Feuille 8 d'exos en analyse.

1. On considère la fonction
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x(\sqrt{1+x}-1)}, & x > 0, \\ \alpha\, 2^x + 3, & x \leq 0. \end{cases}$$
Déterminer α pour que f soit continue sur son domaine de définition Df.

2. Ecrire l'équation de la droite tangente en $x_0 = 2$ au graphique de la fonction
$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-1} - \log(2x-3)$$
et calculer la partie principale de $f(x) - f(2)$ pour $x \to 2$.

3. Déterminer les points eventuels de non-dérivabilité des fonctions suivantes :
$$(a)\, f(x) = |x^2 - 1|, \qquad (b)\, f(x) = e^{-|x|}, \qquad (c)\, f(x) = \min(x^2, \frac{1}{x^2}).$$

4. Calculer à l'aide du Théorème de de l'Hôpital les limites pour $x \to 0$ des fonctions
$$\begin{array}{llll} (1) & x \mapsto \frac{\log(1+\sin x)}{\sin(2x)}, & (2) & x \mapsto \frac{\sin(\pi 3^x)}{x}, \\ (3) & x \mapsto (e^x + x)^{1/x}, & (4) & x \mapsto \frac{\sin(\log(1+3x))}{e^x - 3}. \end{array}$$

5. Déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation $e^{x^9 - 9x + 1} = a$ en fonction du paramétre réel a.

6. Etudier la fonction
$$f(x) = \frac{\log x - 3}{\log x + 2}.$$
Discuter de l'existence de f^{-1} et calculer $(f^{-1})'(-\frac{3}{2})$. Est-il possible d'écrire explicitement l'expression de la fonction f^{-1} ?

7. Pour la fonction $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6}$, déterminer
   - le domaine de définition Df
   - le signe
   - les limites à la frontière de Df
   - les eventuelles asymptotes
   - les intervalles de monotonie et les extrema
   - les intervalles de convexité et les points de flexion
   - le graphique.

8. Développements limités à l'ordre n en un point x_0 $(DL_n(f))$
   - Ecrire le DL en $x_0 = 0$ à l'ordre 3 de $f : x \mapsto \sin x$.
   - Ecrire le DL en $x_0 = 0$ à l'ordre 2 de $f : x \mapsto 3e^{2x}$
   - Ecrire le DL en $x_0 = 8$ à l'ordre 2 de $f : x \mapsto x^{1/3}$
   - Ecrire le DL en $x_0 = e^2$ à l'ordre 3 de $f : x \mapsto \ln x$

   Vérifier que $(DL_n(f))' = DL_{n-1}(f')$.