Examen d'analyse en L1 – 12 janvier 2017 – U.N.S.A.

.

`Tout document, calculatrice, tél. portable, ordinateur sont interdits`

`Apporter le plus grand soin à la rédaction et justifier toute réponse !`

---

1. [*3 points*]
   On considère les suites (u_n) et (w_n) définies pour $n \geq 0$ comme suit:
   $$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2, \quad \text{avec } u_0 = 6, \qquad \text{et } w_n = u_n - 3, .$$
   (i) Montrer que (w_n) est une suite géometrique dont on donnera la raison q et le premier terme w_0.
   (ii) Exprimer w_n puis u_n en fonction de n.
   (iii) En déduire la limite de la suite (w_n) et celle de la suite (u_n) pour $n \to +\infty$.

---

2. [*4 points*]
   (i) Ecrire le DL à l'ordre 3 pour la fonction $t \mapsto \sin(t)$ dans un voisinage de $t = 0$.
   Ecrire le DL à l'ordre 2 pour la fonction $t \mapsto e^t$ dans un voisinage de $t = 0$.
   (ii) Soit α un nombre réel et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit :
   $$f(x) = \frac{1 - e^{\alpha x}}{2\sin(x)}, \text{ pour } x > 0, \text{ et } \quad f(x) = 3, \text{ pour } x \leq 0.$$
   a) Calculer la limite à droite de f en $x = 0$ en fonction du paramètre α.
   b) Pour quelle(s) valeur(s) de α la fonction f est-elle continue en $x = 0$?
   c) Pour quelle(s) valeur(s) de α la fonction f est-elle dérivable en $x = 0$?

---

3. [*3 points*] Calculer les intégrales suivantes:
   $$I_1 = \int_1^2 x \ln(x)\, dx\,, \qquad I_2 = \int_0^1 (e^x - 2)\, e^x\, dx\,.$$
   Utiliser l'intégration par parties dans le calcul de I_1.
   Utiliser le changement de variable $t = e^x$ dans le calcul de I_2.

---

4. [*5 points*]

On considère la fonction réelle de variable x réelle :

$$f : x \mapsto \frac{(x^2 - x + 2)}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}.$$

(i) Déterminer le domaine Df de définition de f.

(ii) Calculer les limites de f à la frontière de Df.

(iii) Déterminer le domaine de définition de la fonction f' (indiquer les éventuels points où la fonction f n'est pas dérivable). Donner l'expression de f'.

(iv) Etudier la croissance et décroissance de f.

(v) Déterminer les éventuelles asymptotes verticalles et horizontalles.

(vi) Tracer le graphique de la fonction f sur le plan Cartesien en accord avec les résultats obtenus pour les étapes données ci-dessus.

---

5. [*3 points*]

(i) Enoncer le théorème de Rolle.

(ii) Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'équation

$$-x^3 + 6x + \alpha = 0$$

ne peut pas avoir deux solutions dans l'intervalle $]0, 1[$.

(iii) Dire pour quelles valeurs du paramètre α l'équation n'a pas de solution dans l'intervalle $]0, 1[$.

(iv) Dire pour quelles valeurs du paramètre α l'équation a une et une seule solution dans l'intervalle $]0, 1[$.

---

6. [*2 points*]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, de variable réelle.

(i) Donner la définition de fonction f continue en un point $x_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) Donner la définition de fonction f dérivable en un point $x_0 \in \mathbb{R}$.