Examen partiel d'analyse 1.

Specifier sur la copie NOM, PRENOM et GROUPE TD (Elec, Phys1, Phys2, Mi, M1, M2) 1

Vous devez apporter le plus grand soin à la rédaction et justifiez vos réponses !

---

1. Soit $f : I\!R \to I\!R$ une fonction réelle de variable réelle x et soit $x_0 \in I\!R$. A l'aide des quantificateurs $\exists$, $\forall$, traduire l'ecriture : $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

---

2. Etudier la convergence de la suite numérique réelle (u_n) définie par

$$u_0 = 2, \qquad u_1 = 3, \qquad u_{n+2} = -\frac{3}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n.$$

---

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$, $\quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3, \quad n \geq 0.$
   - Montrer, par récurrence, que $(u_n - 2) = \frac{(-1)^n}{2^n}(u_0 - 2)$.
   - En deduire que la suite (u_n) converge et préciser la valeur de la limite.
   - Illustrer par un dessin la convergence de (u_n) à la valeur limite.

---

4. Soit (u_n), (w_n) deux suites numériques réelles qui vérifient les quatre proprietés suivantes : (u_n) est croissante, (w_n) est decroissante, $u_n \leq w_n$ $\forall n \in I\!N$ et $\lim_{n\to+\infty}(w_n - u_n) = 0$.
   - Montrer qu'il existe un nombre réel M tel que $u_n \leq M, \ \forall n \in I\!N$.
   - En déduire que la suite (u_n) converge.
   - De la même façon, montrer que la suite (w_n) converge.
   - Montrer que (u_n) et (w_n) ont la même limite.

---

5. Justifier mathématiquement si les enoncés suivants sont vrais ou faux pour les suites données.
   - $u_n = \frac{2\ln n - 3\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}+5}$: (a) tend vers $+\infty$, (b) tend vers 0, (c) tend vers $-\infty$.
   - $u_n = \frac{n^2+3}{3n^4}$: (a) croissante, (b) $u_n \sim \frac{1}{n^2}$, (c) $u_n = o(\frac{1}{n})$.
   - $u_n = (\frac{1}{2} + \frac{1}{3n})^n$: (a) tend vers 0, (b) tend vers $e^{\frac{3}{2}}$, (c) tend vers $+\infty$.

---

6. Déterminer le domaine de définition E, le signe, les limites au bord de E, les eventuelles asymptotes (vert., horiz., obliques) et donner l'allure du graphe de la fonction suivante :

$$f : x \ \mapsto \ 2x + \sqrt{x^2 - 1}.$$