Feuille 3 d'exos en analyse.

1. Etablir si les écritures suivantes sont vraies ou fausses.

(1)	$n+\sqrt{n} \ \sim \ n$	V ou F
(2)	$e^n \ \sim \ n^n$	V ou F
(3)	$n^{3/2}+n+\sin(n\alpha) \ \sim \ n^{3/2}$	V ou F
(4)	$\sqrt{n} = \ \mathrm{o}(n)$	V ou F
(5)	$\frac{1}{2}n^2+n = \ \mathrm{o}(n^2)$	V ou F
(6)	$\sqrt{n}\sin(n) = \ \mathrm{o}(\sqrt{n})$	V ou F
(7)	$\frac{n^2-1}{n^2} = 1+\mathrm{o}(\frac{1}{n})$	V ou F
(8)	$n^3 = \ \mathrm{o}(n^6)$	V ou F
(9)	$5n^2 = \ \mathrm{O}(n^2)$	V ou F
(10)	$n+e^{\sqrt{n}} = \ \mathrm{O}(n^5)$	V ou F
(11)	$\ln n = \ \mathrm{O}(n)$	V ou F
(12)	$e^{2n} = \ \mathrm{O}(e^n)$	V ou F
(13)	$n^3 \ \asymp \ 5n^3+7n^2$	V ou F
(14)	$e^{n+\ln n} \ \asymp \ e^n$	V ou F
(15)	$\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{\sin n\alpha}{n} \ \sim \ \frac{1}{\sqrt{n}}$	V ou F
(16)	$n^3 \ \sim \ 10\ n^{5/3}$	V ou F
(17)	$n+\ln n = \ \mathrm{O}(1)$	V ou F
(18)	$\frac{1}{n^2} = \ \mathrm{o}(1)$	V ou F

2. Calculer le terme général de la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad u_1 \in \mathbb{R}, \quad u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1}+u_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

et étudier la convergence. Même question pour la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 0, \quad v_1 = 1, \quad v_{n+2} = v_{n+1} - \frac{1}{2}v_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Etudier la suite (w_n) définie par

$$w_0 = 1, \qquad w_{n+1} = \frac{w_n}{w_n^2+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Etudier la suite (z_n) définie par

$$z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. Calculer, s'il existe, la valeur limite des suites (u_n) pour $n \to \infty$

(a) $u_n = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{2n}$ (b) $u_n = \frac{\sqrt{n} - n + n^2}{2n^2 - n^{3/2} + 1}$

(c) $u_n = \frac{2^n - 3^n}{1 + 3^n}$ (d) $u_n = \frac{2^n + n^2}{3^n + n^3}$

(e) $u_n = \frac{n \ln n}{(n+1)(n+2)}$ (f) $u_n = \frac{1 + \ln n}{\sqrt{n} - \ln n}$

(g) $u_n = (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1}$ (h) $u_n = (-1)^n \frac{n^2 + 1}{n + 1}$

(i) $u_n = (2^n + 3^n)^{1/n}$ (j) $u_n = \left(\frac{2n}{3n^2 + 1}\right)^{1/n}$

(k) $u_n = \frac{n^2(3^n - 3^{-n})}{4^n + n^2}$ (l) $u_n = \frac{n^6 + \ln n + 3^n}{2^n + n^4 + (\ln n)^5}$

(m) $u_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n$ (n) $u_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$

(o) $u_n = \frac{(n^2 + 1)^n}{n^{2n}}$ (p) $u_n = \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$

(r) $u_n = (3^{1/n} - 1)^n$ (s) $u_n = (n \ln n)^{1/n}$

(t) $u_n = n^2 \; 2^{-\sqrt{n}}$ (z) $u_n = (n^{\sqrt{n}} - 2^n)$.