ∎

Corollaire 4

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si $\left\{\begin{array}{l} f \text{ est continue} \\ f \geqslant 0 \\ \int_a^b f = 0 \end{array}\right|$, alors $f = 0$.

Ce corollaire (qui se déduit de la Prop. 3 en raisonnant par l'absurde) est d'une grande importance (par exemple, dans l'étude de produits scalaires définis par des intégrales).

Rappelons qu'on suppose $a < b$.

Exercices 6.2.1, 6.2.4, 6.2.6, 6.2.7.

Remarque : D'après le Corollaire 4, on a :

1) Si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et si $\int_a^b f^2 = 0$ (où $f^2 = ff$), alors $f^2 = 0$, et donc $f = 0$.

2) Si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et $\int_a^b |f| = 0$, alors $|f| = 0$, et donc $f = 0$.

Théorème **Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales**

Pour toutes applications $f,g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux, on a :

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$

On introduit un paramètre réel λ.

Preuve : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g)^2 \geqslant 0$, d'où en développant :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\quad \left(\int_a^b f^2\right)\lambda^2 + 2\left(\int_a^b fg\right)\lambda + \int_a^b g^2 \geqslant 0.$$

• Supposons $\displaystyle\int_a^b f^2 = 0$.

Si $\displaystyle\int_a^b fg > 0$, alors $\displaystyle 2\left(\int_a^b fg\right)\lambda + \int_a^b g^2 \underset{\lambda \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$, contradiction.

De même, si $\displaystyle\int_a^b fg < 0$, alors $\displaystyle 2\left(\int_a^b fg\right)\lambda + \int_a^b g^2 \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$, contradiction.

Donc $\displaystyle\int_a^b fg = 0$, et l'inégalité voulue est triviale.

• Supposons $\displaystyle\int_a^b f^2 > 0$.

Si un trinôme (en λ) est $\geqslant 0$ pour toute valeur réelle de λ, alors son discriminant est $\leqslant 0$.

D'après 1.2.3 3) p. 55, étude des trinômes réels, le **discriminant** est $\leqslant 0$, c'est-à-dire :

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 - \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right) \leqslant 0.$$

Proposition 4 **Etude du cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour des intégrales d'applications continues**

Soient $f,g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues. Pour que $\displaystyle\left(\int_a^b fg\right)^2 = \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$,

il faut et il suffit que (f,g) soit lié, c'est-à-dire qu'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ tel que $\alpha f + \beta g = 0$.

Preuve :

1) Supposons (f,g) lié.

Si $f = 0$, la conclusion est évidente.

Si $f \neq 0$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g = \alpha f$, et on a donc :

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 = \left(\int_a^b \alpha f^2\right)^2 = \alpha^2\left(\int_a^b f^2\right)^2 = \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b \alpha^2 f^2\right)$$
$$= \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$

2) Réciproquement, supposons qu'il y ait égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Si $f = 0$, alors (f,g) est lié.

On réutilise le trinôme en λ introduit dans la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Supposons $f \neq 0$. Puisque f est continue, on a alors $\displaystyle\int_a^b f^2 > 0$ (cf. Prop. 3 p. 218), d'où :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\quad \int_a^b (\lambda f + g)^2 = \left(\int_a^b f^2\right)\left(\lambda + \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b f^2}\right)^2.$$

En particulier, en choisissant $\lambda = -\dfrac{\int_a^b fg}{\int_a^b f^2}$, on obtient : $\int_a^b (\lambda f + g)^2 = 0$,

Exercice 6.2.3.

puis (cf. Remarque *1)* p. 218) $\lambda f + g = 0$ et donc (f,g) est lié. ∎

Les méthodes à retenir

Propriétés relatives à l'ordre

- Le Corollaire 4 p. 218 est très utile : si $a < b$ et si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, positive ou nulle, telle que $\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$ (ex. 6.2.1, 6.2.5).
- **Pour trouver une limite d'intégrale**, on peut essayer de majorer, minorer ou encadrer cette intégrale (ex. 6.2.6). Le lecteur verra, dans les chapitres suivants du cours d'analyse de première et de seconde années, de nombreuses recherches de limites d'intégrales.

Exercices

6.2.1 Soit $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ continue telle que : $f \neq 0$ et $\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$ (où $f^2 = ff$). Montrer $f = 1$.

6.2.2 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \dots, f_n : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et non toutes nulles. Montrer qu'il existe $u_1, \dots, u_n : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n f_i u_i\right) = 1$.

6.2.3 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer :

$$\left(\int_a^b f(x)\cos x\,dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sin x\,dx\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b (f(x))^2 dx,$$

et étudier le cas d'égalité

6.2.4 Soit $f : [0;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $\geqslant 0$, telle que : $\forall n \in \{0,1,2,3,4\}$,

$$\int_0^\pi f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = (-1)^n(2n+1)f(0).$$

Démontrer : $f = 0$.

6.2.5 Déterminer : $\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x^3} \frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2}$.

6.2.6 Relation de Chasles

Le remplacement de $\int_a^b f + \int_b^c f$ par $\int_a^c f$ permet de ne faire apparaître qu'une seule intégrale.

Le remplacement de $\int_a^c f$ par $\int_a^b f + \int_b^c f$ permet de faire intervenir un point intermédiaire b.

Les deux situations se rencontrent.

Proposition 1

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a < b < c$, et $f : [a;c] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. Alors les restrictions de f à $[a;b]$ et à $[b;c]$ sont continues par morceaux et on a :

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f.$$

On a ici noté $\int_a^b f$ au lieu de $\int_a^b f|_{[a;b]}$.

Preuve :

Il est clair que $f|_{[a;\,b]}$ et $f|_{[b;\,c]}$ sont continues par morceaux.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après 6.2.2 Th. p. 212, il existe $\varphi_1,\ \psi_1 \in E(a,b)$, $\varphi_2,\ \psi_2 \in E(b,c)$ telles que :

$$\begin{cases} \varphi_1 \leqslant f|_{[a;\,b]} \leqslant \psi_1 \\ \psi_1 - \varphi_1 \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi_2 \leqslant f|_{[b;\,c]} \leqslant \psi_2 \\ \psi_2 - \varphi_2 \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}.$$

En notant $\varphi,\psi : [a;\,c] \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies par :

$$\begin{cases} \forall x \in [a;\,b], & (\varphi(x) = \varphi_1(x) \text{ et } \psi(x) = \psi_1(x)) \\ \forall x \in [b;\,c], & (\varphi(x) = \varphi_2(x) \text{ et } \psi(x) = \psi_2(x)) \end{cases},$$

Il est clair que : $(\varphi,\psi) \in (E(a,c))^2$, $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$, d'où :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_a^c f \leqslant \int_a^c \psi = \int_a^b \psi_1 + \int_b^c \psi_2 \leqslant (b-a)\varepsilon + \int_a^b \varphi_1 + \int_b^c \varphi_2 \leqslant (b-a)\varepsilon + \int_a^b f + \int_b^c f \\ \displaystyle\int_a^b f + \int_b^c f \leqslant \int_a^b \psi_1 + \int_b^c \psi_2 \leqslant (b-a)\varepsilon + \int_a^b \varphi_1 + \int_b^c \varphi_2 = (b-a)\varepsilon + \int_a^c \varphi \\ \displaystyle\qquad \leqslant (b-a)\varepsilon + \int_a^c f, \end{cases}$$

et donc, en faisant tendre ε vers 0^+ : $\displaystyle\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f.$

Exercice 6.2.6.

Notation

Notation pour le cas où les bornes sont égales, notation pour le cas où les bornes « ne sont pas dans l'ordre ».

$$\begin{cases} \displaystyle\int_a^b f = 0 & \text{si } a = b \\ \displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f & \text{si } a > b \text{ et } f : [b;\,a] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est continue par morceaux.} \end{cases}$$

Les propriétés algébriques (6.2.4 p. 215) sont inchangées, et les propriétés relatives à l'ordre (6.2.5 p. 216) peuvent être aisément modifiées suivant la position relative de a et b.

Dans la pratique, on aura avantage à faire intervenir des intégrales « bornes dans l'ordre », pour éviter les erreurs dans la manipulation d'inégalités.

Proposition 2 — Relation de Chasles

Ici a,b,c ne sont pas nécessairement dans l'ordre.

Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$, et f une application à valeurs réelles continue par morceaux sur un segment contenant a,b,c. On a alors : $\displaystyle\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$

Preuve :

- Si ($a = b$ ou $a = c$ ou $b = c$), la propriété est évidente.
- Si $a < b < c$, voir Prop. 1 p. 220.
- Si $a < c < b$, d'après Prop. 1 p. 220, on a : $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, d'où $\displaystyle\int_a^c f = \int_a^b f - \int_c^b f = \int_a^b f + \int_b^c f.$
- Les autres cas ($b < a < c$, $b < c < a$, $c < a < b$, $c < b < a$) se traitent de manière analogue.

On déduit facilement, par récurrence sur l'entier N, la proposition suivante :

Proposition 3

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $a_0,\ldots,a_N \in \mathbb{R}$, f une application à valeurs réelles continue par morceaux sur le plus grand segment contenant $a_0,\ldots,a_N$.

On a alors : $\displaystyle\int_{a_0}^{a_N} f = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f.$

Les méthodes à retenir

Relation de Chasles

- La relation de Chasles permet de **séparer une intégrale en une somme de plusieurs intégrales portant sur la même fonction**.

Exercices

6.2.6 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que : $f \geqslant 0$ et $\int_a^b f = 0$.

Montrer que f est nulle sauf en un nombre fini de points.

6.2.7 Soit $f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $c \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que : $\begin{cases} \forall x \in]0; c[, & f(x) > 0 \\ \forall x \in \left]c; \frac{\pi}{2}\right[, & f(x) < 0 \end{cases}$

Montrer :

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos x \, dx\right)^2 + \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x \, dx\right)^2 > 0.$$

6.2.7 Sommes de Riemann

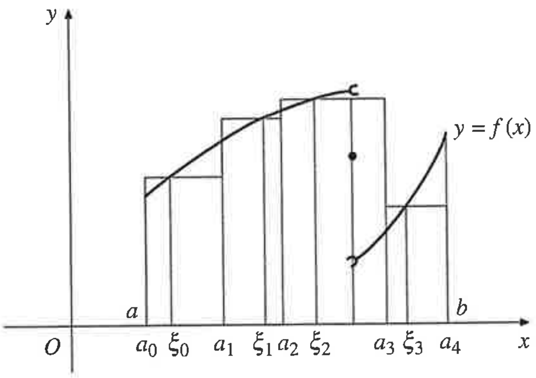
Dans ce § 6.2.7, (a,b) désigne un couple de réels tel que $a < b$.

Définition

Soient $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, $s = (a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision de $[a; b]$, et, pour chaque $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, ξ_i un élément de $[a_i; a_{i+1}]$. On appelle **somme de Riemann associée à** $f, s, (\xi_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ le réel $\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i)$.

Cette somme de Riemann dépend de la fonction f, de la subdivision s, et des points $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$.

Ainsi, la somme de Riemann considérée est l'intégrale d'une application en escalier e définie par : $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\forall x \in]a_i; a_{i+1}[$, $e(x) = f(\xi_i)$.



Théorème

Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

Les sommes de Riemann relatives à f convergent toutes vers $\int_a^b f$ lorsque le pas de la subdivision tend vers 0, c'est-à-dire :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour toute subdivision $s = (a_0, \ldots, a_n)$

de $[a;\, b]$ de pas $\leqslant \alpha$, et pour toute famille $(\xi_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$

telle que $(\forall i \in \{0, \ldots, n-1\},\ \xi_i \in [a_i;\, a_{i+1}])$, on ait :

$$\left| \int_a^b f - \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque f est continue sur le segment $[a;\, b]$, f est **uniformément continue sur** $[a;\, b]$ (**théorème de Heine**, 4.3.6 Théorème, p. 158). Il existe donc $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (x', x'') \in [a;\, b]^2,\ (|x' - x''| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}).$$

Soit $s = (a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision de $[a;\, b]$ de pas $\leqslant \alpha$, c'est-à-dire telle que :

$$\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad a_{i+1} - a_i \leqslant \alpha.$$

Soit $i \in \{0, \ldots, n-1\}$; on a : $\forall x \in [a_i;\, a_{i+1}],\ |x - \xi_i| \leqslant a_{i+1} - a_i \leqslant \alpha$, donc :

$$\forall x \in [a_i;\, a_{i+1}],\ |f(x) - f(\xi_i)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a},$$

d'où :

$$\begin{aligned} \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f - (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right| = \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} (f - f(\xi_i)) \right| &\leqslant \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f - f(\xi_i)| \\ &\leqslant (a_{i+1} - a_i)\, \frac{\varepsilon}{b-a}. \end{aligned}$$

On déduit :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f - \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} f - (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right) \right| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f - (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\, \frac{\varepsilon}{b-a} = (a_n - a_0)\, \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Utilisation de la relation de Chasles pour des intégrales, et manipulation du symbole $\sum$.

Remarques :

1) On peut montrer, en tenant compte dans l'étude précédente d'éventuels points de discontinuité de f, que le résultat précédent reste valable lorsque, plus généralement, f est continue par morceaux sur $[a;\, b]$.

2) Une somme de Riemann ne dépend pas seulement du pas de la subdivision, mais dépend de la subdivision elle-même et des points ξ_i.

3) Si $f : [a;\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est ***k*-lipschitzienne** $(k \in \mathbb{R}_+)$, alors, pour toute subdivision $s = (a_0, \ldots, a_n)$ de $[a;\, b]$ de pas noté $p(s)$ et toute famille $(\xi_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ (telle que : $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\},\ \ \xi_i \in [a_i;\, a_{i+1}]$) :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f - \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right| &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(x) - f(\xi_i)| \mathrm{d}x \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} k \int_{a_i}^{a_{i+1}} |x - \xi_i| \mathrm{d}x \\ &\leqslant k \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} p(s)\ \mathrm{d}x = k(b-a)p(s). \end{aligned}$$

Une preuve plus simple du Théorème précédent, sous l'hypothèse que f est lipschitzienne.

Dans ce cas (f lipschitzienne) le résultat du Théorème est établi sans faire intervenir la notion de continuité uniforme.

Un cas fréquent est celui où la subdivision $(a_0,\dots,a_n)$ est **régulière** (c'est-à-dire : $\forall i \in \{0,\dots,n-1\},\ a_{i+1}-a_i = \dfrac{b-a}{n}$) et où ξ_i vaut a_i (ou a_{i+1}, ou encore $\dfrac{1}{2}(a_i+a_{i+1})$).

D'où le résultat suivant :

Résultat d'utilisation fréquente dans les exercices.

Corollaire

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On a :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\,\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f.$$

En particulier, si f est continue sur $[0;1]$, alors : $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f.$

Exercices 6.2.8, 6.2.9.

Exemple : déterminons $\displaystyle \lim_{n\infty} n\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k^2}$.

On a : $\displaystyle \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k^2} = n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(i+n)^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^2}$.

Comme $f : \begin{array}{l}[0;1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{(1+x)^2}\end{array}$ est continue, le corollaire précédent montre :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^2} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Pour le lien entre intégrales et dérivées, voir § 6.4 p. 228.

Puis $\displaystyle \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$.

Exercice-type résolu

Limite d'une suite dont le terme général ressemble à une somme de Riemann

a) Montrer : $\forall x \in [0;+\infty[,\ 0 \leqslant e^x - 1 - x \leqslant \dfrac{x^2}{2}e^x$.

b) En déduire la limite de la suite de terme général $\displaystyle u_n = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}} - n$.

Solution

a) Considérons les applications $f,g : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définies, pour tout $x \in [0;+\infty[$, par :

$$f(x) = e^x - 1 - x \quad \text{et} \quad g(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}e^x.$$

Conseils

Pour établir des inégalités portant sur une variable réelle, on peut essayer d'étudier des variations de fonctions.

Solution

Ces applications sont indéfiniment dérivables et, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$$

$$g'(x) = \mathrm{e}^x - 1 - \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\mathrm{e}^x, \quad g''(x) = -\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\mathrm{e}^x \leqslant 0.$$

De plus : $f(0) = 0$, $g'(0) = 0$, $g(0) = 0$.

On en déduit les variations de f et de g, et on conclut : $f \geqslant 0$ et $g \leqslant 0$.

Ceci montre l'encadrement :

$$\forall x \in [0\,;+\infty[,\ 0 \leqslant \mathrm{e}^x - 1 - x \leqslant \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x.$$

b) Remarquons d'abord : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n+k}} - 1\right)$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

- D'après *a)*, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|u_n - v_n| = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n+k}} - 1 - \frac{1}{n+k}\right)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2(n+k)^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{n+k}} \leqslant n\frac{1}{2(n+1)^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}}.$$

Comme $\frac{n}{2(n+1)^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, on déduit : $u_n - v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

- D'autre part, comme l'application $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ est continue sur le segment $[0\,;1]$, on a, d'après § 6.2.7 Corollaire p.224 :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \big[\ln(1+x)\big]_0^1 = \ln 2.$$

- Comme $u_n = (u_n - v_n) + v_n$ et que $u_n - v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ et $v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ln 2$, on conclut, par addition :

$$u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ln 2.$$

Conseils

On peut dresser les tableaux de variations de f et de g.

Pour une autre méthode, utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, voir aussi l'exercice 6.4.15 p. 237.

Utilisation de l'inégalité triangulaire.

On majore une somme de n termes par n fois le plus grand terme.

Utilisation du théorème sur les sommes de Riemann.

Les méthodes à retenir

Sommes de Riemann

- **Lorsqu'on cherche la limite d'une suite dont le terme général u_n est une somme indexée par k d'un terme dépendant de k et n,** on peut essayer de faire apparaître une somme de Riemann.
- Dans des cas simples, il s'agit exactement d'une somme de Riemann (ex. 6.2.8 *a)*, *b)*).
- Mais souvent, u_n n'est pas exactement une somme de Riemann. **Essayer alors de construire v_n qui soit une somme de Riemann et qui ressemble à u_n**, de façon que $u_n - v_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ et qu'on puisse trouver la limite de v_n, d'où l'on déduira celle de u_n (ex. 6.2.8 *c)* à *e)*, 6.2.9).
- **Si le terme général u_n proposé contient un symbole de produit,** on peut essayer de se ramener à une somme en utilisant un logarithme (ex. 6.2.8 *f)*).

6.4 Intégration et dérivation

Dans tout ce § 6.4, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Les fonctions envisagées sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

6.4.1 Intégrale fonction de la borne d'en haut

Soient $x_0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux sur I, c'est-à-dire continue par morceaux sur chaque segment inclus dans I. Pour chaque x de I, la restriction de f au segment d'extrémités x_0 et x est continue par morceaux ; nous pouvons donc considérer l'application $F : I \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par : $\forall x \in I, F(x) = \int_{x_0}^{x} f$.

Ainsi $\int_{x_0}^{x} f$ est considéré comme étant fonction de x, figurant dans la borne d'en haut (on dit aussi : borne supérieure) de l'intégrale.

Proposition 1

$$F : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f \end{array} \quad \text{est continue sur } I.$$

Preuve :

Nous allons montrer que, sur tout segment $[a;\, b]$ inclus dans I, F est **lipschitzienne.**

Soit $(a,b) \in I^2$ tel que $a \leqslant b$. Puisque f est continue par morceaux sur $[a;\, b]$, f est bornée sur $[a;\, b]$; notons $M = \underset{x\in[a;b]}{\operatorname{Sup}} |f(x)|$. Pour tout $(x',x'') \in [a;\, b]^2$ tel que, par exemple $x' \leqslant x''$, on a :

$$|F(x'') - F(x')| = \left| \int_{x_0}^{x''} f - \int_{x_0}^{x'} f \right| = \left| \int_{x'}^{x''} f \right| \leqslant \int_{x'}^{x''} |f| \leqslant M(x'' - x').$$

Ceci montre que F est M-lipschitzienne sur $[a;\, b]$, donc continue sur $[a;\, b]$.

Enfin, puisque F est continue sur tout segment $[a;\, b]$ inclus dans I, il est clair que F est continue sur I. ∎

Résultat fondamental.

Proposition 2

- $F : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f \end{array}$ est de classe C^1 par morceaux,
- F est dérivable en tout point x_1 de I en lequel f est continue, et $F'(x_1) = f(x_1)$.

Preuve :

1) Soit $x_1 \in I$ tel que f soit continue en x_1.

Pour tout x de $I - \{x_1\}$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1) \right| &= \frac{1}{|x - x_1|} \left| \int_{x_0}^{x} f - \int_{x_0}^{x_1} f - (x - x_1) f(x_1) \right| \\ &= \frac{1}{|x - x_1|} \left| \int_{x_1}^{x} (f - f(x_1)) \right| \\ &\leqslant \frac{1}{|x - x_1|} \left| \int_{x_1}^{x} |f - f(x_1)| \right|. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque f est continue en x_1, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in I, \quad (|t - x_1| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(t) - f(x_1)| \leqslant \varepsilon).$$

Soit $x \in I - \{x_1\}$ tel que $|x - x_1| \leqslant \eta$. On a alors :

$$\left| \int_{x_1}^{x} |f - f(x_1)| \right| \leqslant \left| \int_{x_1}^{x} \varepsilon \right| = \varepsilon |x - x_1|.$$

On a ainsi montré :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I - \{x_1\}, \left(|x - x_1| \leqslant \eta \Longrightarrow \left| \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1) \right| \leqslant \varepsilon \right),$$

c'est-à-dire : $\dfrac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} \underset{x \to x_1}{\longrightarrow} f(x_1)$.

Ceci montre que F est **dérivable en** x_1, et $F'(x_1) = f(x_1)$.

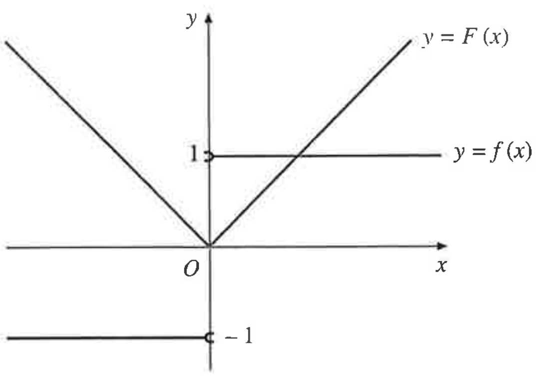
2) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$ et $[a;\, b] \subset I$. Puisque f est continue par morceaux sur $[a;\, b]$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :

$$\begin{cases} a = a_0 < \ldots < a_n = b \\ \text{pour tout } i \in \{0, \ldots, n-1\}, \text{ la restriction de } f \text{ à }]a_i;\, a_{i+1}[\text{ est prolongeable} \\ \quad \text{par continuité sur } [a_i;\, a_{i+1}]. \end{cases}$$

Le résultat précédent montre que F est dérivable sur $[a;\, b] - \{a_0, \ldots, a_n\}$ et que $F'|_{]a_i;a_{i+1}[}$ est prolongeable par continuité en a_i et a_{i+1}. Ainsi F est de classe C^1 par morceaux sur $[a;\, b]$.

Puisque F est de classe C^1 par morceaux sur tout segment inclus dans I, F est de classe C^1 par morceaux sur I.

Exemple :



Considérons la fonction **signe**, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Alors $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto \int_0^x f$ est définie par : $\left\{ \begin{array}{ll} \forall x \in \mathbb{R}_-, & F(x) = \int_0^x f = \int_0^x -1 = -x \\ \forall x \in \mathbb{R}_+, & F(x) = \int_0^x f = \int_0^x 1 = x \end{array} \right|,$

c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = |x|$.

On remarque que F est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, mais non dérivable en 0.

Corollaire 1

Pour tout $p \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, si f est de classe C^p sur I, alors $F : I \longrightarrow \mathbb{K}, \; x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f$ est de classe C^{p+1} sur I et $F' = f$.

Propriété très utile en pratique, surtout dans le cas $p = 0$.

Exercices 6.4.1, 6.4.2, 6.4.4 à 6.4.6.

Corollaire 2

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $u(I) \subset J$ et $v(I) \subset J$, $f : J \longrightarrow \mathbb{K}$ continue.

Ce résultat permet d'étudier les fonctions du type : $x \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt$

L'application $\psi : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f \end{array}$ est de classe C^1 sur I et :

$$\forall x \in I, \quad \psi'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

Preuve : Il suffit de remarquer qu'en notant $F : \begin{array}{l} J \longrightarrow \mathbb{K} \\ y \longmapsto \int_{y_0}^{y} f \end{array}$ (où y_0 est fixé dans J), on a :

$$\forall x \in I, \quad \psi(x) = F(v(x)) - F(u(x)).$$

■

Exemple : L'application $\psi : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_{x}^{2x} \sqrt{1+t^4}\, dt \end{array}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi'(x) = 2\sqrt{1+16x^4} - \sqrt{1+x^4}.$$

6.4.2 Primitives

Définition

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, $\phi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ deux applications.

On dit que ϕ est **une primitive de f sur I** si et seulement si : ϕ est dérivable sur I et $\phi' = f$.

Théorème

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue. Alors :

1) Pour tout x_0 de I, l'application $F : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f \end{array}$ est une primitive de f sur I

2) Pour toute primitive ϕ_0 de f sur I, l'ensemble des primitives de f sur I est $\{\phi_0 + \lambda ; \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Autrement dit, les primitives de f sur I sont égales à ϕ_0, à une constante additive près.

Preuve :

1) D'après le Corollaire 1 du § 6.4.1 p. 229, l'application $F : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f \end{array}$ est de classe C^1 et $F' = f$.

Donc F est une primitive de f sur I. Ainsi f admet au moins une primitive sur I.

2) • Pour tout λ de $\mathbb{K}$, $\phi_0 + \lambda$ est une primitive de f sur I puisque $\phi_0 + \lambda$ est dérivable sur I et que $(\phi_0 + \lambda)' = \phi_0' = f$.

• Réciproquement, soit ϕ une primitive de f sur I. Alors $\phi - \phi_0$ est dérivable sur I et : $(\phi - \phi_0)' = \phi' - \phi_0' = f - f = 0$, donc (cf. 5.3.1 1) Rem. p. 185) $\phi - \phi_0$ est constante ; c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\phi = \phi_0 + \lambda$. ■

Le calcul automatique de certaines primitives fera l'objet du ch. 9 p. 309.

Pour $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue, on note $\int f$, ou $\begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \int f(x)\, dx \end{array}$ l'une quelconque des primitives de f sur I. Cette notation a l'avantage de la brièveté, mais l'inconvénient de désigner non pas une fonction, mais en fait une infinité de fonctions différant entre elles par des constantes additives.

Proposition – Notation

Soient $(a,b) \in I^2, f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue, $\phi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une primitive de f sur I. On a alors : $\displaystyle\int_a^b f = \phi(b) - \phi(a)$. L'élément $\phi(b) - \phi(a)$ de $\mathbb{K}$ est noté $[\phi(x)]_{x=a}^{x=b}$, ou plus simplement $[\phi(x)]_a^b$, et appelé **variation de ϕ de a à b**.

Preuve : D'après le théorème précédent, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\phi = F + \lambda$, d'où

$$\phi(b) - \phi(a) = F(b) - F(a) = \int_{x_0}^b f - \int_{x_0}^a f = \int_a^b f.$$

Remarque :
La Proposition précédente revient à dire que, si $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est de classe C^1 sur I, alors :

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

Exercice-type résolu

Une inégalité portant sur des intégrales

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f,g : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $f(a) = g(a) = 0$.
Montrer :

$$\int_a^b |(fg)'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b |g'(x)|\,\mathrm{d}x\right).$$

Solution

Considérons l'application $\phi : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [a\,;b]$, par :

$$\phi(x) = \left(\int_a^x |f'|\right)\left(\int_a^x |g'|\right) - \int_a^x |(fg)'|.$$

Puisque $|f'|, |g'|, |(fg)'|$ sont continues sur $[a\,;b]$, d'après le Cours, ϕ est de classe C^1 sur $[a\,;b]$ et, pour tout $x \in [a\,;b]$:

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= |f'(x)|\int_a^x |g'| + \left(\int_a^x |f'|\right)|g'(x)| - |(fg)'(x)| \\
&= |f'(x)|\int_a^x |g'| + |g'(x)|\int_a^x |f'| - \big|f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big| \\
&\geqslant |f'(x)|\int_a^x |g'| + |g'(x)|\int_a^x |f'| - |f'(x)|\,|g(x)| - |f(x)|\,|g'(x)| \\
&= |f'(x)|\left(\int_a^x |g'| - |g(x)|\right) + |g'(x)|\left(\int_a^x |f'| - |f(x)|\right).
\end{aligned}$$

D'après le Cours, puisque g est de classe C^1 sur $[a\,;b]$, on a, pour tout $x \in [a\,;b]$:

$$g(x) = g(a) + \int_a^x g' = \int_a^x g',$$

d'où :

$$\int_a^x |g'| - |g(x)| = \int_a^x |g'| - \left|\int_a^x g'\right| \geqslant 0,$$

Conseils

L'application ϕ est obtenue en faisant tout passer dans un membre et en remplaçant b par une variable x.

Utilisation du Corollaire 1 du § 6.4.1.

Utilisation de l'inégalité triangulaire.

Solution

Conseils

et de même : $\int_a^x |f'| - |f(x)| \geqslant 0.$

On conclut : $\forall x \in [a\,;b],\ \phi'(x) \geqslant 0.$

Il en résulte que ϕ est croissante.

On a étudié les variations de ϕ.

D'autre part : $\phi(a) = 0.$

On déduit : $\forall x \in [a\,;b],\ \phi(x) \geqslant 0.$

En particulier, $\phi(b) \geqslant 0$, ce qui est le résultat voulu.

Les méthodes à retenir

Primitives

- Le théorème p. 230 (intégrale dépendant de la borne d'en haut) est souvent la clé d'une résolution (ex. 6.4.2, 6.4.4, 6.4.5).
- On peut souvent **étudier le sens de variations** à l'aide d'une dérivée (ex. 6.4.1, 6.4.2).

Exercices

6.4.1 Soit $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\forall x \in [0; 1],\ 0 \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

Montrer que l'équation $\int_0^x f = 2x - 1$, d'inconnue $x \in [0; 1]$, admet une solution et une seule.

6.4.2 Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue,

$$g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \int_0^x f \end{array}.$$

Montrer que, si g décroît sur $\mathbb{R}$, alors $f = 0$.

6.4.3 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer :

$$\forall x \in [a; b],\ |f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\left(|f(a) + f(b)| + \int_a^b |f'|\right).$$

6.4.4 Soit $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in [0; +\infty[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant k \int_0^x f.$$

Montrer $f = 0$ (étudier $x \longmapsto e^{-kx} \int_0^x f$).

6.4.5 Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) - f(y) = \int_{x+2y}^{2x+y} f.$$

6.4.6 Lemme de Gronwall

Soient $f,g : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues, $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$, et $C \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\forall x \in [0; +\infty[,\ f(x) \leqslant C + \int_0^x fg.$$

Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[,\ f(x) \leqslant C\, e^{\int_0^x g}$.

6.4.3 Changement de variable

Rappelons que, si $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ sont de classe C^1 sur les intervalles J et I, et si $\varphi(J) \subset I$, alors $g \circ \varphi : \begin{array}{l} J \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto g(\varphi(x)) \end{array}$ est de classe C^1 sur J et $(g \circ \varphi)' = (g' \circ \varphi)\varphi'$ (cf. 5.1.5 Th. 2 p. 176 et 5.1.3 Th.3 p. 169).

On obtient ainsi : $\int g'(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = g(\varphi(x))$, d'où la Proposition suivante :

Lors d'un changement de variable dans une intégrale, ne pas oublier de : s'assurer de son caractère licite, changer les bornes, traiter l'élément différentiel.

Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi : [\alpha; \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[\alpha; \beta]$, f une application à valeurs réelles ou complexes continues sur un segment contenant $\varphi([\alpha; \beta])$. Alors :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

On dit qu'on a effectué le **changement de variable** $u = \varphi(x)$.

Exemple : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u^2\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$ $u = \sin x$

En pratique, le facteur $\varphi'(x)$ n'est pas toujours en évidence dans l'intégrale étudiée, et il faut alors l'y intercaler, en divisant aussi par $\varphi'(x)$. Cela suppose que φ' ne s'annule pas dans l'intervalle considéré. Comme φ est de classe C^1 sur un intervalle, le théorème des valeurs intermédiaires montre que cette condition revient à $\varphi' > 0$ ou $\varphi' < 0$.

Les méthodes à retenir

Changement de variable

- **L'utilisation d'un changement de variable** est souvent apparente dans l'énoncé lui-même des exercices (ex. 6.4.7 : $y = \frac{\pi}{4} - x$; ex. 6.4.8 : $y = a - x$), ou moins évidente (ex. 6.4.9).

Exercices

6.4.7 *a)* Montrer :
$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)\mathrm{d}x.$$

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x)\,\mathrm{d}x$.

6.4.8 Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [0; a] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall x \in [0; a]$, $\begin{cases} f(x) \neq -1 \\ f(x)f(a-x) = 1 \end{cases}$.

Calculer $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1 + f(x)}\,\mathrm{d}x$.

6.4.9 Montrer : $\displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{n^2 + x^3}} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.

6.4.10 Soit $f : [0; 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f > 0$.

a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe $(x_0,\ldots,x_n) \in [0; 1]^{n+1}$ unique tel que :
$$\begin{cases} 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1 \\ \forall k \in \{0,\ldots,n-1\},\quad \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f = \frac{1}{n}\int_0^1 f. \end{cases}$$

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)$.

6.4.11 Soit $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \int_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

a) Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \alpha < \beta < 1$. Montrer qu'il existe un polynôme P à coefficients réels, de degré 2, tel que : $\begin{cases} \forall x \in [\alpha; \beta],\ P(x) \geqslant 1 \\ \forall x \in [0; \alpha] \cup [\beta; 1],\ 0 \leqslant P(x) \leqslant 1 \end{cases}$.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 (P(x))^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

c) En déduire $f = 0$.

Ce résultat apparaîtra encore en Seconde année, par une autre méthode utilisant le premier théorème de Weierstrass (Analyse MP, 5.2.2 Corollaire).

Théo (Rudin) : F, G différentiables sur $[a,b]$ avec $F' = f \in R$, $G' = g \in R$
Alors $\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx$

6.4.4 Intégration par parties

Proposition 1 **Primitivation par parties**

Soient $u, v : I \longrightarrow \mathbb{K}$ de classe C^1 sur I. On a alors : $\displaystyle\int u'v = uv - \int uv'$.

Preuve : $(uv)' = u'v + uv'$ (cf. 5.1.3 Théorème 1, 3) p. 171) d'où $uv = \displaystyle\int u'v + \int uv'$. ■

Ainsi, pour utiliser une intégration par parties afin d'exprimer une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$, dans laquelle f est continue et g de classe C^1, on pourra poser $\begin{cases} u'(x) = f(x) \\ v(x) = g(x) \end{cases}$, d'où $\begin{cases} u(x) = F(x) \\ v'(x) = g'(x) \end{cases}$ où F est une primitive de u, de sorte que :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

Proposition 2 **Intégration par parties**

Soient $u, v : [a; b] \longrightarrow \mathbb{K}$ de classe C^1 sur $[a; b]$. On a alors :

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'.$$

Preuve : se déduit aisément de la Prop. 1. ■

L'intégration par parties est l'un des outils fondamentaux de l'analyse classique. Elle permet souvent d'obtenir une relation sur des intégrales dépendant d'un entier.

Exemples :

1) **Intégrales de Wallis**

Exemple important.

Nous allons calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la valeur de $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x$.

Pour tout $n \geqslant 2$, par une **intégration par parties** :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}x\,\sin x\,\mathrm{d}x = [-\sin^{n-1}x\cos x]_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} -(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x = (n-1)(I_{n-2} - I_n),$$

d'où la relation de récurrence : $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

Séparons en deux cas suivant la parité de n ; pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} I_{2p} = \dfrac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \ldots = \dfrac{2p-1}{2p}\,\dfrac{2p-3}{2p-2} \cdots \dfrac{1}{2} I_0 \\[2ex] I_{2p+1} = \dfrac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \ldots = \dfrac{2p}{2p+1}\,\dfrac{2p-2}{2p-1} \cdots \dfrac{2}{3} I_1. \end{cases}$$

Comme $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$, on conclut :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} I_{2p} = \dfrac{(2p-1)(2p-3)\ldots 1}{(2p)(2p-2)\ldots 2}\,\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] I_{2p+1} = \dfrac{(2p)(2p-2)\ldots 2}{(2p+1)(2p-1)\ldots 3} = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$$

2) **Lemme de Lebesgue pour une application de classe C^1.**

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{K}$ de classe C^1, et, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$I_n = \int_a^b f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; à l'aide d'une **intégration par parties** :

Intégration par parties, pour amener un facteur n au dénominateur.

$$I_n = \left[f(x)\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{\mathrm{i}n}\right]_a^b - \int_a^b f'(x)\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{\mathrm{i}n}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\mathrm{i}n}\left(f(b)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nb} - f(a)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}na}\right) - \frac{1}{\mathrm{i}n}\int_a^b f'(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x,$$

d'où : $|I_n| \leqslant \frac{1}{n}\left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'|\right)$,
et donc : $I_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.
(On peut montrer que ce résultat, $I_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, reste valable lorsque f est seulement supposée continue par morceaux.)

En passant aux parties réelle et imaginaire, il s'ensuit que, si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1, alors :

$$\int_a^b f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$$

(et il est clair que ces deux derniers résultats sont encore vrais pour f à valeurs complexes).

Les méthodes à retenir

Intégration par parties

- **Penser à l'intégration par parties lorsqu'apparaît une intégrale d'un produit**, ou lorsqu'intervient une fonction f dont la dérivée f est « plus simple » que f (par exemple : $f(x) = \ln x$, $\operatorname{Arctan} x$, ...), ou lorsqu'il s'agit d'obtenir une relation de récurrence à propos d'intégrales.

Exercices

6.4.12 Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a < c < b$, $u : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[a;b]$, $v : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $v|_{[a;c[}$ et $v|_{]c;b]}$ admettent respectivement des prolongements de classe C^1 sur $[a;c]$ et $[c;b]$.
Montrer :

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uw - u(c)(v(c^+) - v(c^-)),$$

où w est n'importe quelle application prolongeant v' sur $[a;b]$.

6.4.13 Montrer $\dfrac{\int_1^x e^t \ln t \,\mathrm{d}t}{e^x \ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

6.4.14 Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

a) Montrer : $\forall x \in [0;1]$,

$$f(x) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x t f'(t)\mathrm{d}t + \int_x^1 (t-1)f'(t)\mathrm{d}t.$$

b) En déduire : $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant \left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right| + \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t$.

6.4.5 Formule de Taylor avec reste intégral

Cette formule est quelquefois qualifiée de : « théorème fondamental de l'analyse ».

Nous avons déjà vu (cf. 6.4.2 p. 230) que, si f est de classe C^1 sur $[a;b]$, alors

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

Ainsi, si f est de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si $(a,b) \in I^2$, alors : $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$, ce qui permet d'exprimer f à l'aide d'une intégrale, portant sur f'.
Nous nous proposons maintenant de généraliser cette formule en faisant intervenir les dérivées successives de f.

La formule de Taylor avec reste intégral, très utile en analyse, nécessite un effort de mémorisation.

Théorème **Formule de Taylor avec reste intégral**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application de classe C^{n+1} sur I, $(a,b) \in I^2$. On a alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Preuve : Récurrence sur n.

• La propriété a été déjà vue pour $n = 0$: si f est de classe C^1 sur $[a; b]$, alors

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

• Supposons-la vraie pour un entier n, et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{n+2} sur I. A l'aide d'une **intégration par parties** :

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(x)\right]_a^b - \int_a^b -\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

ce qui établit la propriété au rang $n + 1$. ■

La formule de Taylor avec reste intégral permet, en considérant b comme variable, d'exprimer f sous forme de la somme d'un polynôme $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right)$ et d'un reste, qui est l'intégrale $\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x$.

On pourra assez souvent étudier cette dernière intégrale (surtout majorer son module) et apprécier ainsi l'écart qu'il peut y avoir entre $f(b)$ et le polynôme $\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$. Comme (pour $a \leqslant b$ par exemple) :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \|f^{(n+1)}\|_\infty \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x \\ &= \|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!},\end{aligned}$$

on a : $$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \operatorname*{Sup}_{x\in[a;b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Cette dernière inégalité est appelée **inégalité de Taylor-Lagrange**.

Les méthodes à retenir

- **L'étude d'une fonction définie par une intégrale** est un type d'exercice fréquent et important (ex. 6.4.17) ; le lecteur en verra de nombreux exemples dans la suite du cours d'analyse en première et seconde années.
- **Pour établir une égalité du type $A(x) = 0$ pour tout x d'un intervalle** (ex. 6.4.19 *a)*), on peut essayer de montrer que $A' = 0$ et que A s'annule en au moins un point de l'intervalle (ex. 6.4.19).