Les nombres réels

CHAPITRE 1

Plan

Introduction

Le cours d'analyse des classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques (étude de limites, continuité, dérivation, intégration, équations différentielles,...) est fondé sur la notion de nombre réel, sur l'idée de nombre variant « de façon continue ». Cette notion s'est dégagée au XIX^e siècle et des constructions rigoureuses de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels sont apparues il y a environ cent ans.

Nous admettrons l'existence et l'unicité, à la notation près, de cet ensemble des nombres réels et nous allons étudier principalement le calcul sur les nombres réels : manipulation des opérations usuelles, obtention d'égalités ou d'inégalités, résolution d'équations, de systèmes d'équations, d'inéquations.

La notion demandant le plus d'attention est sans doute celle de borne supérieure, borne inférieure.

Prérequis

- Propriétés élémentaires de $\mathbb{N}$ (ensemble des nombres entiers naturels), $\mathbb{Z}$ (anneau des entiers relatifs), $\mathbb{Q}$ (corps des nombres rationnels)
- Principe de récurrence

Objectifs

- Mise en place de $\mathbb{R}$ (en partie admise)
- Manipulation pratique, dans $\mathbb{R}$, des opérations, inégalités, valeurs absolues, bornes supérieures, bornes inférieures, racines $n^{\text{èmes}}$, parties entières, nombres irrationnels.

1.1 Préambule

L'ensemble $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,...\}$ des entiers naturels est à la base du dénombrement. L'absence d'éléments de $\mathbb{N}$ dont la somme avec 1, ou avec 2, ... donne 0 conduit à la construction de l'ensemble $\mathbb{Z} = \{...,-2,-1,0,1,2,...\}$ des entiers relatifs. Ensuite, l'absence d'éléments de $\mathbb{Z}$ dont le produit avec 2, ou avec 3,... donne 1 amène à la construction de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, qui est muni d'une structure de corps commutatif totalement ordonné, c'est-à-dire de deux lois internes $+$, $\cdot$, et d'une relation d'ordre total $\leqslant$ telles que :

$$\begin{cases} (\mathbb{Q},+,\cdot) \text{ est un corps commutatif} \\ \forall (a,b,c) \in \mathbb{Q}^3, \begin{cases} a \leqslant b \Longrightarrow a+c \leqslant b+c \\ \left.\begin{array}{l} a \leqslant b \\ 0 \leqslant c \end{array}\right\} \Longrightarrow ac \leqslant bc. \end{cases} \end{cases}$$

On voit alors, par exemple, qu'il n'existe aucun rationnel de carré 2. En effet, s'il existait $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $2 = \left(\dfrac{m}{n}\right)^2$, les exposants de 2 dans les décompositions primaires de m^2 et $2n^2$ seraient de parités contraires.

D'autres « nombres », utiles dans l'Analyse classique, comme e, π, ne sont pas rationnels. D'où la nécessité de la construction d'un corps de nombres plus vaste que $\mathbb{Q}$: ce sera le corps des nombres réels.

Exercice

1.1.1 Irrationalité de $\sqrt{2}$ par quatre méthodes

On suppose qu'il existe $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $m^2 = 2n^2$, et on se propose d'aboutir à une contradiction.

a) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = n + p$, puis $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = p + q$; en déduire $q^2 = 2p^2$, puis une contradiction en réitérant la construction.

b) Montrer que 2 divise m, puis que 2 divise n, d'où une contradiction si on suppose $\text{pgcd}(m,n) = 1$.

c) Supposons $\text{pgcd}(m,n) = 1$. Montrer $n|(m-n)(m+n)$, et d'autre part $\text{pgcd}(n,m-n) = \text{pgcd}(n,m+n) = 1$, d'où une contradiction.

d) En supposant m et n premiers entre eux, montrer

$$m^2 \not\equiv 2n^2 \ [3].$$

1.2 Nombres réels

1.2.1 Existence et unicité de $\mathbb{R}$

Définition

Nous admettons l'existence et l'unicité, à la notation près, d'un ensemble $\mathbb{R}$ muni de deux lois internes $+,\cdot$, et d'une relation $\leqslant$, tel que :

$$\begin{cases} 1) \quad (\mathbb{R},+,\cdot) \text{ est un corps commutatif} \\ 2) \quad \leqslant \text{ est une relation d'ordre total dans } \mathbb{R} \\ 3) \quad \forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} a \leqslant b \quad \Longrightarrow a+c \leqslant b+c \\ \left\{\begin{array}{l} a \leqslant b \\ 0 \leqslant c \end{array}\right| \Longrightarrow ac \leqslant bc \end{cases} \\ 4) \quad \text{Toute partie non vide et majorée de } \mathbb{R} \text{ admet dans } \mathbb{R} \\ \qquad \text{une borne supérieure.} \end{cases}$$

Les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés **(nombres) réels**

Rappel d'algèbre générale : structure de corps commutatif.

Rappelons que :

$(\mathbb{R},+,\cdot)$ est un **corps commutatif** signifie :

+ est associative : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ (a+b)+c = a+(b+c)$

+ est commutative : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a+b = b+a$

$\mathbb{R}$ admet un neutre pour +, noté 0 : $\forall a \in \mathbb{R},\ a+0 = 0+a = a$

tout élément a de $\mathbb{R}$ admet un opposé, noté $-a$:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad a+(-a) = (-a)+a = 0$$

$\cdot$ est associative : $\forall(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $(ab)c = a(bc)$
$\cdot$ est commutative : $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $ab = ba$
$\mathbb{R}$ admet un neutre pour $\cdot$, noté 1 : $\forall a \in \mathbb{R}, \quad a1 = 1a = a$
tout élément a de $\mathbb{R} - \{0\}$ admet un inverse, noté a^{-1} :
$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$
$\cdot$ est distributive sur l'addition : $\forall(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} a(b+c) = ab + ac \\ (b+c)a = ba + ca \end{cases}$

Rappel d'algèbre générale : relation d'ordre total.

$\leqslant$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$ signifie :
$\leqslant$ est réflexive : $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \leqslant a$
$\leqslant$ est antisymétrique : $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\left(\begin{cases} a \leqslant b \\ b \leqslant a \end{cases} \Longrightarrow a = b\right)$
$\leqslant$ est transitive : $\forall(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $\left(\begin{cases} a \leqslant b \\ b \leqslant c \end{cases} \Longrightarrow a \leqslant c\right)$
$\leqslant$ est totale : $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a \leqslant b$ ou $b \leqslant a)$.

Définition 1

Etant donné une partie A de $\mathbb{R}$ et un élément x de $\mathbb{R}$:

• on dit que x est un **majorant de A dans $\mathbb{R}$** si et seulement si :

$$\forall a \in A, \quad a \leqslant x$$

• on dit que x est un **minorant de A dans $\mathbb{R}$** si et seulement si :

$$\forall a \in A, \quad x \leqslant a$$

• on dit que x est un **plus grand élément de** A si et seulement si $x \in A$ et x est un majorant de A dans $\mathbb{R}$

• on dit que x est un **plus petit élément de** A si et seulement si $x \in A$ et x est un minorant de A dans $\mathbb{R}$.

Exemples :
pge([0; 1]) = 1
$[0; +\infty[$ n'a pas de plus grand élément
$[0; 1[$ n'a pas de plus grand élément.

Si A admet un plus grand élément x, alors A admet un et un seul plus grand élément (puisque $\leqslant$ est antisymétrique) ; on note alors $x = \text{pge}\,(A)$, ou $x = \text{Max}\,(A)$.
De même, si A admet un plus petit élément x, on note $x = \text{ppe}\,(A)$, ou $x = \text{Min}\,(A)$.
Lorsque A est un ensemble fini non vide, d'éléments $a_1,...,a_n$, on note souvent Max $(a_1,...,a_n)$ ou $\underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{Max}}\, a_i$ au lieu de Max $\{a_1,..., a_n\}$; notation analogue pour le plus petit élément.

Définition 2

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite **majorée** (resp. **minorée**) (dans $\mathbb{R}$) si et seulement s'il existe au moins un majorant (resp. minorant) de A dans $\mathbb{R}$. On dit que A est bornée si et seulement si A est majorée et minorée.

Etant donné une partie A de $\mathbb{R}$:

• on appelle **borne supérieure de A dans $\mathbb{R}$** le plus petit des majorants de A dans $\mathbb{R}$, s'il existe ; cet élément est alors noté $\text{Sup}(A)$, ou $\text{Sup}_{\mathbb{R}}(A)$

• on appelle **borne inférieure de A dans $\mathbb{R}$** le plus grand des minorants de A dans $\mathbb{R}$, s'il existe ; cet élément est alors noté $\text{Inf}(A)$, ou $\text{Inf}_{\mathbb{R}}(A)$.

Exemples :
$\varnothing$ est majoré (dans $\mathbb{R}$)
$[0; 1[$ et $[0; 1]$ sont majorés (dans $\mathbb{R}$)
$\mathbb{N}$ n'est pas majoré (dans $\mathbb{R}$).
Exemples :
$\text{Sup}_{\mathbb{R}}([0; 1[) = 1$,
$\text{Sup}_{\mathbb{R}}([0; 1]) = 1$,
$\text{Sup}_{\mathbb{R}}([0; +\infty[)$ n'existe pas.

Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ signifie : $a \leqslant b$ et $a \neq b$.
On peut noter $b \geqslant a$ (resp. $b > a$) au lieu de $a \leqslant b$ (resp. $a < b$).

Notons 1 le neutre de la multiplication dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $n \cdot 1$ le réel défini par :

$$n \cdot 1 = \begin{cases} 1 + 1 + \ldots + 1 & (n \text{ fois}) \quad \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ (-1) + (-1) + \ldots + (-1) & (-n \text{ fois}) \quad \text{si } n \in \mathbb{Z}^*_- \end{cases}$$

[illegible] $\in \mathbb{Q}$, il existe $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $q = \dfrac{m}{n}$, et on note $q \cdot 1 =$ [illegible] cette définition est cohérente car, si $q = \dfrac{m}{n} = \dfrac{m'}{n'}$ où (m,n), (m',n') sont dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, alors $mn' = m'n$, d'où $(m \cdot 1)(n' \cdot 1) = (m' \cdot 1)(n \cdot 1)$ et donc $(m \cdot 1)(n \cdot 1)^{-1} = (m' \cdot 1)(n' \cdot 1)^{-1}$.

On peut, pour tout $q \in \mathbb{Q}$, identifier q et $q \cdot 1$, et identifier $\mathbb{Q}$ et $\{q \cdot 1 ; q \in \mathbb{Q}\}$. On considère ainsi que $\mathbb{Q}$ est une partie de $\mathbb{R}$.

Ainsi : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on note souvent $\dfrac{1}{x}$ au lieu de x^{-1}.

On note $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} ; x \geqslant 0\}$, $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} ; x \leqslant 0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{R}^*_+ = \mathbb{R}_+ - \{0\}$, $\mathbb{R}^*_- = \mathbb{R}_- - \{0\}$.

$\mathbb{R}_+ = [0 ; +\infty[$,
$\mathbb{R}_- =]-\infty ; 0]$,
$\mathbb{R}^* =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$,
$\mathbb{R}^*_+ =]0 ; +\infty[$,
$\mathbb{R}^*_- =]-\infty ; 0[$.

On définit dans $\mathbb{R}$ neuf types d'**intervalles**, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$:

$[a ; b] = \{x \in \mathbb{R} ; a \leqslant x \leqslant b\}$, dit **intervalle fermé borné**, ou encore : **segment**

$[a ; b[= \{x \in \mathbb{R} ; a \leqslant x < b\}$	$]a ; b] = \{x \in \mathbb{R} ; a < x \leqslant b\}$
$]a ; b[= \{x \in \mathbb{R} ; a < x < b\}$	$]-\infty ; a[= \{x \in \mathbb{R} ; x < a\}$
$]-\infty ; a] = \{x \in \mathbb{R} ; x \leqslant a\}$	$]a ; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} ; a < x\}$
$[a ; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} ; a \leqslant x\}$	$]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$.

Les intervalles $[a ; b]$, $]-\infty ; a]$, $[a ; +\infty[$, $]-\infty ; +\infty[$ sont appelés **intervalles fermés**.
Les intervalles $]a ; b[$, $]-\infty ; a[$, $]a ; +\infty[$, $]-\infty ; +\infty[$ sont appelés **intervalles ouverts**.
Les intervalles $[a ; b[$, $]a ; b]$ sont appelés **intervalles semi-ouverts**, ou **intervalles semi-fermés**.
Avec les notations précédentes, les réels a et (ou b) sont appelés les **extrémités** de l'intervalle.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle **adhérence** de I, et on note $\overline{I}$, l'intervalle de mêmes extrémités que I et contenant les éventuelles extrémités réelles de I.

On appelle **intérieur** de I, et on note $\overset{\circ}{I}$, l'intervalle obtenu en supprimant de I ses éventuelles extrémités.

Ainsi, pour tout (a,b) de $\mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$:

$$\overline{[a ; b]} = \overline{[a ; b[} = \overline{]a ; b]} = \overline{]a ; b[} = [a ; b], \quad \overline{]-\infty ; a]} = \overline{]-\infty ; a[} =]-\infty ; a],$$
$$\overline{[a ; +\infty[} = \overline{]a ; +\infty[} = [a ; +\infty[, \quad \overline{]-\infty ; +\infty[} =]-\infty ; +\infty[,$$

$$\overset{\circ}{\overbrace{[a ; b]}} = \overset{\circ}{\overbrace{[a ; b[}} = \overset{\circ}{\overbrace{]a ; b]}} = \overset{\circ}{\overbrace{]a ; b[}} =]a ; b[, \quad \overset{\circ}{\overbrace{]-\infty ; a]}} = \overset{\circ}{\overbrace{]-\infty ; a[}} =]-\infty ; a[,$$
$$\overset{\circ}{\overbrace{[a ; +\infty[}} = \overset{\circ}{\overbrace{]a ; +\infty[}} =]a ; +\infty[, \quad \overset{\circ}{\overbrace{]-\infty ; +\infty[}} =]-\infty ; +\infty[.$$

Exercices 1.2.1 à 1.2.6.

Le lecteur trouvera une étude complète de l'existence et de l'unicité de $\mathbb{R}$ dans J.-M. Arnaudiès et H. Fraysse, *Cours de mathématiques*, Tome 2, pp. 14-23, Dunod.

Exemple de voisinage

Intervalle de IR est un ensemble qui contient tous les nombres réels compris entre 2 bornes

1.2.2 Propriétés élémentaires des nombres réels

1) Relation d'ordre usuel $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$

Addition d'un même réel aux deux membres d'une inégalité.

1) $\forall x,y,z \in \mathbb{R},\ (x \leqslant y \Longleftrightarrow x+z \leqslant y+z)$.

Addition membre à membre d'inégalités de **même sens**.

2) $\forall x,y,u,v \in \mathbb{R},\ \left(\begin{cases} x \leqslant y \\ u \leqslant v \end{cases} \Longrightarrow x+u \leqslant y+v\right)$.

D'où, par récurrence immédiate, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n \in \mathbb{R}$:

$$(\forall i \in \{1,\dots,n\},\ x_i \leqslant y_i) \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Passage à l'inverse.

3) $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ (0 < x \Longleftrightarrow 0 < \frac{1}{x})$.

Multiplication des deux membres d'une inégalité par un même réel > 0.

4) $\forall x,y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}_+^*,\ (x \leqslant y \Longleftrightarrow xz \leqslant yz)$.

Multiplication membre à membre d'inégalités **de même sens** portant sur des nombres réels **tous positifs ou nuls**.

5) $\forall x,y,u,v \in \mathbb{R},\ \left(\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant u \leqslant v \end{cases} \Longrightarrow xu \leqslant yv\right)$.

En effet, $\begin{cases} x \leqslant y \\ 0 \leqslant u \end{cases} \Longrightarrow xu \leqslant yu$, et $\begin{cases} u \leqslant v \\ 0 \leqslant y \end{cases} \Longrightarrow yu \leqslant yv.$

D'où, par récurrence immédiate, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n \in \mathbb{R}$:

$$(\forall i \in \{1,\dots,n\},\ 0 \leqslant x_i \leqslant y_i) \Longrightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i \leqslant \prod_{i=1}^{n} y_i.$$

En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ (0 \leqslant x \leqslant y \Longrightarrow x^n \leqslant y^n)$.

Passage aux inverses.

6) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ (x < y \Longleftrightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x})$.

Addition membre à membre de deux inégalités de même sens et dont l'une est stricte.

7) $\forall x,y,u,v \in \mathbb{R},\ \left(\begin{cases} x \leqslant y \\ u < v \end{cases} \Longrightarrow x+u < y+v\right)$.

En effet : $(y+v)-(x+u) = (y-x)+(v-u) > (y-x) + \dfrac{v-u}{2} \geqslant 0$.

On en déduit, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1,\dots,x_n,\ y_1,\dots,y_n \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \forall i \in \{1,\dots,n\}, & x_i \leqslant y_i \\ \exists i_0 \in \{1,\dots,n\}, & x_{i_0} < y_{i_0} \end{cases} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i < \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Cette propriété est plus commodément exploitée sous la forme suivante :

Résultat important souvent utilisé :
- en algèbre linéaire dans un contexte où les x_i et les y_i sont des dimensions de sous-espaces vectoriels
- en algèbre bilinéaire, pour montrer que certaines applications sont des produits scalaires.

Proposition

$$\left(\begin{cases} \forall i \in \{1,\dots,n\}, & x_i \leqslant y_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}\right) \Longrightarrow (\forall i \in \{1,\dots,n\},\ x_i = y_i).$$

Exercices 1.2.7, 1.2.8 *a)* à *e)*, 1.2.9 à 1.2.17.

On déduit aussi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ \ (x \leqslant y \Longleftrightarrow x^n \leqslant y^n)$.

2) Valeur absolue d'un réel

Définition

On appelle **valeur absolue** de $x \in \mathbb{R}$ le réel, noté $|x|$, défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

On dispose des propriétés suivantes :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \ |x| = \text{Max}(x, -x)$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \ |x| \geqslant 0$.

3) $\forall x \in \mathbb{R}, \ (|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0)$.

4) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ |xy| = |x|\,|y|$.

On déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, \quad \left|\prod_{i=1}^{n} x_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |x_i|$.

En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x^n| = |x|^n$.

5) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \ \left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|}$.

L'inégalité triangulaire est un outil fondamental de l'analyse. Nous la retrouverons pour les nombres complexes (ch. 2, p. 67) et plus généralement dans la définition d'une norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (Analyse MP, ch. 1).

6) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ |x+y| \leqslant |x| + |y|$, **inégalité triangulaire** (se ramener à 4), en élevant au carré).

On déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, \ \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

Résultat commode pour la résolution de certains exercices (cf. ex. 3.1.3).

7) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \begin{cases} \text{Max}(x,y) = \dfrac{1}{2}(x + y + |x-y|) \\ \text{Min}(x,y) = \dfrac{1}{2}(x + y - |x-y|) \end{cases}$

Ce dernier résultat se voit en séparant en deux cas : $x \leqslant y$, $y \leqslant x$.

Cette inégalité est souvent appelée : **inégalité triangulaire renversée.**

8) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|$

car $|x| = |x - y + y| \leqslant |x-y| + |y|$, donc $|x| - |y| \leqslant |x-y|$, et de même $|y| - |x| \leqslant |y-x| = |x-y|$.

3) Distance usuelle dans $\mathbb{R}$

Définition

On appelle **distance usuelle** dans $\mathbb{R}$ l'application $\mathrm{d} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto |x-y| \end{array}$.

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, le réel $\mathrm{d}(x,y)$ est appelé la **distance** de x à y.

Ceci correspond à l'idée intuitive de distance de deux points d'une droite.
On dispose des propriétés suivantes, immédiatement déduites des propriétés de la valeur absolue :

1) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ (\mathrm{d}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y)$

2) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \mathrm{d}(y,x) = \mathrm{d}(x,y)$
(on dit que d est **symétrique**)

3) $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ \mathrm{d}(x,z) \leqslant \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)$
(on dit que d vérifie l'**inégalité triangulaire**)

4) $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ |\mathrm{d}(x,y) - \mathrm{d}(x,z)| \leqslant \mathrm{d}(y,z)$
(**inégalité triangulaire renversée**).

4) Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}, \ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$.

Ces preuves servent aussi d'exemples de manipulation du symbole $\sum$.

Preuve :

Nous donnons, de cette importante inégalité, trois preuves :

(i)
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2$$
$$=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i^2 y_j^2-\sum_{i\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_i x_j y_j$$
$$=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i^2y_j^2+x_j^2y_i^2-2x_iy_ix_jy_j)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_iy_j-x_jy_i)^2\geqslant 0.$$

(ii) L'inégalité étant évidente lorsque $\sum_{i=1}^{n} y_i^2=0$, on peut supposer $\sum_{i=1}^{n} y_i^2\neq 0$.

Alors :
$$0\leqslant\sum_{j=1}^{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)x_j-\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)y_j\right)^2$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^2 x_j^2-2\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)x_jy_j+\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)^2 y_j^2\right]$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)-2\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_jy_j\right)+\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)^2\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^2\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)^2$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)^2\right).$$

Méthode intéressante qui sera généralisée dans Analyse MP, 1.6.2.

(iii) Remarquons : $\forall\lambda\in\mathbb{R},\quad \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i+y_i)^2\geqslant 0$, c'est-à-dire $(\forall\lambda\in\mathbb{R}, T(\lambda)\geqslant 0)$,

où $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est définie par :
$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\quad T(\lambda)=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\lambda^2+2\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)\lambda+\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

• Si $\sum_{i=1}^{n} x_i^2>0$, le trinôme réel T, étant à valeurs $\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$, est de discriminant $\leqslant 0$,

d'où
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\leqslant 0.$$

• Si $\sum_{i=1}^{n} x_i^2=0$, alors $(\forall i\in\{1,\dots,n\},\ x_i=0)$, et l'inégalité voulue est triviale.

4) Étude du cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz

1) Soient $(x_1,\dots,x_n)$, $(y_1,\dots,y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$ tels qu'il y ait égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, c'est-à-dire tels que :
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

En reprenant le calcul de (i), on obtient : $\forall(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2,\ x_iy_j=x_jy_i$.

Supposons $(x_1,\dots,x_n)\neq(0,\dots,0)$; il existe $i_0\in\{1,\dots,n\}$ tel que $x_{i_0}\neq 0$.

On déduit : $\forall j\in\{1,\dots,n\},\ y_j=\dfrac{y_{i_0}}{x_{i_0}}x_j$.

Il suffit de prendre : $\alpha=\dfrac{y_{i_0}}{x_{i_0}}$.

Ainsi, il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que : $(y_1,\dots,y_n)=\alpha(x_1,\dots,x_n)$.

2) Réciproquement, supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall j \in \{1,\ldots,n\},\ y_j = \alpha x_j$.
On a alors :

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 = \left(\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 = \alpha^2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\alpha^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) = \alpha^2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2, \end{cases}$$

d'où $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$.

Finalement : il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si :

$$\left| \begin{array}{l} (x_1,\ldots,x_n) = (0,\ldots,0) \\ \text{ou} \\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R},\quad (y_1,\ldots,y_n) = \alpha(x_1,\ldots,x_n) \end{array} \right.,$$

Exercice 1.2.8 *f*).

c'est-à-dire: si et seulement si $\big((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\big)$ est lié dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice-type résolu

Inégalités de Weierstrass

Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*, a_1,\ldots,a_n \in [0\,;1]$, en notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, on a : $\prod_{k=1}^{n}(1-a_k) \geqslant 1 - S_n$ et que, si de plus $S_n < 1$, alors : $\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \leqslant \dfrac{1}{1-S_n}$.

Solution

- Montrons la première inégalité par récurrence sur n.
- L'inégalité est triviale lorsque $n = 1$, puisqu'alors $S_n = S_1 = a_1$.
- Supposons l'inégalité vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $a_1,\ldots,a_n \in [0\,;1]$.

Soient $a_1,\ldots,a_{n+1} \in [0\,;1]$.

On a : $\prod_{k=1}^{n+1}(1-a_k) = \left(\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)\right)(1-a_{n+1})$

$\geqslant (1-S_n)(1-a_{n+1}) = 1-(S_n+a_{n+1}) + S_n a_{n+1} \geqslant 1-(S_n+a_{n+1}) = 1-S_{n+1}$,

ce qui montre l'inégalité pour $n+1$.

On a ainsi établi, par récurrence sur n, la première inégalité demandée.

- Puisque $S_n < 1$, on a, pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, $a_k < 1$, et :

$$1 + a_k = \frac{1-a_k^2}{1-a_k} \leqslant \frac{1}{1-a_k},$$

d'où, en utilisant le résultat précédent :

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-a_k} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)} \leqslant \frac{1}{1-S_n}.$$

Conseils

Multiplication de l'inégalité de l'hypothèse de récurrence par $1 - a_{n+1}$, qui est $\geqslant 0$.

Multiplication membre à membre d'inégalités de même sens portant sur des nombres tous $\geqslant 0$ et passage aux inverses dans l'inégalité obtenue précédemment.

1.2.8 Etablir les inégalités suivantes, et étudier les cas d'égalité :

a) $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2,\quad a^3+b^3+2 \geqslant 2ab+a+b$

b) $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad (n-1)a^n+b^n \geqslant na^{n-1}b$

c) $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\quad a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc$

d) $\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+)^3,$

$$abc \geqslant (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

e) $\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+)^3,\quad a^3+b^3+c^3 \geqslant a^2b+b^2c+c^2a$

f) $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,$

$$abc(a+b+c) \leqslant a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 \leqslant a^4+b^4+c^4$$

g) $\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}^*)^3,\quad \dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2} \geqslant \dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}$

h) $\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3,$

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)} \geqslant \frac{3}{1+abc}$$

i) $\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3,\quad \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \leqslant \dfrac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}.$

1.2.9 Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\begin{cases} x+y+z=5 \\ xy+yz+zx=3 \end{cases}$; montrer : $-1 \leqslant z \leqslant \dfrac{13}{3}.$

1.2.10 Soient $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, $\alpha = a+\dfrac{1}{b}$, $\beta = b+\dfrac{1}{c}$, $\gamma = c+\dfrac{1}{a}$; montrer : $\operatorname{Max}(\alpha,\beta,\gamma) \geqslant 2.$

1.2.11 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}_+$; montrer : $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geqslant 1+\sum_{i=1}^{n} a_i$, et étudier le cas d'égalité.

1.2.12 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1,\ldots,a_n \in [1;+\infty[$; montrer : $n+\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i \geqslant 1+\sum_{i=1}^{n} a_i$, et étudier le cas d'égalité. (Utiliser l'exercice 1.2.11).

1.2.13 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1,\ldots,a_n \in [1;+\infty[$; montrer :

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geqslant \frac{2^n}{n+1}\left(1+\sum_{i=1}^{n} a_i\right).$$

(Utiliser l'exercice 1.2.11).

1.2.14 Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1[\cup]1;+\infty[,$

$$\frac{1-x^{2n+1}}{1-x} \geqslant (2n+1)x^n.$$

1.2.15 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1,\ldots,a_n \in [1;+\infty[$. Montrer :

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \leqslant 2^{n-1}\left(1+\prod_{i=1}^{n} a_i\right).$$

1.2.16 Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(\prod_{i=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2i+1}\right)\right)^2 > 2n+3.$$

1.2.17 Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(x+i)^2} < \frac{1}{x}-\frac{1}{x+n}.$$

1.2.18 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1,\ldots,a_n \in]0;+\infty[$. Montrer :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{a_k}{k^2}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right) \geqslant (n+1)^2.$$

1.2.3 Propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$

1) Borne supérieure

Rappelons l'axiome de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$:

Cf. 1.2.1, 4) p. 44.

Théorème

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

En considérant l'ensemble des opposés des éléments de la partie envisagée, on obtient aussi :

Théorème

Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

Exercices 1.2.19 et 1.2.20.

Le lecteur retrouvera l'existence des racines $n^{\text{èmes}}$ des réels positifs ou nuls plus loin, dans l'étude des fonctions puissances (7.4). La méthode élémentaire proposée ici permet d'introduire très tôt les racines $n^{\text{èmes}}$ et donc de pouvoir aborder dès maintenant de nombreux exercices sur les nombres réels (cf. ex. 1.2.21 à 1.2.33).

2) Existence de racines $n^{\text{èmes}}$

Soient $a \in]1; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$; nous allons montrer qu'il existe un élément b de $\mathbb{R}_+$ tel que $b^n = a$.

Notons $E = \{x \in \mathbb{R}_+; x^n \leqslant a\}$; E n'est pas vide (car $1 \in E$), inclus dans $\mathbb{R}$, et majorée par a, puisque, si $x \in E$, alors $x^n \leqslant a \leqslant a^n$. D'après l'axiome de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$, E admet un borne supérieure b dans $\mathbb{R}$.

• $b \geqslant 1 > 0$ puisque $1 \in E$.

• Supposons $b^n < a$; montrons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(b+\alpha)^n < a$.

Soit $\alpha \in]0; 1[$ quelconque ; en développant par la formule du binôme de Newton :

$$(b+\alpha)^n - b^n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k b^{n-k}\alpha^k.$$

Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$: $b^{n-k}\alpha^k \leqslant b^{n-1}\alpha$, car $b \geqslant 1$ et $0 < \alpha < 1$. D'où :

$$(b+\alpha)^n - b^n \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k\right) b^{n-1}\alpha = (2^n - 1)b^{n-1}\alpha.$$

Il existe un réel α tel que $0 < \alpha < \mathrm{Min}\left(1, \dfrac{a - b^n}{(2^n - 1)b^{n-1}}\right)$, et on a alors :

$$(b+\alpha)^n \leqslant b^n + (2^n - 1)b^{n-1}\alpha < b^n + (a - b^n) = a.$$

Alors $b + \alpha \in E$ et $b + \alpha > b$, ce qui contredit la définition de b comme borne supérieure de E dans $\mathbb{R}$.

• Supposons $b^n > a$; montrons qu'il existe $\beta \in]0; b[$ tel que $(b-\beta)^n > a$.

Soit $\beta \in]0; b[$ quelconque; en développant par la formule du binôme de Newton :

$$b^n - (b-\beta)^n = b^n - \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^k b^{n-k}\beta^k = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^{k+1} b^{n-k}\beta^k.$$

Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$: $(-1)^{k+1}b^{n-k}\beta^k = (-1)^{k+1}b^n\left(\dfrac{\beta}{b}\right)^k \leqslant b^n\dfrac{\beta}{b} = b^{n-1}\beta$, car $b \geqslant 1$ et $\dfrac{\beta}{b} \in]0; 1[$. D'où $b^n - (b-\beta)^n \leqslant \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k\right) b^{n-1}\beta = (2^n - 1)b^{n-1}\beta$.

Il existe un réel β tel que $0 < \beta < \mathrm{Min}\left(b, \dfrac{b^n - a}{(2^n - 1)b^{n-1}}\right)$, et on a alors :

$$(b-\beta)^n \geqslant b^n - (2^n - 1)b^{n-1}\beta > b^n - (b^n - a) = a.$$

Alors $b - \beta$ est un majorant de E dans $\mathbb{R}$, ce qui contredit la définition de b comme borne supérieure de E dans $\mathbb{R}$.

Ceci prouve : $b^n = a$.

D'autre part, $\{x \in \mathbb{R}_+; x^n = a\}$ admet au plus un élément car, si $x^n = a = y^n$, alors $(x-y)\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} x^i y^{n-1-i} = 0$, avec $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, d'où $x = y$.

Le cas $0 < a < 1$ peut être ramené au précédent en considérant $\dfrac{1}{a}$; les cas $a = 0$, $a = 1$ sont d'étude immédiate.

En résumé :

Proposition-Définition

Pour tout $(a,n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}^*$, il existe $b \in \mathbb{R}_+$ unique tel que $b^n = a$; cet élément b est noté $\sqrt[n]{a}$, ou $a^{\frac{1}{n}}$, et appelé **racine $n^{\text{ème}}$ de** a. Pour $n = 2$, on note $\sqrt{a}$ pour $\sqrt[2]{a}$.

Nous verrons, dans un chapitre ultérieur, l'étude plus générale de x^y, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$.

Nous verrons dans Analyse MP, 1.6.2 et dans Algèbre MPSI, 10.1.2 que l'inégalité de Minkowski est l'inégalité triangulaire pour une norme euclidienne.

Proposition **Inégalité de Minkowski**

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n \in \mathbb{R}$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve : En élevant au carré les deux membres de cette inégalité, on se ramène à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Rappels de résultats élémentaires vus en classe de Seconde.

3) Trinôme du second degré

Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, considérons le trinôme $T : \begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\\ x \longmapsto ax^2+bx+c\end{array}$, et son discriminant $\Delta = b^2-4ac$.

- Si $\Delta < 0$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $aT(x) > 0$.
- Si $\Delta = 0$, T admet un zéro et un seul, qui est $-\dfrac{b}{2a}$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $aT(x) \geqslant 0$.
- Si $\Delta > 0$, alors T admet deux zéros réels exactement $x' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x'' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et : $\begin{cases}\forall x \in]-\infty; x'[\cup]x''; +\infty[, & aT(x) > 0\\ \forall x \in]x'; x''[, & aT(x) < 0.\end{cases}$

  On a aussi : $x'+x'' = -\dfrac{b}{a}$, $x'x'' = \dfrac{c}{a}$.

Cette étude est obtenue en mettant $T(x)$ sous **forme canonique** :

Exercices 1.2.21 à 1.2.37.

$$T(x) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right).$$

Les méthodes à retenir

Existence de racines $n^{\text{èmes}}$

- **Pour résoudre une équation ou une inéquation portant sur une ou ou des racines** $n^{\text{èmes}}$, on peut essayer de « chasser » les radicaux (ex. 1.2.23, 1.2.24).
- **Pour résoudre un système d'équations symétriques à deux inconnues** (c'est-à-dire un système d'équations qui reste « le même » en permutant les inconnues x, y), on peut essayer de faire intervenir la somme et le produit de x et y, en notant $S = x+y$ et $P = xy$ et en considérant S et P comme de nouvelles inconnues (ex. 1.2.24). Le lecteur trouvera aussi des exemples de résolution de systèmes symétriques à plusieurs inconnues dans Algèbre MPSI.
- **Dans des calculs portant sur des radicaux**, on peut faire intervenir la notion de « quantité conjuguée » (ex. 1.2.29, 1.2.39 *a)*).
- L'inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de n réels $x_1,\dots,x_n$ positifs ou nuls (cf. P 1.1 et aussi § 5.4.3, 1)) :

$$(x_1,\dots,x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}(x_1+\dots+x_n)$$

permet d'établir de nombreuses autres inégalités (ex. 1.2.34 *b)*, 1.2.35, 1.2.36, 1.2.37).

Exercices

1.2.21 Simplifier :

a) $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$

b) $\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}}-\sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}}$.

1.2.22 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\dfrac{1}{2}$.

1.2.23 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt[4]{313+x}+\sqrt[4]{313-x}=6$.

1.2.24 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$:

a) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=1 \\ (x-y)^2=x+y \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=56 \\ x-y+\sqrt{x-y}=30 \end{cases}$

1.2.25 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$:

a) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=49 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0 \\ x-y+z=1 \end{cases}$

b) $\sqrt{x}+2\sqrt{y-1}+3\sqrt{z-2}=\dfrac{1}{2}(x+y+z+11)$.

1.2.26 Résoudre dans $\mathbb{R}^4$:

a) $\begin{cases} x<y \\ z<t \\ x^2+y^2=z^2+t^2 \\ x+y+z+t=0 \end{cases}$

b) $x+yzt=y+ztx=z+txy=t+xyz=2$.

1.2.27 Montrer : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{n}<1+\sqrt{\dfrac{2}{n}}$.

1.2.28 Montrer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\mathrm{C}_n^k}\leqslant\sqrt{n(2^n-1)}.$$

1.2.29 Soient $n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$, $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une suite arithmétique à termes dans $\mathbb{R}_+^*$ (c'est-à-dire : $\exists r\in\mathbb{R}$, $\forall i\in\{1,\dots,n-1\}$, $a_{i+1}=a_i+r$). Montrer :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}.$$

1.2.30 Montrer :

a) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall(x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{R}_+)^n$, $\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i}\leqslant\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$.

b) $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\sqrt{|a-b|}\geqslant\left|\sqrt{|a|}-\sqrt{|b|}\right|$.

1.2.31 On considère la ***suite de Fibonacci***, $(\phi_n)_{n\geqslant0}$ définie par : $\phi_0=0$, $\phi_1=1$, $(\forall n\in\mathbb{N},\ \phi_{n+2}=\phi_{n+1}+\phi_n)$.

On note $\omega=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

a) Montrer : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\omega^{n-2}\leqslant\phi_n\leqslant\omega^{n-1}$.

b) Vérifier : $\forall n\in\mathbb{N}$, $(n\geqslant4\Longrightarrow n^2\omega>(n+1)^2)$.

c) Vérifier : $\forall n\in\mathbb{N}$, $(n\geqslant13\Longrightarrow\omega^{n-2}>n^2)$.

d) En déduire l'ensemble des $n\in\mathbb{N}$ tels que $\phi_n=n^2$.

1.2.32 Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$; montrer :

$$\sum_{k=1}^{n}ka_k^2\geqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2.$$

1.2.33 Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $(a_1,\dots,a_n)\in(\mathbb{R}_+)^n$; montrer :

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\sum_{j=i}^{n}a_j}\geqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}i^2a_i}.$$

La résolution des exercices 1.2.34 *à* 1.2.37 *peut utiliser la comparaison entre les moyennes arithmétique et géométrique (voir Problème* P1.1 *p. 61)*

1.2.34 Montrer, pour tout $(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+)^3$:

a) $xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\geqslant6xyz$

b) $x^3+y^3+z^3\geqslant3xyz$.

1.2.35 Montrer : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall(a_1,\dots,a_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n$,

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\dots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\geqslant n.$$

1.2.36 On considère la ***suite harmonique*** $(\mathrm{H}_n)_{n\geqslant1}$, définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

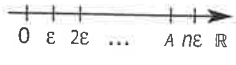
Démontrer : $\forall n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$,

$$n(n+1)^{\frac{1}{n}}-n\leqslant\mathrm{H}_n\leqslant n-(n-1)n^{-\frac{1}{n-1}}.$$

1.2.37 Montrer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

a) $(n+1)^n\geqslant2^nn!$ *b)* $(n+1)^n(2n+1)^n\geqslant6^n(n!)^2$.

3) Propriété d'Archimède, partie entière d'un réel



Théorème

$\mathbb{R}$ est un **corps archimédien**, c'est-à-dire un corps vérifiant la propriété d'Archimède :

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\quad\forall A\in\mathbb{R}_+^*,\quad\exists\,n\in\mathbb{N}^*,\quad n\varepsilon>A.$$

Preuve : Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $A \in \mathbb{R}_+^*$; raisonnons par l'absurde, c'est-à-dire supposons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n\varepsilon \leqslant A$. L'ensemble $E = \{n\varepsilon ; n \in \mathbb{N}^*\}$ est alors une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, donc admet une borne supérieure b dans $\mathbb{R}$ (axiome de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$). Puisque $b - \varepsilon < b$, $b - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E dans $\mathbb{R}$; il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\varepsilon > b - \varepsilon$, d'où $(n+1)\varepsilon > b$, contradiction avec la définition de b.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en appliquant le théorème précédent avec $\varepsilon = 1$, on voit que $\{n \in \mathbb{Z} ; n \leqslant x\}$ est une partie majorée et non vide de $\mathbb{Z}$, donc admet un plus grand élément.
On obtient ainsi :

Exemples :
$E(3{,}14) = 3, E(2) = 2,$
$E(-4{,}273) = -5,$
$E(-\frac{7}{2}) = -4,$
$E(-2) = -2$

Exercices 1.2.38 à 1.2.46.

Proposition-Définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ unique tel que $n \leqslant x < n+1$; n est appelé la **partie entière de** x, et noté $E(x)$, ou $\mathrm{Ent}(x)$, ou $[x]$, ou $\lfloor x \rfloor$.

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} E(x) \in \mathbb{Z} \\ E(x) \leqslant x < E(x) + 1 \end{cases}$$

Les méthodes à retenir

Partie entière d'un réel

- **Utiliser essentiellement l'encadrement de définition de** $E(x)$:

$$E(x) \leqslant x < E(x) + 1,$$

ou encore :

$$x - 1 < E(x) \leqslant x,$$

et ne pas perdre de vue que $E(x)$ est un nombre entier (ex. 1.2.38 *a), b), c), d)*, 1.2.45).

- **Une propriété triviale des entiers, mais souvent utile**, est la suivante :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, \qquad (a < b \iff a \leqslant b - 1)$$

(ex. 1.2.42).

Exercices

1.2.38 Montrer :

a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leqslant y \Longrightarrow E(x) \leqslant E(y))$

b) $\forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z},\ E(-x) = -E(x) - 1$

c) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ E(x+y) - E(x) - E(y) \in \{0,1\}$

d) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \alpha \in \mathbb{Z},\ E(x+\alpha) = E(x) + \alpha$.

1.2.39 *a)* Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{2\sqrt{n}} < (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

b) En déduire la valeur de $E\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10\,000} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

1.2.40 Montrer : $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$E\left(\frac{n}{3}\right) + E\left(\frac{n+2}{6}\right) + E\left(\frac{n+4}{6}\right) = E\left(\frac{n}{2}\right) + E\left(\frac{n+3}{6}\right).$$

1.2.41 Déterminer $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{x \in \mathbb{R}_+^*} \left(E(x) + E\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

1.2.42 Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right) > \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

1.2.43 Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} E\left(\frac{k + 3\sqrt{k}}{k}\right).$$

1.2.44 Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} E(\sqrt{k})$.

1.2.45 Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E\left((\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2\right) = 4n + 1.$$

1.2.46 Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$:

$$E(\sqrt{x}) = E\left(\frac{x}{2}\right)$$

4) Densité

Définition

Une partie D de $\mathbb{R}$ est dite **dense dans** $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \big(x < y \Longrightarrow (\exists\, d \in D, x < d < y)\big).$$

Soient D une partie de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$. Il existe une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D, deux à deux distincts, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x < d_n < y$.
En effet :

- il existe $d_0 \in D$ tel que $x < d_0 < y$
- s'il existe $d_n \in D$ tel que $x < d_n < y$, alors il existe $d_{n+1} \in D$ tel que $d_n < d_{n+1} < y$.

Les éléments d_n $(n \in \mathbb{N})$ ainsi définis sont deux à deux distincts, puisque la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Ceci montre que l'ensemble $]x; y[\cap D$ est infini.

On montre ci-contre qu'une partie dense dans $\mathbb{R}$ est nécessairement infinie.

Avec le vocabulaire des suites (voir plus loin ch.3), tout réel est limite d'au moins une suite de rationnels.

Théorème

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve : Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tel que $x < y$, et $\varepsilon = y - x > 0$. Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\varepsilon > 1$, c'est-à-dire $\frac{1}{n} < \varepsilon$. En notant $m = \mathrm{E}(nx) + 1$ et $r = \frac{m}{n}$, on obtient $m - 1 \leqslant nx < m$, d'où $x < \frac{m}{n} \leqslant x + \frac{1}{n} < x + \varepsilon = y$. ∎

Exercices 1.2.47 à 1.2.50.

Exercices

1.2.47 On note $E = \{q^2; q \in \mathbb{Q}\}$ et $D = E \cup (-E)$; montrer que D est dense dans $\mathbb{R}$.

1.2.48 Soient D, E deux parties de $\mathbb{R}$ telles que : D est dense dans $\mathbb{R}$ et $D \subset E$; montrer que E est dense dans $\mathbb{R}$.

1.2.49 On appelle nombre ***dyadique*** tout rationnel de la forme $\frac{m}{2^n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$; montrer que l'ensemble des nombres dyadiques est dense dans $\mathbb{R}$.

1.2.50 Soient D une partie de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$, et F une partie finie de D ; montrer que $D - F$ est dense dans $\mathbb{R}$.

5) Nombres irrationnels

Un nombre réel est dit **irrationnel** si et seulement s'il n'est pas rationnel ; ainsi l'ensemble des nombres irrationnels est $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Cet ensemble n'est stable ni pour l'addition ($\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $-\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) \notin \mathbb{R} - \mathbb{Q}$), ni pour la multiplication ($\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \sqrt{2}.\sqrt{2} \notin \mathbb{R} - \mathbb{Q}$).
On notera cependant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, \quad x + y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ \forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}^*, \quad xy \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ \forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \quad \frac{1}{x} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Attention : les lois usuelles ne sont pas internes dans $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Proposition

$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$. Il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $\frac{x}{\sqrt{2}} < q < \frac{y}{\sqrt{2}}$; si $q = 0$, il existe encore $q' \in \mathbb{Q}$ tel que $q < q' < \frac{y}{\sqrt{2}}$. Ceci prouve que $\mathbb{Q}\sqrt{2} - \{0\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (où $\mathbb{Q}\sqrt{2} = \{q\sqrt{2};\ q \in \mathbb{Q}\}$) ; comme $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ contient $\mathbb{Q}\sqrt{2} - \{0\}$, il s'ensuit que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercices 1.2.51 à 1.2.53.

Les méthodes à retenir

Nombres irrationnels

- **Pour montrer qu'un réel α est un irrationnel**, raisonner par l'absurde : supposer $\alpha \in \mathbb{Q}$ et déduire une contradiction (ex. 1.2.51 *a), b)*, 1.2.52).
- **Rappels de mises en garde** :
  - La somme de deux irrationnels peut être un rationnel ou un irrationnel
  - Le produit de deux irrationnels peut être un rationnel ou un irrationnel
  - Le produit d'un rationnel α et d'un irrationnel β peut être (exceptionnellement) un rationnel (lorsque $\alpha = 0$).

Exercices

1.2.51 Montrer :

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$ *b)* $\sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{3} \notin \mathbb{Q}$.

1.2.52 Soient $x \in \mathbb{R}$, $(a,b,c,d) \in \mathbb{Q}^4$ tels que : $x \notin \mathbb{Q}$ et $ad - bc \neq 0$. Montrer : $\frac{ax+b}{cx+d} \notin \mathbb{Q}$.

1.2.53 Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\frac{2x+5}{x+2}$ est plus près de $\sqrt{5}$ que x ne l'est

(c'est-à-dire : $\left|\frac{2x+5}{x+2} - \sqrt{5}\right| \leqslant |x - \sqrt{5}|$).

6) Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$

Proposition

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ (x \leqslant y \Longrightarrow [x;\,y] \subset I)\,.$$

Preuve : (i) Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $x, y \in I$ sont tels que $x \leqslant y$, alors $[x,y] \subset I$ comme on le voit en séparant en plusieurs cas suivant le type de l'intervalle I (il y a neuf cas).

(ii) Réciproquement, soit I une partie de $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ (x \leqslant y \Longrightarrow [x;\,y] \subset I)\,.$$

Puisque $\varnothing$ est un intervalle, on peut supposer $I \neq \varnothing$. Considérons un élément fixé a de I, et notons $G_a = \{x \in I;\ x \leqslant a\} =]-\infty;\,a] \cap I$ et $D_a = \{x \in I;\ x \geqslant a\} = [a;\,+\infty[\cap I$.

• Si D_a n'est pas majorée, pour tout $b \in [a;\,+\infty[$ il existe $c \in D_a$ tel que $b \leqslant c$, d'où, puisque $a \leqslant b \leqslant c$, $b \in I$. Donc $D_a = [a;\,+\infty[$.

• Si D_a est majorée, D_a admet une borne supérieure β dans $\mathbb{R}$, et donc $D_a \subset [a;\,\beta]$. Pour tout $b \in [a,\beta[$, il existe $c \in D_a$ tel que $b \leqslant c$ (définition de β), d'où, puisque $a \leqslant b \leqslant c$, $b \in I$. D'où : $[a;\,\beta[\subset D_a \subset [a;\,\beta]$, et donc $D_a = [a;\,\beta[$ ou $D_a = [a;\,\beta]$.

Exercice 1.2.54.

Ainsi, D_a est l'un des trois intervalles $[a;+\infty[$, $[a;\beta[$, $[a;\beta]$. On obtient un résultat analogue pour G_a : G_a est l'un des intervalles $]-\infty;a]$, $]\alpha;a]$, $[\alpha;a]$ où $\alpha = \mathrm{Inf}(G_a)$ si G_a est minorée.

Comme $I = G_a \cup D_a$, on voit alors que I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice

1.2.54 Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, non vides et non réduits à un point; montrer qu'il existe une bijection de I sur J.

1.3 Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$

L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ peut être un cadre commode pour énoncer des hypothèses ou des conclusions dans lesquelles on veut envisager le cas d'un réel et celui de $+\infty$ ou $-\infty$. Cependant, on évitera d'effectuer des calculs dans $\overline{\mathbb{R}}$, ceux-ci étant risqués, puisque **l'addition et la multiplication ne sont pas partout définies dans $\overline{\mathbb{R}}$**.

On adjoint à $\mathbb{R}$ deux éléments distincts et qui n'appartiennent pas à $\mathbb{R}$, notés $-\infty$ et $+\infty$, et on prolonge à $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ les lois internes $+$, $\cdot$ et la relation d'ordre $\leqslant$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{l} x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty \\ x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty \end{array}\right. \\ (+\infty) + (+\infty) = +\infty,\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x(+\infty) = (+\infty)x = +\infty,\ x(-\infty) = (-\infty)x = -\infty \\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ x(+\infty) = (+\infty)x = -\infty,\ x(-\infty) = (-\infty)x = +\infty \\ (+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty,\ (+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty \\ \forall x \in \mathbb{R},\ -\infty < x < +\infty;\ -\infty \leqslant -\infty, +\infty \leqslant +\infty. \end{array}\right.$$

$\overline{\mathbb{R}}$ s'appelle la **droite numérique achevée**.

On remarquera que les lois $+$, $\cdot$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ **ne sont pas partout définies** ; $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$, $0(+\infty)$, $(+\infty)0$, $(-\infty)0$, $0(-\infty)$ ne sont pas définis. Ils correspondent, en Analyse, à des **formes indéterminées**.

Il y a, dans $\overline{\mathbb{R}}$, exactement quatre types d'intervalles : $[\overline{a};\overline{b}]$, $[\overline{a};\overline{b}[$, $]\overline{a};\overline{b}]$, $]\overline{a};\overline{b}[$, pour $(\overline{a},\overline{b}) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$ tel que $\overline{a} \leqslant \overline{b}$.

Proposition

Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

On a $\mathrm{Sup}_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}) = +\infty$ mais $\mathrm{Sup}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ n'existe pas.

Exemples :

$\mathrm{Sup}_{\overline{\mathbb{R}}}(\overline{\mathbb{R}}) = +\infty$, $\mathrm{Sup}_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}) = +\infty$, $\mathrm{Sup}_{\overline{\mathbb{R}}}([-\infty;0[) = 0 = \mathrm{Sup}_{\mathbb{R}}(]-\infty;0[)$