Feuille 6 d'exos en analyse.

1. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 2x^4$. En utilisant la définition, montrer qu'elle est continue en $x_0 = 0$. On suppose maintenant que $f(x) = x^2 + 1$, montrer que f est continue en $x_0 = 1$.

2. Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in]a,b[$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que les deux assertions suivantes sont equivalentes:
(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$;
(ii) Pour toute suites (u_n) qui converge vers x_0 quand $n \to +\infty$ on a $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

3. Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.
(i) Tracer le graphique de f.
(ii) Construire deux suites de réels positifs (u_n) et (v_n) qui convergent toutes les deux à 0 pour $n \to +\infty$ et pour lesquelles on a
$$f(u_n) = 0 \ \forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad f(v_n) = 1 \ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$
(iii) Montrer que f n'a pas de limite quand x tend vers 0.

4. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^9+4x^5+2x}{x^{12}+2x^3+2x}$. Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$. Même question avec $g(x) = \frac{x^{100}+x^2}{x^4+x}$ puis avec $h(x) = \frac{x^{10}+x^2}{x^6+x^4}$.

5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0, \\ 2x^2 + x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$
La fonction f est-elle continue en $x_0 = 0$?

6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4+2x^2}{x^6+x^2} & \text{si } x > 0, \\ 1 - \cos(x) & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$
La fonction f est-elle continue en $x_0 = 0$?

7. Déterminer l'image de l'intervalle $[-2,1[$ par la fonction $f : x \mapsto 1 + x^4$.
Déterminer l'image de l'intervalle $]-4,1]$ par la fonction $f : x \mapsto x^2$.
Déterminer l'image de l'intervalle $]-2,4]$ par la fonction $f : x \mapsto x^3 - 6x + 1$.
Déterminer l'image de l'intervalle $]-3,5]$ par la fonction $f : x \mapsto x^3 - 15x + 2$.

8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
   - $f([3,10[) = [2,40]$ V ou F
   - $f([3,5[) = [2,+\infty[$ V ou F
   - $f([3,5]) =]2,8]$ V ou F
   - $f([3,5]) = [4,6]$ V ou F
   - $f([3,7[) = [4,5[\cup]5,7]$ V ou F
   - $f([2,3[\cup]4,5]) = f([2,3[) \cup f(]4,5])$ V ou F
   - $f([2,4[\cap[3,5]) = f([2,4[) \cap f([3,5])$ V ou F