



FEUILLE No 1

Exercice 1 Traduire à l'aide de quantificateurs :

- "il existe un nombre entier tel que si on multiplie ce nombre par 2, on obtient 4."
- "il existe un nombre entier impair dont le carré est pair"
- "tout nombre entier impair a son carré impair"
- "la somme de deux nombres entiers pairs est un nombre pair"

Exercice 2 Soit  $I \subset \mathbb{R}$ . Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application. On dit que  $f$  est croissante si :  
"étant donnés deux éléments quelconques de  $\mathbb{R}$ , leurs images par  $f$  sont rangées dans le même ordre."

On dit que  $f$  est décroissante si : "étant donnés deux éléments quelconques de  $\mathbb{R}$ , leurs images par  $f$  sont rangées dans l'ordre inverse."

Traduire les définitions précédentes avec des quantificateurs.

Exercice 3 Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , l'application définie par  $f(x) = 2x + 1$ . Montrer que  $f$  est croissante.

Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , l'application définie par  $f(x) = x^2$ . Cette application est-elle croissante ?  
Que dire de  $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $h(x) = x^2$  ?

Exercice 4 Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application. Rappeler la définition de "f est injective".  
Montrer que cette définition est équivalente à

$$\forall x, x' \in X, (f(x) = f(x')) \implies x = x'.$$

Exercice 5 Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 8x - 3$ . Montrer que  $f$  est injective.

Exercice 6 Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions injectives. Montrer que  $f \circ g$  est injective.

Exercice 7 Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$ . Montrer que  $f$  n'est pas surjective.

Exercice 8 Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 2x$  et  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  définie par  $g(x) = 2x$ .  
Montrer que  $f$  est surjective et que  $g$  ne l'est pas.

Exercice 9 Démontrer que  $\sqrt{2}$  n'est pas rationnel. On pourra procéder par l'absurde et supposer qu'il existe deux entiers  $a$  et  $b$  premiers entre eux tels que  $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ .

Exercice 10 Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. Soit  $S_n$  la somme des  $n$  premiers nombres impairs ; c.a.d.  $S_n = \sum_{k=1}^n (2k - 1)$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = n^2$ .

2. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in ]-1, +\infty[, (1+x)^n \geq 1+nx.$$

**Exercice 11** Dans chacun des cas suivants, dites si l'ensemble considéré est majoré, minoré? Lorsque c'est possible, donnez la borne supérieure et la borne inférieure et déterminez si l'ensemble possède un maximum, un minimum.

$$E_1 = ]0, 1], E_2 = \mathbb{N}, E_3 = [0, +\infty[, E_4 = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\}.$$

---