Feuille 2 d'exos en analyse.

1. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
   - À partir de quel entier N_1 la condition $u_n \in]-0.1, 0.1[$ est vérifiée ? Combien de termes u_n ne vérifient pas la condition ?
   - À partir de quel entier N_2 la condition $u_n \in]-10^{-6}, 10^{-6}[$ est vérifiée ?
   - Quelle est la limite de la suite (u_n) pour $n \to +\infty$?
   - Quelle est la limite de la suite (v_n) définie par $v_n = 2 - u_n$ pour $n \to +\infty$? Démontrer ce résultat à l'aide de la définition.
2. Montrer que si une suite (u_n) converge vers 1, tous ses termes sont positifs à partir d'un certain rang.
3. Montrer que toute suite convergente est bornée. Pour le montrer, on proposera un minorant et un majorant de cette suite.
4. Montrer que toute suite convergente est une suite de Cauchy.
5. Calculer, si possible, pour $n \to +\infty$ la limite des suite (u_n) avec
   - $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$;
   - $u_n = \frac{n^2}{n^2+1}$;
   - $u_n = a^{1/n}$ avec $a > 0$;
   - $u_n = q^n$ (en variant q);
6. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.
   - Montrer que (u_n) est monotone croissante.
   - Montrer que (u_n) est bornée : $0 < u_n < 2$.
   - En deduire que $(u_n) \to 2$ pour $n \to +\infty$.
   - Montrer que toute suite monotone (croissante ou decroissante) bornée est convergente.
7. Montrer que la suite (F_n) de Fibonacci définie par

   $$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

   est divergente pour $n \to +\infty$.

8. Soient (u_n), (v_n), (w_n) trois suites réelles telles que :
• $\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n \in N, \quad (n \geq N \implies u_n \leq v_n \leq w_n)$
• (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ pour $n \to +\infty$.
Montrer que (v_n) converge aussi vers ℓ pour $n \to +\infty$.

   Utiliser ce thèoreme (connu comme celui des gendarmes) pour montrer que la suite (u_n) est convergente, avec $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$, ou $u_n = \frac{\cos n}{n}$.

9. Soient (u_n), (v_n) deux suites réelles telles que :
• $\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n \in N, \quad (n \geq N \implies u_n \leq v_n)$
• $(u_n) \to +\infty$ pour $n \to +\infty$.
Montrer que $(v_n) \to +\infty$ pour $n \to +\infty$.

   Utiliser ce thèoreme (corollaire du précedent si $\ell = +\infty$) pour montrer que la suite $\{u_n\}$ diverge, avec $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^2+k^2}$, ou $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$, ou $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)$.

10. Pour étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1} \qquad n \geq 1$$

   montrer que $u_n \in [0, +\infty[$ pour tout n et que (u_n) est une suite decroissante.

11. On veut étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 2} \qquad n \geq 1.$$

   - Montrer que $\alpha = \sqrt{2} - 1$ vérifie l'équation $f(x) = x$ où $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+2}$.
   - Montrer en suite que $u_n \in [0, +\infty[$.
   - Montrer par recurrence que

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n} |u_0 - \alpha|, \qquad \forall n.$$

   - Montrer graphiquement la convergence de la suite à α.