Merci de specifier votre nom, prenom et groupe TD (parmis Elec, Phys, Mi, M1, M2) :

Examen partiel d'analyse 1.

Vous devez apporter le plus grand soin à la rédaction et justifiez vos réponses !

---

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. On suppose que $u_n \to \ell_u$ et que $v_n \to \ell_v$, pour $n \to +\infty$. Montrer que $u_n + v_n \to \ell_u + \ell_v$ pour $n \to +\infty$.

---

2. Soit $E = \{a^b, \quad a \in A, \quad b \in B\}$ avec $A = [2, 3]$ et $B = [0, 2[$.
Déterminer, s'il existe, $\inf(E)$, $\min(E)$, $\sup(E)$, $\max(E)$.

---

3. Montrer par récurrence l'égalité suivante : $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

---

4. Déterminer
   - $\lim_{n \to +\infty}[\ 5\ \sqrt{n} \sin\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)]$;
   - $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{2n+1}$;
   - $\lim_{n \to +\infty} u_n$ avec (u_n) définie par récurrence comme suit :
   $$u_0 = 2, \quad u_1 = 5, \quad u_{n+2} = \frac{7}{4} u_{n+1} - \frac{3}{4} u_n;$$
   - pour quel intervalle de valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ on a que $\lim_{n \to +\infty}(1 + \frac{1}{n^2})^{n^\lambda}$ est fini ;
   - pour quel intervalle de valeurs de $\beta \in \mathbb{R}$ l'égalité $n^\beta \ln(\frac{n}{n-1}) = o(n^2)$ est vraie pour $n \to +\infty$.

---

5. Déterminer le domaine de définition D_f, le signe, les limites au bord de D_f et les eventuelles asymptotes de la fonction suivante :
$$f : x \mapsto \frac{x^2 - 4}{x - 1} e^{1/x}.$$
Donner l'allure du graphe de la fonction f.

Rappel :
proche de $x = 0$, on a $\sin(x) = x + o(x)$, $\ln(1 + x) = x + o(x)$ et $e^x = 1 + x + o(x)$.

1) $u_n \to l_u$ et $v_n \to l_v$ pour $n \to +\infty$.

Soit $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Il existe $N_u \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$$(n \geq N_u \Rightarrow |u_n - l_u| \leq \frac{\varepsilon}{2})$$

et il existe $N_v \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$$(n \geq N_v \Rightarrow |v_n - l_v| \leq \frac{\varepsilon}{2}).$$

Soit $N_* = \max(N_u, N_v)$. Alors pour $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_*$ on peut écrire

$$|u_n + v_n - (l_u + l_v)| = |u_n - l_u + v_n - l_v|$$

$$\leq |u_n - l_u| + |v_n - l_v| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Pour $\varepsilon > 0$ on a $N_* \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$$(n \geq N_* \Rightarrow |u_n + v_n - (l_u + l_v)| \leq \varepsilon)$$

qui signifit $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = (l_u + l_v)$.

---

2) On va vérifier que $\inf(E) = \min(E) = 1$ et que $\sup(E) = 9$ alors que $\max(E) \nexists$.

On remarque que, pour $a \in [2,3]$ fixé, la fonction a^x est croissante pour $x \in [0,2)$. Donc $1 = a^0 \leq a^x$ $\forall x, \forall a$.

Il en resulte que $1 = \min(E) = \inf(E)$.

Pour le $\sup(E)$, on a que $a^x < a^2$ $\forall a$.

La fonction x^2 est croissante sur $[2,3]$ et donc $a^x < a^2 < 3^2 = 9$ $\forall a \in [2,3]$ et $\forall x \in [0,2)$

On a alors que 9 est un majorant de E. Il est aussi le plus petit des majorant d'où $\sup(E) = 9$. Puisque $x = 2 \notin B$, le $\sup(E)$ n'est pas $\max(E)$. Par consequence, $\max(E)$ n'existe pas.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $1+2+2^2+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1$.

On démontre ce résultat par récurrence.

Initialisation : $n=0$ on a bien $1 = 2-1$ ok.

Hérédité : on suppose vraie l'égalité pour n.

On la démontre pour $n+1$. En effet,

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n+2^{n+1}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hérédité}}}{=} (2^{n+1}-1)+2^{n+1} = 2\cdot 2^{n+1}-1 = 2^{n+2}-1.$$

---

4) a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[5\sqrt{n}\,\sin\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] = -5$.

On considère $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ pour $n\to+\infty$.

On peut alors utiliser l'asymptotique

$$\sin\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim -\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{pour } n\to+\infty$$

comme indiqué en bas de page du sujet.

Alors $\left[5\sqrt{n}\,\sin\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] \sim -5\sqrt{n}\,\frac{1}{\sqrt{n}}$ d'où la valeur de la limite égale à (-5).

---

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{2n+1}\right] = e^{-10}$

Pour calculer cette limite on passe à l'écriture exponentielle.

$$\left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{2n+1} = e^{\ln\left[\left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{2n+1}\right]} = e^{(2n+1)\ln\left(\frac{n-2}{n+3}\right)}$$

$$= e^{(2n+1)\ln\left(\frac{n+3-5}{n+3}\right)} = e^{(2n+1)\ln\left(1+\frac{-5}{n+3}\right)}$$

On utilise l'asymptotique en bas de page du sujet et on obtient $e^{(2n+1)\ln\left(1+\frac{-5}{n+3}\right)} \sim e^{-5\left(\frac{2n+1}{n+3}\right)}$

On a alors que $\left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{2n+1} \sim e^{-5\left(\frac{2+\frac{1}{n}}{1+3/n}\right)}$ d'où

la valeur de la limite égale à (e^{-10}).

4) c) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 14$.

Ici la suite est définie par récurrence. On cherche le terme générale de u_n en fonction de n et des valeurs initiales, en passant par le polynôme caractéristique.

$$r^2 - \frac{7}{4} r + \frac{3}{4} = 0$$

Les solutions sont $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{3}{4}$.

Donc $u_n = A(1)^n + B\left(\frac{3}{4}\right)^n$ avec A et B solution du système $\begin{cases} A + B = 2 \\ A + \frac{3}{4}B = 5 \end{cases}$,

$B = -12$, $A = 14$.

Alors $u_n = 14 - 12\left(\frac{3}{4}\right)^n$ d'où la valeur de la limite égale à (14) pour $n \to +\infty$.

---

d) Pour trouver les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ qui donne $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^\lambda} = l < +\infty$ on considère l'écriture exponentielle du terme générale

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^\lambda} = e^{n^\lambda \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} \sim e^{\frac{n^\lambda}{n^2}} = e^{n^{\lambda - 2}}.$$

Alors pour $\lambda = 2$ on a $l = 1$,
pour $\lambda < 2$ on a $l = 0$ et
pour $\lambda > 2$ on a $l = +\infty$.

L'intervalle de valeurs cherché est $]-\infty, 2]$.

---

e) $n^\beta \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = o(n^2)$ si le rapport $\dfrac{n^\beta \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)}{n^2}$ tend à 0 pour $n \to +\infty$.

On utilise l'asymptotique et on écrit

$$n^\beta \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = n^\beta \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \sim \frac{n^\beta}{n-1}$$

$]-\infty, 3[$

Donc $\frac{n^\beta}{n-1} \cdot \frac{1}{n^2} \sim n^{\beta - 3}$ et il ~~tend~~ à 0 si $\beta < 3$.

5) $f : x \longmapsto \dfrac{x^2-4}{x-1} e^{1/x}$

D_f : f contient une fonction rationnelle définie pour $x \neq 1$ et une exponentielle dont l'exposant est défini pour $x \neq 0$.

D'où $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$

c'est à dire $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Signe de f : On sait que $e^{1/x} > 0 \ \forall x \in D_f$

donc $f(x) \geq 0$ pour $\dfrac{x^2-4}{x-1} \geq 0$, $x \in D_f$

On obtient que

		-2		1		2	
(x^2-4)	$+$		$-$		$-$		$+$
$(x-1)$	$-$		$-$		$+$		$+$
	$-$		$+$		$-$		$+$

$f(x) > 0$ si
$x \in]-2, 0[\cup]0, 1[\cup]2, +\infty[$

$f(x) = 0$ si $x = -2$ ou $x = 2$

$f(x) < 0$ si $x \in]-\infty, -2[\cup]1, 2[$.

Limites à la frontière de D_f, $\partial D_f = \{\pm\infty, 0, 1\}$.

On remarque que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = 1$

et alors $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

De plus $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$.

Les droites $x = 0$, $x = 1$ sont des asymptotes verticaux ($x = 0$ l'est en arrivant de la droite).

Puisque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ il est possible que f aie une asymptote oblique $y = mx + q$

où $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = q$.

5

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2-4}{x-1} e^{1/x}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-4}{x(x-1)} = 1$$

Pour calculer la valeur q on considère $(f(x) - x)$ pour $x \to \pm\infty$.

$$(f(x) - x) = \frac{x^2-4}{x-1} e^{1/x} - x = \frac{x^2-1-3}{x-1} e^{1/x} - x$$

$$= \frac{(x-1)(x+1)-3}{(x-1)} e^{1/x} - x = \left((x+1) - \frac{3}{x-1}\right) e^{1/x} - x$$

$$= x e^{1/x} + e^{1/x} - \frac{3e^{1/x}}{x-1} - x = x\left(e^{1/x} - 1\right) + e^{1/x} - \frac{3e^{1/x}}{x-1}.$$

Analysons les différents termes de la somme :

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = 1 \quad , \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3e^{1/x}}{x-1} = 0,$$

et

$$\lim_{x \to \pm\infty} x\left(e^{1/x} - 1\right) \underset{t = \frac{1}{x}}{=} \lim_{t \to 0} \left(\frac{e^t - 1}{t}\right) = 1$$

avec l'asymptotique en bas du sujet.

Donc $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = 1 + 1 = 2$.

La droite $y = x + 2$ est asymptote oblique pour $x \to \pm\infty$. On peut maintenant tracer un graphique de f sur son Df.