

Feuille 5 d'exos en analyse.

1. Etudier, pour $n \rightarrow \infty$, le comportement de la suite

$$u_0 = 2, \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.$$

Etudier, pour $n \rightarrow \infty$, le comportement de la suite (u_n) en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$, avec

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n, \quad u_0 = 0, \quad u_1 = \lambda.$$

2. Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{1}{n+1}$.

- À partir de quel entier N_1 la condition $u_n \in]-0.1, 0.1[$ est vérifiée ? Combien de termes u_n ne vérifient pas la condition ?
- À partir de quel entier N_2 la condition $u_n \in]-10^{-2}, 10^{-2}[$ est vérifiée ?
- Dire si la suite (u_n) est croissante, décroissante, bornée inférieurement, bornée supérieurement, bornée.
- Quelle est la limite de la suite (u_n) pour $n \rightarrow +\infty$?

3. Montrer que l'opération produit de deux suites commute avec l'opération de limite, quand les deux suites convergent, c'est-à-dire, montrer que la suite produit (w_n) de deux suites (u_n) , (v_n) convergentes, $u_n \rightarrow \ell_u$, $v_n \rightarrow \ell_v$, converge à $\ell_u \ell_v$.

4. Calculer

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} \right]$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \left[\frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} \right]$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}]$$

$$(d) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x} \right]$$

5. Dessiner qualitativement le graphique des fonctions suivantes:

$$x \mapsto \frac{x^2 + 2|x|}{x}, \quad x \mapsto \frac{x+2}{x^2 \ln x}.$$

6. Déterminer sur \mathbb{R} , s'il existe, $\inf(E)$, $\sup(E)$, $\min(E)$, $\max(E)$ du domaine E de validité de l'inégalité suivante (une à la fois)

$$(a) \quad \sqrt{2x-1} > -3, \quad (b) \quad \sqrt{x^2+3x} < 2, \quad (c) \quad \sqrt{x^2-4x+5} > \sqrt{x^2-8x+15}.$$