LICENCE DE MATHÉMATIQUES
ANALYSE 1
UNIVERSITE DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS

FEUILLE No 2

Les exercices marqués d'une $*$ sont plus difficiles.

Exercice 1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.*

1. *Rappeler la définition de $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ (où ℓ désigne un nombre réel).*
2. *On suppose que $u_n = \frac{1}{2n}$ pour tout $n \geq 1$. En utilisant la définition, montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.*
3. *On suppose que $u_n = \frac{1}{n^2+1}$. En utilisant la définition, montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.*

Exercice 2 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \ell + \frac{1}{\sqrt{n}}$. En utilisant la définition, montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.*

Exercice 3 (*) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique convergeant vers une limite ℓ. Montrer que (u_n) est nécessairement de Cauchy.*

Exercice 4 (*) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On suppose que (u_n) est de Cauchy. Montrer que (u_n) est bornée.*

Exercice 5 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.*

1. *Rappeler la définition de $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*
2. *On suppose que $u_n = 2n+5$, En utilisant la définition, montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*
3. *Même question avec $u_n = n^2 - n$ (on pourra commencer par montrer que pour tout $n \geq 2$, $n^2 \geq 2n$).*
4. *Même questiuon avec $u_n = \frac{n^2-1}{n+2}$, puis $u_n = n + \cos(n)$.*

Exercice 6 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \frac{n^5+2n}{4n^5+n^2}$. Cette suite est elle convergeante ?*

Exercice 7 *Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4+n\sin(n^2)}{n^4+n^3}$.*

Exercice 8 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = (-1)^n$. Cette suite est elle bornée ? Cette suite est elle convergeante ? Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_{2n}$. Montrer que cette suite converge.*

Exercice 9 (**) *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est valeur d'adhérence de u si*

$$\forall\epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ |u_n - a| < \epsilon.$$

1. *Montrer que si u_n converge vers une certaine limite ℓ alors ℓ est valeur d'adhérence de u_n.*
2. *La réciproque est elle vraie ?*
3. *Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.*
   - *i) a est valeur d'adhérence de (u_n).*
   - *ii) Il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $v_n = u_{\varphi(n)}$ converge vers a.*

4. *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On suppose que u_n possède une valeur d'adhérence a et qu'elle est de Cauchy. Montrer que u_n converge vers a.*

Exercice 10 (**) *Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suite numériques*

1. *On suppose que u et v possèdent chacune une valeur d'adhérence. La suive $w = u + v$ possède-t-elle une valeur d'adhérence.*
2. *On suppose maintenant que u converge vers une limite ell et que v possde une valeur d'adh'erence $a \in \mathbb{R}$. Montrer $a + \ell$ est valeur d'adhérence de la suite $w = u + v$.*

Exercice 11 (***)

Montrer que toute suite numérique bornée possède au moins une valeur d'adhérence (Théorème de Bolzano-Weirstrass).

Exercice 12 *Soit q un nombre réel. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$.*

1. *On suppose que $|q| < 1$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge et calculer sa limite.*
2. *On suppose que $q \geq 1$. Montrer que u_n tend vers $+\infty$.*
3. *Que peut on dire quend $q < -1$?*

Exercice 13 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On suppose que $(u_n)_n$ converge et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall n \geq n_o, u_n = u_{n_0}.$$

Exercice 14 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers un réel ℓ. On suppose que $\ell \neq 0$. Montrer qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall n \geq N,\ u_n \neq 0$$

Exercice 15 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = n\sin(n\frac{\pi}{2})$. Montrer que cette suite n'est pas bornée. Montrer qu'elle ne tend ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$.*

Exercice 16 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite numérique. On suppose que (u_n) n'est pas majorée et que (u_n) est croissante. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*

Exercice 17 *Soit $b > 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = b^n$. Montrer que (u_n) est croissante et tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.*

Exercice 18 *Soient $a > 1$ et $k \in \mathbb{N}$ fixés et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \frac{a^n}{n^k}$.*

1. *Montrer qu'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n-1}}{u_n} \geq \frac{a+1}{2}$.*
2. *En déduire que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0}(\frac{a+1}{2})^{n-n_0}$*
3. *Déduire de l'exercice précédent que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*

Exercice 19 (*) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose qu'il existe une constante $k \in]0,1[$ telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \tag{1}$$

Soit u_n la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. *Montrer que*
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|.$$
2. *En déduire que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, on a*
$$|u_{n+p} - u_n| \leq \frac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0|.$$
3. *Montrer que la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy.*
4. *En déduire qu'elle converge.*