Examen d'analyse en L1 – 11 janvier 2016 – U.N.S.A.– durée 3 heures

.

JUSTIFIER TOUTE REPONSE `! Tout document est interdit.`

`Calculatrice, tél. portable, ordinateur, etc. sont aussi interdits !` 1

---

1. [Les suites (3.5 pt)]

   (i) Donner la définition de la convergence de la suite (u_n) vers la valeur ℓ pour $n \to +\infty$.

   (ii) Soit (u_n) la suite définie comme suit:

   $$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1} \qquad n \geq 0.$$

   Montrer que la suite (u_n) est monotone decroissante.

   Montrer que la suite (u_n) est bornée inférieurement par 0.

   Montrer que la suite (u_n) converge pour $n \to +\infty$.

   Calculer la limite de la suite (u_n) pour $n \to +\infty$.

---

2. [Les fonctions (4.5 pt)]

   Soit donnée la fonction $$f : x \mapsto \begin{cases} -e^x + 1 & x \leq 0 \\ -\sqrt{x} & x > 0 \end{cases}$$

   (i) Déterminer si f est continue sur $\mathbb{R}$.

   (ii) Déterminer si f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   (iii) Dessiner le graphe de f.

   (iv) Déterminer $D = f(\mathbb{R})$.
   Dire s'il existe, dans $\mathbb{R}$, le $\inf(D)$, le $\sup(D)$, le $\min(D)$, le $\max(D)$.

   (v) f admet-elle la fonction reciproque f^{-1} ? Si oui, dessiner le graphe de f^{-1}.

   (vi) Calculer $I_1 = \int_{-1}^{0} f(x)dx$, $\quad I_2 = \int_0^1 f(x)dx \quad$ et $\quad I_3 = \int_{-1}^{1} f(x)dx$.

---

3. [Les DLs (3 pt)]

   Soit donnée la fonction $$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 3\sin(x)}{3x^2 + \ln(1+x)} & x \neq 0 \\ \alpha & x = 0. \end{cases}$$

   (i) Ecrire le DL à l'ordre 3 en $x_0 = 0$ pour $f_1 : x \mapsto \sin(x)$ et $f_2 : x \mapsto \ln(1+x)$.

   (ii) Calculer $\ell = \lim_{x \to 0} f(x)$.

   (iii) Déterminer la valeur de α pour que f soit continue en 0.

4. [Le graphe de fonction (6 pt)]

   Soit donnée la fonction
   $$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 e^x}.$$

   (i) Déterminer le domaine D de définition de f.

   (ii) Calculer les limites de f à la frontière de D.

   (iii) Déterminer le domaine de définition de la fonction f' (indiquer les éventuels points où la fonction f n'est pas dérivable). Donner l'expression de f'.

   (iv) Etudier la croissance et décroissance de f.

   (v) Déterminer les éventuels asymptotes verticales, horizontales, obliques.

   (vi) Tracer le graphe de la fonction f sur le plan Cartesien.

---

5. [Question de cours et application (3 pt)]

   (i) Enoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction f sur un intervalle $[a, b]$.

   (ii) Soit f une fonction derivable sur $]a, b[$. Montrer que
   $$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a, b[\qquad \Longleftrightarrow \qquad f \quad \text{est croissante sur} \quad]a, b[.$$

[La copie (± 0.5 pt)]

(i) Ecrire le nom, le prénom, le lieu et la date de naissance; Specifier le groupe de TD.

(iii) Apporter le plus grand soin à la rédaction (l'épreuve dure 3 heures !!!!)