Logique

Les connecteurs logiques « et » et « ou »

$\wedge$ et $\vee$ sont commutatifs, associatifs et distributifs l'un sur l'autre.
Lois de DE MORGAN : $\overline{\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}} \Leftrightarrow \overline{\mathsf{P}} \vee \overline{\mathsf{Q}}$ et $\overline{\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}} \Leftrightarrow \overline{\mathsf{P}} \wedge \overline{\mathsf{Q}}$.

L'implication et l'équivalence

Si P et Q sont deux propositions, l'implication $\mathsf{P} \Rightarrow \mathsf{Q}$ est la proposition $\overline{\mathsf{P}} \vee \mathsf{Q}$.
L'implication $\mathsf{P} \Rightarrow \mathsf{Q}$ est fausse si et seulement si P est vraie et Q est fausse.

La négation de l'implication $\mathsf{P} \Rightarrow \mathsf{Q}$ est la proposition $\mathsf{P} \wedge \overline{\mathsf{Q}}$
La contraposée de l'implication $\mathsf{P} \Rightarrow \mathsf{Q}$ est $\overline{\mathsf{Q}} \Rightarrow \overline{\mathsf{P}}$. Elle est équivalente à $\mathsf{P} \Rightarrow \mathsf{Q}$.
La réciproque de l'implication $\mathsf{P} \Rightarrow \mathsf{Q}$ est $\mathsf{Q} \Rightarrow \mathsf{P}$. Elle n'a aucun rapport avec $\mathsf{P} \Rightarrow \mathsf{Q}$.

$\mathsf{P} \Leftrightarrow \mathsf{Q}$ est la proposition $(\mathsf{P} \Rightarrow \mathsf{Q}) \wedge (\mathsf{Q} \Rightarrow \mathsf{P})$.
Une équivalence signifie donc deux implications, une de gauche à droite et une de droite à gauche.

Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$

$\overline{(\forall x \in \mathsf{E},\ \mathsf{P}(x))} \Leftrightarrow (\exists x \in \mathsf{E}/\ \overline{\mathsf{P}(x)})$ et $\overline{(\exists x \in \mathsf{E},\ \mathsf{P}(x))} \Leftrightarrow (\forall x \in \mathsf{E}/\ \overline{\mathsf{P}(x)})$.

On peut permuter des quantificateurs de même nature,
mais on ne peut pas permuter des quantificateurs de nature différente.

On peut distribuer $\forall$ sur « et » et $\exists$ sur « ou »,
mais on ne peut pas distribuer $\forall$ sur « ou » et $\exists$ sur « et ».