Feuille 7 d'exos en analyse.

IAF = Inegalité des Accroissement Finis; TVI = Théorème des Valeurs Intérmediaires;

1. Montrer à l'aide du TVI que l'équation $2x^3 + 3x^2 - 2x = 2$ admet au moins une solution sur $[-2, 1]$.
2. Montrer à l'aide du TVI que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0, 1]$.

   A' l'aide du procedé de dichotomie (et de la calculette, si necessaire), donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
3. Déterminer si la fonction f est derivable en a et si oui, préciser $f'(a)$.

$$\begin{array}{llll}
(1) & f : x \mapsto 2x^2 - 3, \quad a = 2, & (2) & f : x \mapsto \sqrt{x+1}, \quad a = -1, \\
(3) & f : x \mapsto \frac{2}{x^2+1}, \quad a = 1, & (4) & f : x \mapsto |4x + 2|, \quad a = -2, \\
(5) & f : x \mapsto x^2\sqrt{x}, \quad a = 0, & (6) & f : x \mapsto \frac{2x+1}{x-3}, \quad a = 2, \\
(7) & f : x \mapsto \frac{2x}{|3x|+4}, \quad a = 0, & (8) & f : x \mapsto \frac{|x|}{x+1}, \quad a = 0.
\end{array}$$

4. On considère la fonction
$$f(x) = \begin{cases} (x-\beta)^2 - 2, & x \geq 0, \\ \alpha \sin x, & x < 0. \end{cases}$$
   Déterminer α et β pour que f soit continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
5. On considère la fonction $f(x) = x^7 + x$. Vérifier que f admet une fonction réciproque f^{-1} sur $\mathbb{R}$. Vérifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(f^{-1})'(0)$ et $(f^{-1})'(2)$.
6. Encadrer $\ln 3$ en appliquant l'IAF à la fonction $\ln$ sur $[e, 3]$. La qualité de l'encadrement n'as pas d'importance. De même pour $\sqrt{3}$ en appliquant l'IAF à $\sqrt{.}$ sur $[3, 4]$.
7. Soit f une fonction dérivable sur $[2, 5]$, vérifiant $f(2) = 3$, $f(5) = 2$ et $-3 \leq f' \leq 1$. Quel encadrement peut-on en déduire pour $\max f$? pour $\min f$? pour f ? Faire un dessin.
8. On pose $f : x \mapsto 7x - \sin(2\pi x)$. Encadrer f' et en déduire un intervalle autour de 1 dans lequel f reste comprise entre 6.9 et 7.1. La qualité de l'intervalle n'a pas d'importance.
9. Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes sur l'intervalle I de définition, qui est à déterminer.

$$\begin{array}{llll}
(1) & f : x \mapsto 2x - 5 - \frac{2x}{x^2+2}, \quad I = & (2) & f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{4x-1}, \quad I = \\
(3) & f : x \mapsto \sqrt{(1+3x)^3}, \quad I = & (4) & f : x \mapsto (\frac{1+x}{2x-4})^2, \quad I = \\
(5) & f : x \mapsto \frac{x^2+1}{3x+1}, \quad I = & (6) & f : x \mapsto 3x^2 + \frac{1}{x}, \quad I = \\
(7) & f : x \mapsto 2 + \sqrt{x}, \quad I = & (8) & f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}-2}, \quad I =
\end{array}$$

10. Déterminer les points de Lagrange (*i.e.*, les points $c \in]a, b[$ tels que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$) de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + 2x - 3$ dans l'intervalle $I = [-4, 6]$.

    Déterminer les points critiques ou stationnaires (*i.e.*, les points $c \in]a, b[$ tels que $f'(c) = 0$) de la fonction donnée et dire s'il s'agit de points de $\min(f)$ locaux ou de $\max(f)$ locaux.