LICENCE DE MATHÉMATIQUES 2011-12
ANALYSE 1
UNIVERSITE DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS

FEUILLE No 3

Exercice 1 *Soit* $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *l'application définie par* $f(x) = 2x^4$. *En utilisant la définition, montrer que* $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

On suppose maintenant que $f(x) = x^2 + 1$, *montrer que* $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

Exercice 2 *Soit* $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = 1$ *si* $x < 1$ *et* $f(x) = x^2$ *si* $x \geq 1$. *En utilisant la définition, montrer que* $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

Exercice 3 *Soit* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *une fonction. Soit* $x_0 \in]a,b[$ *et* $\ell \in \mathbb{R}$. *Montrer que les deux assertions suivantes sont equivalentes :*

i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$

ii) Pour toute suite (u_n) *convergeant vers* x_0, *on a* $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

Exercice 4 *Soit* $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.

1. *Tracer le graphe de la fonction* f.
2. *Construire deux suites de réels positifs* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui tendent vers* 0 *et telles que*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = 0 \text{ et } f(v_n) = 1.$$
3. *Montrer que* f *n'a pas de limite quand* x *tend vers* 0.

Exercice 5
1. *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions et* $x_0 \in \overline{I}$. *On suppose que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ *et que* g *est bornée sur* I. *Montrer que à l'aide de la définition* $\lim_{x\to x_0} (fg)(x) = 0$.
2. *Calculer (en justifiant)* $\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x})$.

Exercice 6 *Soit* $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \frac{x^9+4x^5+2x}{x^{12}+2x^3+2x}$. *Calculer* $\lim_{x\to 0} f(x)$. *Même question avec* $g(x) = \frac{x^{100}+x^2}{x^4+x}$ *puis avec* $h(x) = \frac{x^{10}+x^2}{x^6+x^4}$.

Exercice 7 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *la fonction définie par*
$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x > 0 \\ 2x^2 + x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$
Montrer que f *a une limite en* 0.

Exercice 8 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *la fonction définie par*
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4+2x^2}{x^6+x^2} \text{ si } x > 0 \\ 1 - \cos(x) \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$
Cette fonction a-t-elle une limite en 0 *?*

Exercice 9 *Soit* $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \frac{1}{(x-1)}$. *Montrer à l'aide de la définition que* $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$.

Exercice 10 *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ *par* $f(x) = \frac{1}{x-1}$. *Montrer que* f *n'a pas de limite en* 1. *Comparer à l'exercice précédent.*

Exercice 11 *Soit* f *définie par* $f(x) = \frac{1}{x+1}$. *Montrer que* f *est bornée sur* $\mathbb{R}^+$. *Montrer que* f *n'est pas bornée sur* $]-1,+\infty[$.

Exercice 12 *Soit* $f :]0+\infty[\to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. *Montrer à l'aide de la définition que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 13 *Soient* P *et* Q *deux polynomes. On note* $r = deg(P)$, $s = deg(Q)$ *et* $P(x) = \sum_{k=0}^{r} a_k x^k$, $Q(x) = \sum_{k=0}^{s} b_k x^k$. *On suppose que* Q *n'est pas le polynome nul.*

1. *Montrer qu'il existe* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall x \geq a,\ Q(x) \neq 0$.
2. *Soit* $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. *Montrer que :*
   - $r > s \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = sgn(\frac{a_r}{b_s})\infty$.
   - $r = s \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{a_r}{b_r}$.
   - $r < s \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 14 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = x\sin(x)$. *Cette fonction a-t-elle une limite en* $+\infty$. *Quid de la fonction* $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(x)$ *?*

Exercice 15 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction périodique (i.e.* $\exists T > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$*). On suppose que* f *admet une limite finie en* $+\infty$. *Montrer que* f *est nécessairement constante.*

Exercice 16 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite définie par* $u_0 \in \mathbb{R}$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$. *On suppose que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ *et* $\lim_{x\to l} f(x)$ *existe. Montrer que* $f(l) = l$.

Exercice 17 *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction croissante. On suppose que pour tout* $x_0 \in I$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ *et qu'il existe un unique* $\ell \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(\ell) = \ell$. *On se donne une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 \in \mathbb{R}$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$ *et on suppose dans tout l'exercice que* $u_0 > \ell$.

1. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \ell$.
2. *On suppose que* $u_1 < u_0$. *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et minorée. En déduire qu'elle tend vers* ℓ *quand* n *tend vers l'infini.*
3. *On suppose maintenant que* $u_1 \geq u_0$. *On veut montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers l'infini.*
   (a) *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*
   (b) *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas majorée (on pourra procéder par l'absurde.*
   (c) *En déduire qu'elle tend vers* $+\infty$.

Exercice 18 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $u_0 \in \mathbb{Q}$, $u_0 > \sqrt{2}$ *et* $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$.

1. *Tracer le graphe de la fonction* f.
2. *Montrer que* $u_n \in \mathbb{Q}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
3. *Montrer que* $u_n > \sqrt{2}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
4. *En déduire que* (u_n) *est décroissante.*
5. *Montrer que la suite* (u_n) *converge vers* $\sqrt{2}$.