

Tout document est interdit.

Calculatrice, tél. portable, ordinateur, etc. sont aussi interdits !

Apporter le plus grand soin à la rédaction et justifier toute réponse !

---

1. [2 points]

On considère la suite  $(u_n) = n + \frac{(-1)^n}{n}$  pour  $n > 0$ .

Déterminer  $I = \inf_{n>0}(u_n)$ ,  $m = \min_{n>0}(u_n)$ ,  $S = \sup_{n>0}(u_n)$ ,  $M = \max_{n>0}(u_n)$ .

Déterminer si la suite  $(u_n)$  est bornée ou pas, monotone ou pas, convergente ou pas.

---

2. [3 points]

Calculer les deux limites suivantes :

(i)  $\ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} [n \ln(n-1) - (n+1) \ln n]$ ,      (ii)  $\ell_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + \frac{1}{n})^n$ .

---

3. [3 points]

(i) Ecrire le DL à l'ordre 1 pour la fonction  $t \mapsto \ln(t)$  dans un voisinage de  $t = 1$ .

(ii) Ecrire le DL à l'ordre 1 pour la fonction  $t \mapsto e^t$  dans un voisinage de  $t = 1$ .

(iii) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} (\ln x)^\alpha & \text{pour } x > 1, \\ e^x - e & \text{pour } x \leq 1. \\ 1/e & \text{pour } x \leq 1. \end{cases}$$

Calculer les limites à gauche et à droite de  $f$  en  $x = 1$  (discuter selon la valeur de  $\alpha$ ).

(iv) Déterminer pour quelle valeur de  $\alpha$  la fonction  $f$  est continue en  $x = 1$ .

---

4. [4 points]

Calculer les intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_1^e 3x^2 \ln x \, dx, \quad I_2 = \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \, dx.$$

Utiliser l'intégration par parties dans le calcul de  $I_1$ .

Utiliser le changement de variable  $t = \sqrt{x}$  dans le calcul de  $I_2$ .

---

5. [5 points]

On considère la fonction réelle de variable  $x$  réelle :

$$f(x) = x - 2 - \sqrt{(x^2 - 2x)}.$$

- (i) Déterminer le domaine  $Df$  de définition de  $f$ .
  - (ii) Calculer les limites de  $f$  à la frontière de  $Df$ .
  - (iii) Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f'$  (indiquer les éventuels points où la fonction  $f$  n'est pas dérivable). Donner l'expression de  $f'$ .
  - (iv) Étudier la croissance et décroissance de  $f$ .
  - (v) Déterminer les éventuels asymptotes verticaux et horizontaux.
  - (vi) Tracer le graphique de la fonction  $f$  sur le plan Cartésien en accord avec les résultats obtenus pour les étapes données ci-dessus.
- 

6. [3 points] On considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 2/x - 1 & 0 < x < 1 \\ x/2 + 1/2 & x \geq 1. \end{cases}$$

Tracer le graphique de  $f$ ; vérifier que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  sur  $I = ]0, \infty[$ ; tracer le graphique de  $f^{-1}$ ; calculer  $(f^{-1})'(2)$  et  $(f^{-1})'(3)$ .