Feuille 1 d'exos en analyse.

1. Considerons les énoncés suivants :
   - p : "Toto a la fièvre"
   - q : "Toto a peur de l'évaluation"
   - r : "Toto va à l'école".

   Interpreter les 2 enoncés suivants : $p \vee q \Longrightarrow \neg r, \quad \neg p \wedge \neg r \Longrightarrow q$.
2. Verifier, selon le principe du Modus Ponens, si les deductions suivantes sont correctes.
   - Aujourd'hui s'il pleut, je sors en voiture;
     aujourd'hui il ne pleut pas; alors je ne sors pas en voiture.
   - Aujourd'hui s'il pleut, je sors en voiture;
     je ne sors pas en voiture; alors aujourd'hui il ne pleut pas.
3. Soient x, y deux nombres naturels et $p(x, y)$: "$x < y$". Interpreter les écritures suivantes:

   $$\exists x \forall y : p(x,y), \qquad \exists x \exists y : p(x,y), \qquad \forall x \forall y : p(x,y), \qquad \forall x \exists y : p(x,y)$$

   Soit $p(x, y)$: le point x est sur la droite y. Interpreter les ecritures suivantes et faire le dessin géometrique correspondant.

   $$\forall x \exists y : p(x,y), \quad \exists x \forall y : p(x,y), \quad \forall x : p(x,y), \quad \forall y \exists x : p(x,y), \quad \exists y \forall x : p(x,y).$$
4. On considére l'implication suivante $p \Longrightarrow q$, avec $p : (\alpha = 2)$ et q : (α est pair). Ecrire la contraposée $\neg q \Longrightarrow \neg p$, la contraire $\neg p \Longrightarrow \neg q$, la reciproque $q \Longrightarrow p$, et la négation $p \wedge \neg q$, chaqu'une avec la table de verité qui leur est propre.
5. Formaliser à l'aide des quantificateurs:
   - L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
   - La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prend la valeur constante 2.
   - La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire.
   - La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a un unique zero.
6. On considére $p(x)$: x est un élève, $q(x)$: x adore les maths. Formaliser:
   - tous les élèves adorent les maths.
   - pas tous les élèves adorent les maths.
7. Montrer que la relation d'inclusion entre ensembles est une relation d'ordre.
8. Soit $n \in I\!N$. Montrer que : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et que $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$.
9. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto e^x$ n'est pas surjective.

10. Ecrire $f \circ g$ et $g \circ f$ pour les fonctions suivantes:

$$\begin{array}{rcl} f : x \mapsto x^3 & , & g : t \mapsto \sin t\,. \\ f : x \mapsto 2x & , & g : t \mapsto e^t\,. \\ f : x \mapsto \cos x & , & g : t \mapsto \frac{1}{t}\,. \end{array}$$

11. Definir, s'il existe, la fonction inverse (notée f^{-1}) des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x}, \quad f : x \mapsto \ln x, \quad f : x \mapsto 2x+3, \quad f : x \mapsto x^{2/3}.$$

12. Dans chacun des cas suivants, dites si l'ensemble considéré est majoré ou minoré. Lorsque c'est possible, donnez la borne supérieure et la borne inférieure et déterminez si l'ensemble possède un maximum, un minimum.

$$\begin{array}{l} A =]-3,1] \cup]0,2], \quad B =]-\infty,1] \cap [1,+\infty[, \\ C = [0,1[\cup [2,3[, \quad D =]-\infty,3[\cap [2,4[, \\ E =]-\infty,3] \cap]-1,+\infty[, \quad F = [1,3] \cup]2,4[, \\ G =]-\infty,1[\cup]1,+\infty[, \quad H = [0,4] \cap]0,3[. \end{array}$$

13. Soient A et B les deux ensemble suivants:

$$A = \{-4,-3,-1,-2,0,4,5,6,7,8\}, \qquad B = \{-1,-2,1,2,3\}.$$

Définir $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \triangle B$, $\mathcal{C}_U A$ et $\mathcal{C}_U B$ avec $U = \{n \in Z, -4 \leq n \leq 8\}$.