Examen d'analyse en L1 – 12 juin 2017 – U.N.S.A.

.

`Tout document, calculatrice, tél. portable, ordinateur sont interdits`

`Apporter le plus grand soin à la rédaction et justifier toute réponse !`

---

1. [*3 points*]

   Soit f la fonction définie sur $I\!R \setminus \{0\}$ par $f : x \mapsto (\frac{x}{2} + \frac{1}{x})$.

   Montrer que, $\forall\, u_0 > 0$, la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geq 0$, converge pour $n \to +\infty$ et donner la valeur de la limite.

   Visualiser la convergence de la suite (u_n) à l'aide d'un dessin (on choisira $u_0 = 1$).

---

2. [*5 points*]

   (i) Ecrire les DLs à l'ordre au moins 2 dans un voisinage de $t = 0$ pour les fonctions

$$t \mapsto \cos(t), \quad t \mapsto \ln(1+t), \quad t \mapsto \sin(t), \quad t \mapsto e^t.$$

   (ii) Utiliser ces DLs, à l'ordre qu'il faut, pour calculer les valeurs α et β suivantes:

$$\lim_{x\to 3}\left[\cos(\pi\, x) + \frac{e^{(x-3)^2}-1}{x-3}\right] = \alpha, \qquad \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(\cos(x\sqrt{2}))}{\sin(x)+1-e^x}\right] = \beta.$$

   (iii) Déterminer le domaine où la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} (x-1)|\ln(x-1)| & x > 1, \\ 0 & x \leq 1. \end{cases}$$

   est dérivable et indiquer les éventuels points de non-dérivabilité.

---

3. [*3 points*]

   Calculer les intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_{-1}^{1} |x^2 + 7x|\, dx\,, \qquad I_2 = \int_{1}^{2} x^2\, \ln(x)\, dx\,.$$

   Dessiner la fonction $x \mapsto |x^2 + 7x|$ avant de proceder au calcul de I_1.

   Utiliser l'intégration par parties dans le calcul de I_2.

---

4. [*5 points*]

On considère la fonction réelle de variable x réelle :

$$f : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{3x}{x^2+2}\right).$$

(i) Déterminer le domaine Df de définition de f.

(ii) Calculer les limites de f à la frontière de Df.

(iii) Déterminer le domaine de définition de la fonction f' (indiquer les éventuels points où la fonction f n'est pas dérivable). Donner l'expression de f'.

(iv) Etudier la croissance et décroissance de f.

(v) Déterminer les éventuelles asymptotes verticalles et horizontalles.

(vi) Tracer le graphique de la fonction f sur le plan Cartesien en accord avec les résultats obtenus pour les étapes données ci-dessus.

---

5. [*2.5 points*]

(i) Enoncer le théorème des accroissements finis.

(ii) Expliquer comment on arrive à l'inegalité des accroissements finis (IAF) en partant du théorème énoncé en (i).

(iii) Appliquer l'IAF à la fonction sinus sur l'intervalle $[3, \pi]$ pour encadrer $\sin(3)$.

---

6. [*1.5 points*]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, de variable réelle.

Montrer que si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.