A.A. 2017-2018 — Examen partiel d'analyse 1 à Nice le 9 Novembre 2017.

Specifier NOM, PRENOM et GROUPE TD (Elec, Phys1, Phys2, Mathinfo, Maths1, Maths2)

Vous devez apporter le plus grand soin à la rédaction et justifiez vos réponses !

---

1. Donner la définition de suite numérique convergente.
   Donner la définition de suite numérique bornée.
   Montrer que toute suite convergente est bornée.

---

2. Justifier mathématiquement si les enoncés suivants sont vrais ou faux.
   - $u_n = (-1)^n + n$: (a) n'a pas de limite, (b) diverge à $+\infty$, (c) diverge à $-\infty$.
   - $u_n = \frac{3^n-5n}{2^n-n^2}$: (a) $u_n = o(\frac{1}{n})$, (b) tend vers 0, (c) tend vers $+\infty$.

---

3. On considère la suite (u_n) définie par $\quad u_0 = \frac{1}{2}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{4\,u_n + 5}, \quad n \geq 0.$
   - Montrer que la suite est croissante majorée par 5.
   - En deduire que la suite (u_n) converge et préciser la valeur de la limite.
   - Illustrer par un dessin la convergence de (u_n) à la valeur limite.

---

4. Ecrire sous la forme d'intervalle (ou d'union d'intervalles) les QUATRE ensembles
   $A = \{x \in I\!R,\ \sqrt{x-1} \geq 0\}$, $B = \{x \in I\!R,\ \dfrac{1}{x^2-2x} \leq 0\}$, $A \cap B$, $A \cup B$.

---

5. Déterminer l'ensemble F image de $]-2,4]$ par la fonction $f : x \mapsto (x^3 - x)$.
   [*Ici,* $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ *est un point de maximum local et* $x = +\frac{1}{\sqrt{3}}$ *est un point de minimum local de* f *sur* $I\!R$.]
   Déterminer s'il existe $\inf_{I\!R}(F)$, $\sup_{I\!R}(F)$, $\min_{I\!R}(F)$ et $\max_{I\!R}(F)$.
   Déterminer si la fonction reciproque $f^{-1} : F \to]-2,4]$ existe et, si elle existe, faire son dessin.

---

6. Soit f la fonction suivante:

$$f : x \ \mapsto \ \frac{-x|x| + 3x + 2}{x-2} \qquad \text{avec } |x| = \begin{cases} +x & x \geq 0, \\ -x & x \leq 0. \end{cases}$$

   Déterminer le domaine de définition E de f et le signe de f sur E, calculer les limites de f au bord de E, déterminer les eventuelles asymptotes (vert., horiz., obliques) et donner l'allure du graphe de la fonction f.

A.A. 2017-2018 — Examen partiel d'analyse 1 à Nice le 9 Novembre 2017.

Specifier NOM, PRENOM et GROUPE TD (Elec, Phys1, Phys2, Mathinfo, Maths1, Maths2)

Vous devez apporter le plus grand soin à la rédaction et justifiez vos réponses !

---

1. Donner la définition de suite numérique convergente.

   Soit $f : I\!R \to I\!R$ une fonction réelle de variable réelle x et soit $x_0 \in I\!R$. A l'aide des quantificateurs $\exists$, $\forall$, traduire l'ecriture : $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

   Montrer que si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ alors pour toute suite numérique $(u_n)_n$ qui converge à x_0 on a que la suite numérique $(f(u_n))_n$ converge à ℓ.

---

2. Justifier mathématiquement si les enoncés suivants sont vrais ou faux.

   - $u_n = \frac{\sin n}{n}$: (a) oscillante, (b) valeurs de signe positif, (c) tend à zéro.
   - $u_n = \frac{n^3+6n^4+e^{-n}}{3n^2(1-2n^2)-n^2\ln(n)}$: (a) tend vers $\frac{1}{2}$, (b) tend vers -1, (c) tend vers $-\frac{1}{3}$.

---

3. On considère la suite (u_n) définie par la recurrence $4\,u_{n+2} = -4\,u_{n+1} - u_n$ quand $n \geq 0$, avec $u_0 = 2$ et $u_1 = 3$.

   - Donner le polynôme caracteristique associé à la recurrence.
   - Donner le terme générale de la suite $(u_n)_n$ en fonction de n.
   - Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$.

---

4. Ecrire sous la forme d'intervalle (ou d'union d'intervalles) les QUATRE ensembles

   $A = \{x \in I\!R,\ \sqrt{2x+3} \leq 2\}$, $B = \{x \in I\!R,\ \dfrac{1}{2x^2+x} \leq 0\}$, $A \cap B$, $A \cup B$.

---

5. Déterminer l'ensemble F image de $]-2,4]$ par la fonction $f : x \mapsto (x^3 - 6x)$.

   [*Ici,* $x = -\sqrt{2}$ *est un point de maximum local et* $x = +\sqrt{2}$ *est un point de minimum local de* f *sur* $I\!R$.]

   Déterminer s'il existe $\inf_{I\!R}(F)$, $\sup_{I\!R}(F)$, $\min_{I\!R}(F)$ et $\max_{I\!R}(F)$.

   Déterminer si la fonction reciproque $f^{-1} : F \to]-2,4]$ existe et, si elle existe, faire son dessin.

---

6. Soit f la fonction suivante:

   $$f : x \;\mapsto\; \frac{x|x| - 3x + 2}{x-2} \qquad \text{avec } |x| = \begin{cases} +x & x \geq 0, \\ -x & x \leq 0. \end{cases}$$

   Déterminer le domaine de définition E de f et le signe de f sur E, calculer les limites de f au bord de E, déterminer les eventuelles asymptotes (vert., horiz., obliques) et donner l'allure du graphe de la fonction f.

A.A. 2017-2018 — Examen partiel d'analyse 1 à Nice le 9 Novembre 2017.

Specifier NOM, PRENOM et GROUPE TD (Elec, Phys1, Phys2, Mathinfo, Maths1, Maths2)

Vous devez apporter le plus grand soin à la rédaction et justifiez vos réponses !

---

1. Donner la définition de suite numérique convergente.

   Montrer que pour toute suite convergente, la valeur limite est unique.

---

2. Justifier mathématiquement si les enoncés suivants sont vrais ou faux.

   - $u_n = n(-1)^n + n$: (a) n'a pas de limite, (b) divergeante, (c) valeurs de signe alterné.
   - $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$: (a) $0 < u_n < 1$, (b) $u_n \sim \frac{1+(-1)^n}{n}$, (c) tend à 1.

---

3. On considère la suite (u_n) définie par la recurrence $u_{n+2} = \alpha\, u_{n+1} + (1-\alpha)u_n$ quand $n \geq 0$, avec $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et α paramètre réel.

   - Donner le polynôme caracteristique associé à la recurrence en fonction de α.
   - Donner le terme générale de la suite $(u_n)_n$ en fonction de n et de α.
   - Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ en fonction de α.

---

4. Ecrire sous la forme d'intervalle (ou d'union d'intervalles) les QUATRE ensembles $A = \{x \in I\!R,\ \sqrt{2x-2} \leq 4\}$, $B = \{x \in I\!R,\ \dfrac{x-1}{x^2-2x} \leq 0\}$, $A \cap B$, $A \cup B$.

---

5. Déterminer l'ensemble F image de $]-2,4]$ par la fonction $f : x \mapsto (2x^3 - x)$.

   [*Ici,* $x = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ *est un point de maximum local et* $x = +\frac{1}{\sqrt{6}}$ *est un point de minimum local de* f *sur* $I\!R$.]

   Déterminer s'il existe $\inf_{I\!R}(F)$, $\sup_{I\!R}(F)$, $\min_{I\!R}(F)$ et $\max_{I\!R}(F)$.

   Déterminer si la fonction reciproque $f^{-1} : F \to]-2,4]$ existe et, si elle existe, faire son dessin.

---

6. Soit f la fonction suivante:

$$f : x \ \mapsto \ \frac{-x|x| - 3x + 2}{x-2} \qquad \text{avec } |x| = \begin{cases} +x & x \geq 0, \\ -x & x \leq 0. \end{cases}$$

   Déterminer le domaine de définition E de f et le signe de f sur E, calculer les limites de f au bord de E, déterminer les eventuelles asymptotes (vert., horiz., obliques) et donner l'allure du graphe de la fonction f.