Feuille 4 d'exos en analyse.

On rappelle que pour des réels $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $a > 1$ on a

$$\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} \longrightarrow 0 \text{ pour } x \longrightarrow +\infty, \qquad \text{et} \qquad x^\beta |\ln x|^\alpha \longrightarrow 0 \text{ pour } x \longrightarrow 0^+.$$

$$\frac{a^x}{x^\beta} \longrightarrow +\infty, \text{ pour } x \longrightarrow +\infty, \qquad \text{et} \qquad a^x |x|^\beta \longrightarrow 0 \text{ pour } x \longrightarrow -\infty.$$

Dans un voisinage de 0, on a

$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{6}, \qquad e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2}, \qquad \ln(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2}.$$

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}, \qquad \mathrm{tg} x \sim x + \frac{x^3}{3}, \qquad \mathrm{arctg} x \sim x - \frac{x^3}{3}, \qquad (1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x.$$

1. Calculer

   (a) $\lim_{x\to 0^+}[x^{\frac{1}{3}}(\ln x)^{10}]$ $\qquad$ (b) $\lim_{x\to 0^+}[e^{\frac{1}{x}}\sin x]$

   (c) $\lim_{x\to +\infty}[(1+e^{-x})^{x^3}]$ $\qquad$ (d) $\lim_{x\to -\infty}[2^x(x^3 + \ln|x|)]$

   (e) $\lim_{x\to +\infty}[\frac{x^2+3\ln x-4}{x+\sqrt{x^2+3}}]$ $\qquad$ (f) $\lim_{x\to -\infty}[\frac{2x+e^x-5\sin x}{(x^2+x)^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}}]$

   (g) $\lim_{x\to 0}[\frac{\sin^2 x-2x}{\mathrm{tg}^3 x+x}]$ $\qquad$ (h) $\lim_{x\to +\infty}[\frac{3^x-2^x}{x^3-x^2}]^{-\frac{1}{3}}$

   (i) $\lim_{x\to +\infty}[x^\alpha(\cos\frac{1}{x}-1)]$ $\qquad$ (j) $\lim_{x\to +\infty}[(x^5-4x^4)^{\frac{1}{5}}-x]$

2. Dessiner qualitativement le grafique des fonctions suivantes:

$$x \mapsto (x-2)e^{-\frac{1}{x}}, \qquad x \mapsto \ln^2 x - 2\ln x$$

$$x \mapsto \sqrt{\left|\frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}\right|}, \qquad x \mapsto e^{x^2}(x+1)^{\frac{1}{3}}$$

3. Déterminer le domaine de définition E et l'image $f(E)$ pour les fonctions f suivantes (on precisera leur type "topologique" ... ouvert, fermé, borné, ...)

$$x \mapsto \frac{x}{|x|+1}, \qquad x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} -1 & x \le -1 \\ x & -1 \le x \le 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{array} \right\}, \qquad x \mapsto (1-x)\sin(\frac{1}{x}).$$