Examen d'analyse en L1 – 10 juin 2015 – U.N.S.A.

`Tout document est interdit.`

`Calculatrice, tél. portable, ordinateur, etc. sont aussi interdits !`

`Apporter le plus grand soin à la rédaction et` **justifier toute réponse** `!`

---

1. [Les suites (2.5 pt)]

   On considère la suite (u_n) définie comme suit :

   $$u_{n+1} = \sqrt{u_n - \frac{2}{9}}, \qquad n \geq 0, \qquad u_0 \geq \frac{1}{3}.$$

   Etudier le comportement de la suite (u_n) pour $n \to +\infty$ en fonction de la valeur de u_0. Faire un dessin.

---

2. [Les DLs et les intégrales (5 pt)]

   (i) Ecrire le DL à l'ordre 3 pour la fonction $f : x \mapsto x \ln(1-x) + e^{x^2} - 1$ dans un voisinage de $x = 0$.

   (ii) En s'appuyant sur des DLs, déterminer l'équation de l'asymtote oblique de la fonction $f : x \to x e^{\frac{1}{1-x}}$ pour $x \to +\infty$.

---

3. [Les encadrements (3.5 pt)]

   On sait qu'on peut écrire $[a, b] = [a, x] \cup [x, b]$ et que pour une fonction f continue derivable sur $[a, b]$ avec derivée bornée $m \leq f' \leq M$ on a

   $$\begin{array}{ll} f(a) + m(x-a) \leq f(x) \leq f(a) + M(x-a) & x \geq a, \\ f(b) - M(b-x) \leq f(x) \leq f(b) - m(b-x) & x \leq b. \end{array}$$

   (i) On donne une fonction f dérivable définie sur l'intervalle $[1, 7]$ telle que

   $$f(1) = 2, \qquad f(7) = 3, \qquad -1 \leq f' \leq 3.$$

   Quel encadrement peut-on en déduire pour

   $$f(2), \qquad f(4), \qquad \max f, \qquad \min f, \qquad f, \qquad I = \int_2^4 f(x)dx \ ?$$

   Faire un dessin.

   (ii) On pose $f : x \mapsto 3x + \cos(\pi x)$. Encadrer f' et en déduire un intervalle autour de 3 dans lequel la fonction f reste comprise entre 7.98 et 8.02. La qualité de l'intervalle n'a pas d'importance.

4. [Le graphe de fonction (5 pt)]

   On considère une fonction réelle de variable réelle x :
$$f(x) = x\left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right).$$
   (i) Déterminer le domaine D de définition de f.

   (ii) Calculer les limites de f à la frontière de D.

   (iii) Déterminer le domaine de définition de la fonction f' (indiquer les éventuels points où la fonction f n'est pas dérivable). Donner l'expression de f'.

   (iv) Etudier la croissance et décroissance de f.

   (v) Déterminer les éventuelles asymptotes verticales, horizontales, ou obliques.

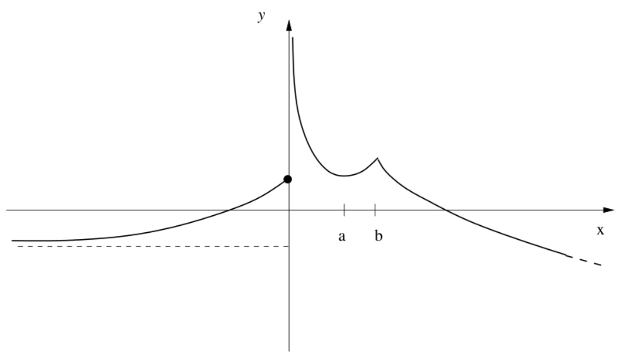
   (vi) Tracer le graphe de la fonction f dans le plan cartesien en accord avec les résultats obtenus dans les questions (i)-(v).

---

5. [Des questions de cours (4pt)]

   (i) Enoncer le théorème des accroissements finis pour f sur $[a, b]$.;
   (ii) En appliquant le théorème des accroissements finis sur $[a, b]$, montrer que pour f derivable sur $]a, b[$ on a : f est croissante sur $]a, b[$ si et seulement si $f'(x) \geq 0$, pour $x \in]a, b[$.

   On considère une fonction f dont le graphe est donné ci dessous.



   (iii) Donner le domaine D de définition de f;
   (iv) Déterminer le domaine où la fonction est continue et indiquer les éventuels points de discontinuité ;
   (v) Déterminer le domaine où la fonction est derivable et indiquer les éventuels points de non derivabilité ;
   (vi) Dire si la fonction admet des asymptotes et de quel type.