Exercices

6.4.15 Montrer, pour tout $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$:

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}.$$

6.4.16 Déterminer des réels α,a,b,c pour que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré $\leqslant 5$, on ait :

$$\int_0^{\pi} P(\cos\theta)\mathrm{d}\theta = \alpha(P(a) + P(b) + P(c)).$$

6.4.17 Etudier la fonction suivante (ensemble de départ et d'arrivée : $\mathbb{R}$) :

$$f : x \longmapsto \int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

6.4.18 *a)* Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme unique $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$X^{4n}(1-X)^{4n} = (1+X^2)P_n(X) + (-1)^n 4^n.$$

b) On note $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{4^{n-1}} \displaystyle\int_0^1 P_n(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |\pi - a_n| < \frac{1}{4^{5n-1}}.$$

6.4.19 Inégalité de Young

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$, $f : [0;a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle que : $\begin{cases} \forall x \in [0;a], \quad f'(x) > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note abusivement $f^{-1} : [0; f(a)] \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application réciproque de f.

a) Montrer :

$$\forall x \in [0;a], \int_0^x f + \int_0^{f(x)} f^{-1} = xf(x).$$

b) En déduire :

$$\forall (x,y) \in [0;a] \times [0, f(a)], \int_0^x f + \int_0^y f^{-1} \geqslant xy.$$

6.4.20 Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$, $f : [0;a] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $f' > 0$, et $g : [0; f(a)] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall x \in [0;a], g(f(x)) \geqslant x$.

Montrer :

$$\forall (x,y) \in [0;a] \times [0; f(a)], \int_0^x f + \int_0^y g \geqslant xy$$

(utiliser l'exercice 6.4.19 *b)*).

6.4.21 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Trouver toutes les applications $f : [0;+\infty[\longrightarrow [0;+\infty[$ de classe C^1 sur $[0;+\infty[$, telles que $f' > 0$, $f(0) = 0$ et :

$$\forall x \in [0;+\infty[, \int_0^{f(x)} f^{-1} = \alpha \int_0^x f$$

(utiliser l'exercice 6.4.19 *a)*).

6.4.6 Approximation d'une intégrale, méthode des rectangles, méthode des trapèzes

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe suffisante. Notre propos ici est d'obtenir une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f$ en faisant intervenir les valeurs de f en les points a_i d'un partage régulier de $[a;b]$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $a_i = a + i\,\dfrac{b-a}{n}$).

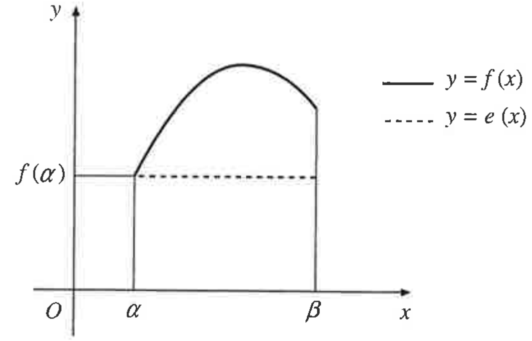
1) Méthode des rectangles

a) Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, tel que $\alpha < \beta$, et $f : [\alpha;\beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1.

Comparaison de $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$ avec l'aire d'un **rectangle** de base $\beta - \alpha$ et de hauteur $f(x)$.

Considérons l'application constante

$e : [\alpha;\beta] \longrightarrow \mathbb{R}$.
$x \longmapsto f(\alpha)$



On a :

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \int_\alpha^\beta e(x)\,dx\right| = \left|\int_\alpha^\beta (f(x)-f(\alpha))\,dx\right| \leqslant \int_\alpha^\beta |f(x)-f(\alpha)|\,dx.$$

Puisque f est de classe C^1 sur $[\alpha;\beta]$, d'après le **théorème des accroissements finis** (5.2.2 p. 181) :

$$\forall x \in [\alpha;\beta],\quad |f(x)-f(\alpha)| \leqslant (x-\alpha)M_1(f),$$

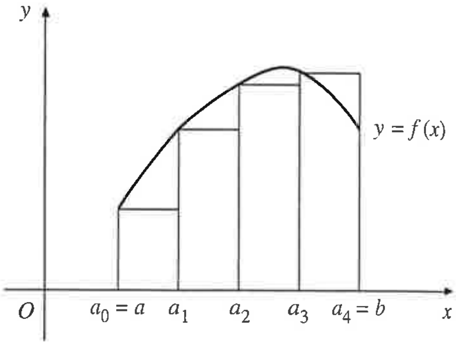
où on a noté $M_1(f) = ||f'||_\infty = \underset{t\in[\alpha;\beta]}{\mathrm{Sup}}\,|f'(t)|$.

D'où : $\displaystyle\int_\alpha^\beta |f(x)-f(\alpha)|\,dx \leqslant M_1(f)\int_\alpha^\beta (x-\alpha)\,dx = \frac{(\beta-\alpha)^2}{2}M_1(f)$.

b) Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, tel que $a<b$, $f:[a;b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une application de classe C^1, $n\in\mathbb{N}^*$, $(a_0,\dots,a_n)$ le partage régulier de $[a;b]$ défini par :

$$\forall i\in\{0,\dots,n-1\},\ a_i = a+i\,\frac{b-a}{n}.$$

On approche $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ par une somme d'aires de rectangles.



En appliquant le résultat de **a)** sur chaque intervalle $[a_i;a_{i+1}]$ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$ et en **sommant**, pour i de 0 à $n-1$, on obtient :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(a_i)\right| &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx-(a_{i+1}-a_i)f(a_i)\right|\\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(a_{i+1}-a_i)^2}{2}\underset{t\in[a_i;a_{i+1}]}{\mathrm{Sup}}|f'(t)|\\ &\leqslant \frac{1}{2}n\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 M_1(f) = \frac{(b-a)^2}{2n}M_1(f),\end{aligned}$$

où on a noté $M_1(f) = ||f'||_\infty = \underset{t\in[a;b]}{\mathrm{Sup}}\,|f'(t)|$.

D'autre part : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(a_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(a_i)$.

Résumons l'étude :

Proposition **Méthode des rectangles**

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, tel que $a\leqslant b$, $f:[a;b]\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^1, $n\in\mathbb{N}^*$, $a_i = a+i\,\dfrac{b-a}{n}$ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$. On a alors :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(a_i)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n}M_1(f),$$

où on a noté $M_1(f) = ||f'||_\infty = \underset{t\in[a;b]}{\mathrm{Sup}}\,|f'(t)|$.

Ainsi, on approche l'intégrale de f sur $[a;b]$ par une somme de Riemann.

Remarques :

1) Le résultat précédent s'appelle quelquefois « méthode des rectangles à gauches », la « méthode des rectangles à droites » consistant à approcher $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1})$.

Remarquer la présence de a_{i+1} au lieu de a_i.

2) Si f est continue et monotone, par exemple croissante (non nécessairement de classe C^1), on dispose alors de l'encadrement :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}),$$

dont l'amplitude est :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}) - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\big(f(a_{i+1}) - f(a_i)\big)$$
$$= \frac{b-a}{n}\big(f(b)-f(a)\big).$$

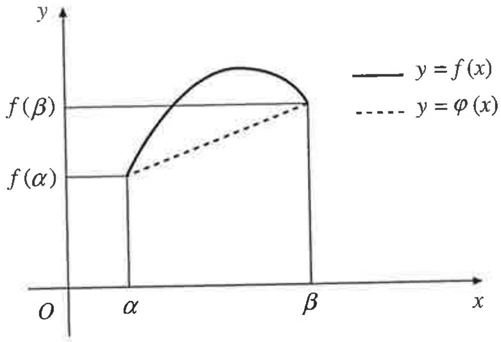
2) Méthode des trapèzes

a) Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, tel que $\alpha < \beta$, et $f : [\alpha;\beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2.

Comparaison de $\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$ avec l'aire d'un **trapèze.**

Considérons l'application affine $\varphi : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ coïncidant avec f en α et β (c'est-à-dire : $\varphi(\alpha) = f(\alpha)$ et $\varphi(\beta) = f(\beta)$), et notons $g = f - \varphi$. Il est clair que g est de classe C^2 et que :

$$g'' = f'', \qquad g(\alpha) = g(\beta) = 0.$$



Soit $x \in [\alpha;\beta]$. On a, à l'aide **d'intégrations par parties** :

On évalue $g(x)$ de deux façons, utilisant α ou β, puis on combine ces deux expressions.

$$g(x) = \int_\alpha^x g'(t)\mathrm{d}t = [(t-\alpha)g'(t)]_\alpha^x - \int_\alpha^x (t-\alpha)g''(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= (x-\alpha)g'(x) - \int_\alpha^x (t-\alpha)g''(t)\,\mathrm{d}t,$$

et de même :

$$g(x) = (x-\beta)g'(x) - \int_\beta^x (t-\beta)g''(t)\,\mathrm{d}t = -(\beta-x)g'(x) - \int_x^\beta (\beta-t)g''(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'où :

$$(\beta-\alpha)g(x) = (\beta-x)g(x) + (x-\alpha)g(x)$$
$$= -(\beta-x)\int_\alpha^x (t-\alpha)g''(t)\,\mathrm{d}t - (x-\alpha)\int_x^\beta (\beta-t)g''(t)\,\mathrm{d}t,$$

et donc, en notant $M_2(f) = ||f''||_\infty = ||g''||_\infty$:

$$(\beta-\alpha)|g(x)| \leqslant \left((\beta-x)\int_\alpha^x (t-\alpha)\mathrm{d}t + (x-\alpha)\int_x^\beta (\beta-t)\mathrm{d}t\right) M_2(f)$$
$$= \frac{(\beta-\alpha)(x-\alpha)(\beta-x)}{2}\,M_2(f).$$

On a ainsi montré :

$$\forall x \in [\alpha;\beta], \quad |f(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{(x-\alpha)(\beta-x)}{2}\,M_2(f).$$

On en déduit :

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x - \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_\alpha^\beta |f(x)-\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}M_2(f)\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)\mathrm{d}x.$$

On peut aussi calculer cette intégrale en développant $(x-\alpha)(\beta-x)$.

Une intégration par parties fournit :

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)\mathrm{d}x = \left[\frac{(x-\alpha)^2}{2}(\beta-x)\right]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta \frac{(x-\alpha)^2}{2}\,\mathrm{d}x$$

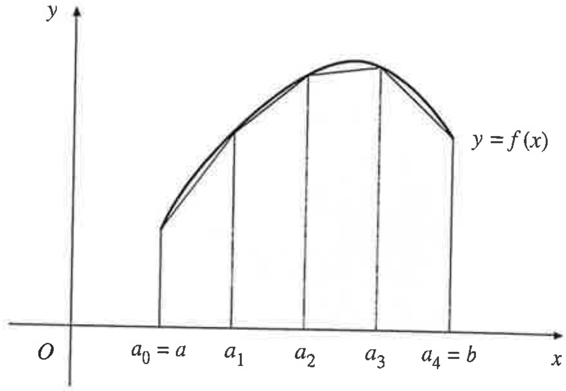
$$= \left[\frac{(x-\alpha)^2}{2}(\beta-x) + \frac{(x-\alpha)^3}{6}\right]_\alpha^\beta = \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}.$$

On conclut : $\displaystyle \left|\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x - \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^3}{12} M_2(f).$

D'autre part : $\displaystyle \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)(f(\alpha)+f(\beta)).$

b) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$, $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2, $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0,\dots,a_n)$ le partage régulier de $[a;b]$ défini par :

$$\forall i \in \{0,\dots,n-1\}, \quad a_i = a + i\,\frac{b-a}{n}.$$



On approche $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$ par une somme d'aires de trapèzes.

En appliquant le résultat de a) sur chaque intervalle $[a_i; a_{i+1}]$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ et **en sommant**, pour i de 0 à $n-1$, on obtient :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\,\frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2}\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{a_i}^{a_i+1} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}(a_{i+1}-a_i)(f(a_i)+f(a_{i+1}))\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{12}(a_{i+1}-a_i)^3 \sup_{t\in[a_i;a_{i+1}]}|f''(t)| \leqslant \frac{1}{12}n\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 M_2(f) = \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2(f),$$

où on a noté $\displaystyle M_2(f) = \sup_{t\in[a;b]}|f''(t)|$.

D'autre part :

$$\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\,\frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} = \frac{b-a}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}(f(a_i)+f(a_{i+1})).$$

Résumons l'étude :

Proposition **Méthode des trapèzes**

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a \leqslant b$, $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2, $n \in \mathbb{N}^*$, $a_i = a + i\,\dfrac{b-a}{n}$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$.

On a alors :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\big(f(a_i)+f(a_{i+1})\big)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}\,M_2(f),$$

où on a noté $M_2(f) = ||f''||_\infty = \underset{t\in[a;b]}{\operatorname{Sup}} |f''(t)|$.

Remarque :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons :

$$R_g(n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i), \qquad R_d(n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}),$$

$$T(n) = \frac{b-a}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\Big(f(a_i)+f(a_{i+1})\Big)$$

les valeurs approchées de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ obtenues respectivement par les méthodes des rectangles à gauche, des rectangles à droite, des trapèzes.

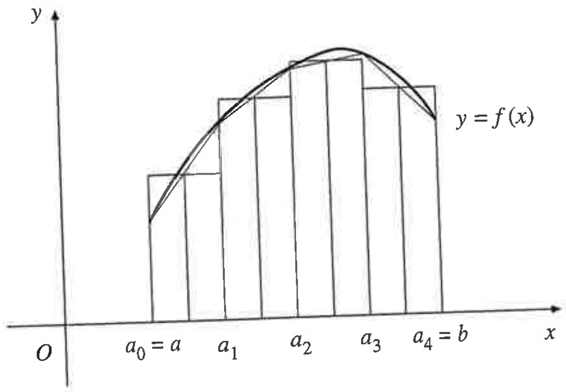
1) Il est clair que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$T(n) = \frac{1}{2}(R_g(n) + R_d(n)).$$

2) On a, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$T(n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2},$$

donc $T(n)$ est la somme des aires (algébriques) des rectangles de bases $[a_i\,; a_{i+1}]$ et de hauteur $\dfrac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2}$.



Autrement dit, $T(n)$ est obtenu en remplaçant, sur chaque $[a_i\,; a_{i+1}]$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, f par la demi-somme des valeurs de f en a_i et a_{i+1}.

3) Lorsque n tend vers $+\infty$:

$$R_g(n) = \int_a^b f(x)\ x + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad R(n) = \int_a^b f(x)\ x + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$T(n) = \int_a^b f(x)\ x + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Pour les notations $O\left(\frac{1}{n}\right)$, $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, voir plus loin, § 8.1.1, Définition 2.

Ainsi, lorsque n est grand, la méthode des trapèzes donne, en général, une meilleure approximation de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ que la méthode des rectangles.

Exercices

6.2.8 Déterminer la limite de la suite définie par son terme général :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2}$

b) $\displaystyle\frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{\alpha}}(n^{\alpha-\frac{1}{\alpha}} + k^{\alpha-\frac{1}{\alpha}})$, $\alpha \in]0;+\infty[-\{1\}$

c) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \sin\frac{\pi}{k}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k^2}{n^3+k^3}$

e) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$

f) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

6.2.9 Soient $f,g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continues ; montrer :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{f\left(\frac{k}{n}\right)+g\left(\frac{k+1}{n}\right)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \sqrt{f+g}.$$

6.3 Extension aux fonctions à valeurs complexes

Cette définition prolonge celle de 6.2.3 p. 214 puisque, si f est à valeurs réelles, $\text{Ré}\, f = f$ et $\text{Im}\, f = 0$.

Définition

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux. On appelle **intégrale de** f **(sur** $[a;b]$**)**, et on note $\displaystyle\int_a^b f$ (ou : $\displaystyle\int_{[a;b]} f$, ou : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$) le complexe défini par :

$$\int_a^b f = \int_a^b \text{Ré}\, f + \mathrm{i}\int_a^b \text{Im}\, f.$$

Remarquer que $\text{Ré}\, f$ et $\text{Im}\, f$ sont continues par morceaux sur $[a;b]$ et à valeurs réelles.

Proposition 1

L'application $f \longmapsto \displaystyle\int_a^b f$ est une forme $\mathbb{C}$-linéaire sur le $\mathbb{C}$-ev des applications continues par morceaux sur $[a;b]$.

On se ramène à des nombres réels et à des fonctions de valeurs réelles.

Preuve : Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f,g : [a;b] \longmapsto \mathbb{C}$ sont continues par morceaux, alors, en notant $\alpha = \text{Ré}(\lambda)$, $\beta = \text{Im}(\lambda)$, $r = \text{Ré}\, f$, $s = \text{Im}\, f$, $u = \text{Ré}\, g$, $v = \text{Im}\, g$:

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda f + g) &= \int_a^b \big((\alpha r - \beta s + u) + \mathrm{i}(\alpha s + \beta r + v)\big)\\ &= \int_a^b (\alpha r - \beta s + u) + \mathrm{i}\int_a^b (\alpha s + \beta r + v)\\ &= \left(\alpha\int_a^b r - \beta\int_a^b s + \int_a^b u\right) + \mathrm{i}\left(\alpha\int_a^b s + \beta\int_a^b r + \int_a^b v\right)\\ &= (\alpha + \mathrm{i}\beta)\left(\int_a^b r + \mathrm{i}\int_a^b s\right) + \left(\int_a^b u + \mathrm{i}\int_a^b v\right) = \lambda\int_a^b f + \int_a^b g.\end{aligned}$$

Rappel de notation :
$|f| : [a;\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto |f(x)|$

Proposition 2

Pour toute $f : [a;\, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux :

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

On se ramène à des fonctions à valeurs réelles.

Preuve : Remarquer d'abord que $|f|$ est continue par morceaux. Notons $u = \text{Ré}\, f$, $v = \text{Im}\, f$. On a :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f| &\iff \left|\int_a^b u + \mathrm{i}\int_a^b v\right| \leqslant \int_a^b \sqrt{u^2+v^2} \\
&\iff \left(\int_a^b u\right)^2 + \left(\int_a^b v\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b \sqrt{u^2+v^2}\right)^2 \\
&\iff \left(\int_a^b u\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b (\sqrt{u^2+v^2} - v)\right)\left(\int_a^b (\sqrt{u^2+v^2} + v)\right).
\end{aligned}$$

Il est clair que : $\sqrt{u^2+v^2} - v \geqslant 0$ et $\sqrt{u^2+v^2} + v \geqslant 0$. Les applications $g,h : [a;\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $g = (\sqrt{u^2+v^2} - v)^{\frac{1}{2}}$, $h = (\sqrt{u^2+v^2} + v)^{\frac{1}{2}}$ sont continues par morceaux sur $[a;\, b]$, et : $gh = |u|$.

D'après l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** (6.2.5 Th. p. 219) :

$$\left(\int_a^b gh\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b g^2\right)\left(\int_a^b h^2\right),$$

d'où le résultat voulu, en remarquant :

$$\left(\int_a^b u\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b |u|\right)^2 = \left(\int_a^b gh\right)^2.$$

Corollaire

1) Soient $f,g : [a;\, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continues par morceaux. On a :

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant ||f||_\infty \int_a^b |g|.$$

2) Soit $f : [a;\, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux. On a :

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant (b-a)||f||_\infty.$$

Ces deux inégalités sont très utiles en pratique.

Proposition 3 **Relation de Chasles**

Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$, et f une application à valeurs complexes continue par morceaux sur un segment contenant a,b,c. On a alors :

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\int_a^c f &= \int_a^c \text{Ré}\, f + \mathrm{i}\int_a^c \text{Im}\, f \\
&= \left(\int_a^b \text{Ré}\, f + \int_b^c \text{Ré}\, f\right) + \mathrm{i}\left(\int_a^b \text{Im}\, f + \int_b^c \text{Im}\, f\right) \\
&= \left(\int_a^b \text{Ré}\, f + \mathrm{i}\int_a^b \text{Im}\, f\right) + \left(\int_b^c \text{Ré}\, f + \mathrm{i}\int_b^c \text{Im}\, f\right) \\
&= \int_a^b f + \int_b^c f.
\end{aligned}$$