FEUILLE No 6

Exercice 1 *Donner l'expression des primitives des fonctions suivantes, en précisant l'ensemble sur lequel elles sont définies.*

$$f(x) = x^k, k \in \mathbb{N},\ f(x) = e^x,\ f(x) = \frac{1}{x},$$
$$f(x) = x^a,\ a \in \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x),\ f(x) = \cos(x),$$

Exercice 2 *Calculer les intégrales suivantes :*

$$I_1 = \int_0^2 (x^4 + 3x)dx,\ I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx,\ I_3 = \int_0^{\pi} \sin(x)\cos^3(x)dx,\ I_4 = \int_0^1 e^{2x}dx,$$
$$I_5 = \int_1^2 \frac{1}{2x}dx,\ I_6 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx,\ I_7 = \int_{-1}^2 \frac{2x}{(1+x^2)^2}dx.$$

Exercice 3 *Calculer les intégrales suivantes :*

$$I_8 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx,\ I_9 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx,\ I_{10} = \int_2^3 xe^{x^2+1}dx.$$

Exercice 4 *En procédant à des intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :*

$$J_1 = \int_0^1 xe^x dx,\ J_2 = \int_0^1 x^2e^x dx,\ J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(x)dx,\ J_4 = \int_1^2 x\ln(x)dx,\ J_5 = \int_1^2 \ln(x)dx$$

Exercice 5 *Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable suggéré :*

$$I_1 = \int_2^4 \frac{1}{x^2+4}dx,\ x = 2y,\ I_2 = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx,\ x = y^2,\ I_3 = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}+2x}dx;\ t = \sqrt{x},$$
$$I_4 = \int_2^e \frac{1}{x(\ln(x))^3}dx,\ x = e^y,\ I_5 = \int_0^3 \cos^3(x)\sin^3(x)dx,\ y = \cos(x),$$
$$I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3+\cos^2(x)}dx,\ t = \tan(x)$$

Exercice 6 *Soit $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ une fonction impaire (i.e. $f(-x) = -f(x)$, $\forall x$). Montrer que $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.*

Exercice 7 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la fonction G sur $\mathbb{R}$ par*

$$G(x) = \int_{x_0}^{x^2} f(t)dt.$$

Montrer que G est dérivable et calculer G'.

Exercice 8 *Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Soit $u_n = \int_0^1 x^n f(x)dx$. Montrer que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

On veut maintenant montrer que $\lim_{n\to+\infty} nu_n = f(1)$.

1. *On suppose d'abord que f est de classe C^1. Dans ce cas, montrer que*
$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)u_n = f(1)$$
2. *On suppose maintenant que f est seulement continue.*
   (a) *Montrer que*
$$(n+1)u_n - f(1) = (n+1)\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))dx.$$
   (b) *On se donne $\epsilon > 0$ arbitraire. Montrer qu'on peut trouver $\delta > 0$ de sorte que*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)\int_{1-\delta}^1 x^n(f(x)-f(1))dx < \frac{\epsilon}{2}.$$
   (c) *Traiter l'autre partie de l'intégrale et conclure.*

Exercice 9
1. *Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en $x = 0$, pour les fonctions suivantes :*
$$\exp(x),\ \sin(x),\ \cos(x),\ \ln(1+x),\ (1+x)^k,\ k \in \mathbb{Z}.$$
2. *Déterminer les DL suivants :*
$$DL_n(1) \text{ de } \exp(x),\ DL_n(\frac{\pi}{2}) \text{ de } \cos(x),\ DL_n(1) \text{ de } \ln(x),\ DL_n(5) \text{ de } x^k.$$

Exercice 10 *Calculer les DL en 0 des fonctions suivantes à tout ordre :*
$$x \mapsto \cos(3x),\ x \mapsto \sqrt{1+x^2},\ x \mapsto \frac{1}{1+x^3}.$$

Exercice 11 *Calculer le DL en 0 de $\frac{x+1}{x-2}$ à l'ordre 3 puis celui de $\frac{x^2-x}{2x^2-x+5}$ à l'ordre 2.*

Exercice 12 *Calculer la limite quand x tend vers 0 de la fonction f définie par*
$$f(x) = \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{e^x - e^{-x} - 2x}.$$

Exercice 13 *En factorisant par x, calculer* $\lim_{x\to+\infty}((x^3+x^2+7)^{1/3} - x$.

Exercice 14 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$. Calculer* $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 15 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(0) = 0$ et*
$$\forall x \neq 0,\ f(x) = \frac{x^2}{e^x - e^{-x}}.$$

1. *Montrer que f a un DL à l'ordre 3 en 0 et le calculer.*
2. *En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(0)$.*
3. *Préciser la position locale du graphe de f par rapport à sa tangeante en 0.*