Fonctions réelles ou complexes d'une variable réelle

CHAPITRE 4

Plan

Introduction

Pour traduire qu'un réel ou un complexe y dépend d'une variable x on introduit la notion d'application $f : x \longmapsto y$. À chaque élément x d'un ensemble X, on associe, par f, un élément et un seul y de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Dans ce chapitre, les fonctions envisagées sont à valeurs réelles ou complexes, et l'ensemble de départ X peut être, suivant le sujet abordé, un ensemble quelconque non vide (dans 4.1.1 et 4.1.2), ou, ce qui est le cas le plus fréquent en pratique, un intervalle de $\mathbb{R}$.

Les notions essentielles de ce chapitre sont celles de limites et de continuité.

Prérequis

- Nombres réels, en particulier les notions de valeurs absolue (p. 51) et de borne inférieure et borne supérieure (p. 49)
- Nombres complexes (2.2 p. 64)
- Convergence d'une suite numérique.

Objectifs

- Manipulation des fonctions en tant qu'objets élémentaires ; opérations sur les fonctions, ordre partiel sur les fonctions, ensembles structurés de fonctions
- Observation de fonctions ayant des propriétés particulières : paires, impaires, périodiques, en escalier, polynomiales, rationnelles, monotones, majorées, minorées, bornées
- Définition « rigoureuse » des notions de limite et de continuité
- Manipulation des fonctions ayant une limite
- Manipulation des fonctions continues
- Étude de l'existence de limites pour les fonctions monotones
- Énoncé des théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues sur un intervalle (p. 150) ou continues sur un segment (p. 152)
- Introduction et étude de la notion d'application réciproque
- Introduction de la notion, plus difficile, de continuité uniforme, et de la notion d'application lipschitzienne.

4.1 Algèbre des fonctions

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

4.1.1 Algèbre $\mathbb{K}^X$

Soit X un ensemble non vide (X sera souvent un intervalle de $\mathbb{R}$). On munit l'ensemble $\mathbb{K}^X$ des applications de X dans $\mathbb{K}$ de deux lois internes notées $+$ et $\cdot$ (ou absence de symbole) et d'une loi externe définies par :

Définition des opérations usuelles sur les fonctions.

$$\begin{cases} \forall f,g \in \mathbb{K}^X,\ \forall x \in X, & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ \forall f,g \in \mathbb{K}^X,\ \forall x \in X, & (fg)(x) = f(x)g(x) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall f \in \mathbb{K}^X,\ \forall x \in X, & (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \end{cases}.$$

Proposition

$\mathbb{K}^X$ est une algèbre associative, commutative, unitaire (pour les lois ci-dessus définies).

On obtient les formules suivantes :

Preuve : Dans les calculs suivants (d'ailleurs triviaux), x, λ, μ, f, g, h désignent des éléments quelconques, $x \in X$, $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$, $f,g,h \in \mathbb{K}^X$.

$+$ est associative :
$$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x)$$
$$= (f(x)+g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x)+h(x))$$
$$= f(x) + (g+h)(x) = (f+(g+h))(x)$$

$(f+g)+h = f+(g+h)$

$+$ est commutative : $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x)$

$f+g = g+f$

$+$ admet un neutre, l'application nulle $0 : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto 0 \end{array}$:

$$(f+0)(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

$f+0 = 0+f = f$

Tout élément f de $\mathbb{K}^X$ admet un symétrique pour $+$, appelé opposé de f, noté $-f$, défini par : $-f : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto -f(x) \end{array}$:

$$(f+(-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) + (-f(x)) = 0$$

$f+(-f) = (-f)+f = 0$

$\cdot$ est associative

$(fg)h = f(gh)$

$\cdot$ est commutative

$fg = gf$

$\cdot$ est distributive par rapport à $+$:

$$(f(g+h))(x) = f(x)((g+h)(x)) = f(x)(g(x)+h(x))$$
$$= f(x)g(x) + f(x)h(x) = (fg)(x) + (fh)(x) = (fg+fh)(x)$$

$f(g+h) = fg + fh$

$\cdot$ admet un neutre, l'application constante $1 : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto 1 \end{array}$:

$$(f \cdot 1)(x) = f(x)1 = f(x)$$

$f \cdot 1 = 1 \cdot f = f$

$(\lambda f)g = \lambda(fg)$

$$((\lambda f)g)(x) = (\lambda f)(x)g(x) = (\lambda f(x))g(x) = \lambda(f(x)g(x)) = \lambda((fg)(x)) = (\lambda(fg))(x).$$

$(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$

$$((\lambda+\mu)f)(x) = (\lambda+\mu)f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x) = (\lambda f)(x) + (\mu f)(x) = (\lambda f + \mu f)(x)$$

$\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$

$$(\lambda(f+g))(x) = \lambda(f+g)(x) = \lambda(f(x)+g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x) = (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x) = (\lambda f + \lambda g)(x).$$

Si X a au moins deux éléments distincts a,b, alors $\mathbb{K}^X$ contient des **diviseurs de zéro**, c'est-à-dire qu'il existe $(f,g) \in (\mathbb{K}^X)^2$ tel que :

$$f \neq 0, \quad g \neq 0, \quad fg = 0.$$

En effet, on peut prendre $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$, $x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases}$ et $g : X \longrightarrow \mathbb{K}$, $x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = b \\ 0 & \text{si } x \neq b \end{cases}$.

Autrement dit, pour des fonctions :

la relation $fg = 0$ n'entraîne pas ($f = 0$ ou $g = 0$).

On dit que l'anneau $(\mathbb{K}^X,+,\cdot)$ **n'est pas intègre**.

On remarquera cependant que, pour toute f de $\mathbb{K}^X$, on a : $f^2 = 0 \Longrightarrow f = 0$.

Définition 1

Définition de l'**inverse** d'une fonction ne s'annulant en aucun point.

1) Soit $g \in \mathbb{K}^X$; si $(\forall x \in X,\ g(x) \neq 0)$, on note $\dfrac{1}{g} : X \longrightarrow \mathbb{K}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{g(x)}$,

qui est alors le symétrique de g pour la multiplication.

Définition du **quotient** d'une fonction par une fonction ne s'annulant en aucun point.

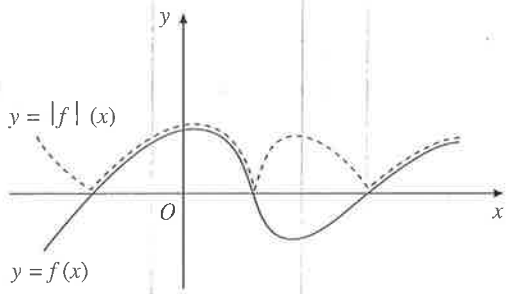
2) Soient $f,g \in \mathbb{K}^X$ telles que $(\forall x \in X, g(x) \neq 0)$; on note $\dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g}$.

Définition 2

Définition de la **valeur abolue** d'une fonction.

Pour $f \in \mathbb{K}^X$, on note $|f| : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto |f(x)|$.

On remarquera qu'en général, $|f| \neq f$ et $|f| \neq -f$.



Définition 3

f et $\overline{f}$ sont à valeurs complexes. Ré f et Im f sont à valeurs réelles.

Pour $f \in \mathbb{C}^X$, on note :

$$\overline{f} : X \longrightarrow \mathbb{C},\ x \longmapsto \overline{f(x)} \qquad \text{Ré}\, f : X \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \text{Ré}\big(f(x)\big) \quad , \quad \text{Im}\, f : X \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \text{Im}\big(f(x)\big).$$

On a ainsi, pour toute f de $\mathbb{C}^X$ et tout x de X :

$$\overline{f}(x)=\overline{f(x)},\quad (\mathrm{Ré}\, f)(x)=\mathrm{Ré}(f(x)),\quad (\mathrm{Im}\, f)(x)=\mathrm{Im}(f(x)),$$

et, pour toute f de $\mathbb{C}^X$: $\left\{\begin{array}{l} f=\mathrm{Ré}\, f+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, f \\ \overline{f}=\mathrm{Ré}\, f-\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, f \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l} \mathrm{Ré}\, f=\dfrac{1}{2}(f+\overline{f}) \\ \mathrm{Im}\, f=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(f-\overline{f}) \end{array}\right.$.

Ne pas oublier le i du dénominateur dans l'expression de $\mathrm{Im}\, f$.

Exercices 4.1.1 et 4.1.2.

Les méthodes à retenir

Algèbre $\mathbb{K}^X$

- **Pour résoudre une équation fonctionnelle** (ex. 4.1.2), raisonner par condition nécessaire, en appliquant l'hypothèse de différentes façons, puis par condition suffisante (réciproque). Le lecteur verra plus tard d'autres exemples, faisant intervenir une hypothèse de continuité (ex. 4.3.2 à 4.3.4), ou de dérivabilité (ex. 5.3.4).

Exercices

4.1.1 Trouver toutes les $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telles que :

$$\forall g\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ g\circ f=f\circ g.$$

4.1.2 Trouver toutes les applications $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ telles que :

a) $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)f(x^2-1)=\sin x$

b) $\forall x\in\mathbb{R},\ xf(x)+f(1-x)=x^3+1$

c) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y^2)=f(x^2)+f(y)$

d) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)-f(x-y)=2y(3x^2+y^2)$

e) $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(xy)+f(xz)-2f(x)f(yz)\geqslant\dfrac{1}{2}$.

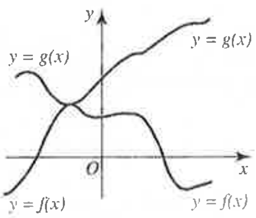
4.1.2 Relation d'ordre dans $\mathbb{R}^X$

Définition 1

Soit X un ensemble ; on définit dans $\mathbb{R}^X$ une relation, notée $\leqslant$, par :

$$\forall f,g\in\mathbb{R}^X,\quad \big(f\leqslant g\iff(\forall x\in X,\ f(x)\leqslant g(x))\big).$$

Dans l'exemple illustré par le schéma suivant, on a $f\leqslant g$:



Proposition

1) $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^X$; cet ordre **n'est pas total** si X a au moins deux éléments.

2) $\leqslant$ est compatible avec $+$:

$$\forall f,g,h\in\mathbb{R}^X,\quad (f\leqslant g\Longrightarrow f+h\leqslant g+h).$$

3) On a : $\forall f,g,h\in\mathbb{R}^X,\quad \left(\left\{\begin{array}{l} f\leqslant g \\ 0\leqslant h\end{array}\right.\Longrightarrow fh\leqslant gh\right)$.

Preuve :

1) • La réflexivité ($f \leqslant f$), l'antisymétrie $\left(\begin{cases} f \leqslant g \\ g \leqslant f \end{cases} \Longrightarrow f = g\right)$, la transitivité $\left(\begin{cases} f \leqslant g \\ g \leqslant h \end{cases} \Longrightarrow f \leqslant h\right)$ sont immédiates.

• Supposons que X contienne au moins deux éléments distincts a,b. Considérons
$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases}$ et $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = b \\ 0 & \text{si } x \neq b \end{cases}$.

On n'a pas $f \leqslant g$ (car $f(a) > g(a)$) ni $g \leqslant f$ (car $g(b) > f(b)$) ; on dit aussi que f et g **ne sont pas comparables** pour $\leqslant$.

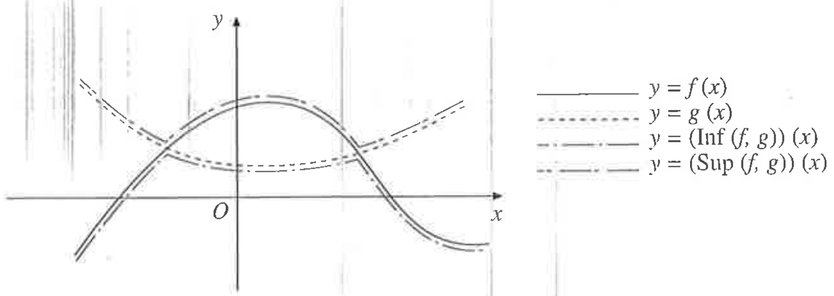
2) et *3)* : Immédiat.

Exemple de deux fonctions f, g pour lesquelles on n'a pas $f \leqslant g$ ni $g \leqslant f$.

Définition 2

Pour $f,g \in \mathbb{R}^X$, on note :

$\mathrm{Sup}(f,g) : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \mathrm{Sup}(f(x),g(x))$ et $\mathrm{Inf}(f,g) : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \mathrm{Inf}(f(x),g(x))$.



En utilisant la propriété 7) de 1.2.2 p. 48, on obtient :

$$\forall (f,g) \in (\mathbb{R}^X)^2, \quad \begin{cases} \mathrm{Sup}(f,g) = \dfrac{1}{2}(f + g + |f - g|) \\ \mathrm{Inf}(f,g) = \dfrac{1}{2}(f + g - |f - g|) \end{cases}$$

Ces formules peuvent être commodes (cf. plus loin 4.3.2 *1)* Remarque p. 148).

En particulier : $\forall f \in \mathbb{R}^X, \quad |f| = \mathrm{Sup}(f,-f)$.

On remarquera qu'en général, $\mathrm{Sup}(f,g) \neq f$ et $\mathrm{Sup}(f,g) \neq g$.

Plus précisément : $\mathrm{Sup}(f,g) = g \Longleftrightarrow f \leqslant g$.

Pour $(f,g) \in (\mathbb{R}^X)^2$, on note $f < g$ si et seulement si : $\forall x \in X, \quad f(x) < g(x)$.

Bien noter que $\begin{cases} f \leqslant g \\ f \neq g \end{cases}$ **n'entraîne pas** $f < g$ (si X a au moins deux éléments distincts) ; exemple : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x$, $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $x \longmapsto |x|$.

Dans cet exemple, on a $f \leqslant g$ et $f \neq g$, et cependant on n'a pas $f < g$.

Définition 3

Pour $f \in \mathbb{R}^X$, on note $f^+ = \mathrm{Sup}(f,0)$, $f^- = \mathrm{Sup}(-f,0)$.

En particulier, f^+ et f^- sont des fonctions à valeurs $\geqslant 0$.

Exercice 4.1.3.

Exercice

4.1.3 Soit X un ensemble. Vérifier les formules suivantes, pour toutes f,g de $\mathbb{R}^X$:

1) $\begin{cases} \mathrm{Sup}(f,g) = f + (g-f)^+ \\ \mathrm{Inf}(f,g) = g - (g-f)^+ \end{cases}$

2) $\begin{cases} f = f^+ - f^- \\ |f| = f^+ + f^- \end{cases}$

3) $f \leqslant g \iff \begin{cases} f^+ \leqslant g^+ \\ g^- \leqslant f^- \end{cases}$

4) $\begin{cases} \mathrm{Sup}(f^+, f^-) = |f| \\ \mathrm{Inf}(f^+, f^-) = 0 \end{cases}$

5) $(f+g)^+ \leqslant f^+ + g^+$.

4.1.3 Parité

Dans tout ce § 4.1.3, X désigne une partie de $\mathbb{R}$ **symétrique par rapport à 0**, c'est-à-dire telle que : $\forall x \in X, \quad -x \in X$.

Définition

Soit $f \in \mathbb{K}^X$.

1) On dit que f est **paire** si et seulement si : $\forall x \in X, \quad f(-x) = f(x)$.

2) On dit que f est **impaire** si et seulement si : $\forall x \in X, \quad f(-x) = -f(x)$.

Remarques :

1) Toute application constante sur X est paire.

2) Si f est impaire et $0 \in X$, alors $f(0) = 0$; mais f peut être impaire et ne pas être définie en 0.

3) Une application peut n'être ni paire, ni impaire ; exemple : $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x+1 \end{array}$.

Par exemple, l'application $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est impaire et n'est pas définie en 0.

Notons P_X (resp. I_X) l'ensemble des applications paires (resp. impaires) de X dans $\mathbb{K}$.

Proposition

P_X et I_X sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^X$, supplémentaires dans $\mathbb{K}^X$.

Preuve :

1) Les assertions suivantes sont évidentes :

- $0 \in P_X$ et $0 \in I_X$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (f,g) \in (P_X)^2, \lambda f + g \in P_X$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (f,g) \in (I_X)^2, \lambda f + g \in I_X$
- $P_X \cap I_X = \{0\}$.

2) Soit $f \in \mathbb{K}^X$; en notant $g : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \end{array}$ et $h : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{array}$

on a : $f = g + h, \quad g \in P_X, \quad h \in I_X$.

On dit que g est la **partie paire de** f et que h est la **partie impaire de** f.

Pour toute $f \in \mathbb{K}^X$, notons $\check{f} : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto f(-x) \end{array}$. On dit que $\check{f}$ est la **symétrisée de** f.

La représentation graphique de $\check{f}$ se déduit de celle de f par la symétrie par rapport à $(y'y)$, de direction $(x'x)$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

On montre facilement les propriétés suivantes, pour tous $\lambda \in \mathbb{K}, f, g \in \mathbb{K}^X$:

$$\check{\check{f}} = f, \quad (f+g)\check{} = \check{f} + \check{g}, \quad (\lambda f)\check{} = \lambda \check{f}, \quad (fg)\check{} = \check{f}\check{g}.$$

Exercices 4.1.4 et 4.1.5.

Exercices

4.1.4 Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est paire ou impaire et $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est paire ou impaire, que peut-on dire de fg ?

4.1.5 Etudier la parité ou l'imparité éventuelles de $g \circ f$ en fonction de celles (éventuelles) de $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$, où Y est une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0, $f(X) \subset Y$, et où $g \circ f : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{array}$, par abus de langage.

4.1.4 Périodicité

D'après cette définition, l'application $\begin{array}{l}[0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin x\end{array}$ est 2π-périodique.

Définition

Soient $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ et $f \in \mathbb{K}^X$.

1) Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$; on dit que f est ***T*-périodique** si et seulement si :

$$\forall x \in X, \quad \begin{cases} x + T \in X \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}.$$

On dit alors que T est une **période** de f.

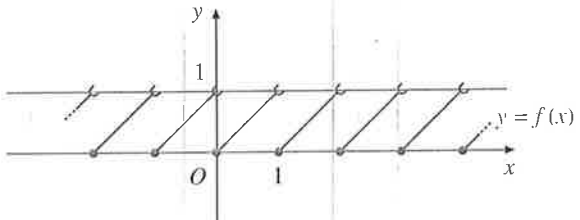
2) On dit que f est **périodique** si et seulement s'il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f soit T-périodique.

Exemples :

1) Toute application constante d'un intervalle $[a;+\infty[$ ou $]a;+\infty[$ $(a \in \mathbb{R})$ dans $\mathbb{K}$ est T-périodique pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$.

Ces deux exemples de fonctions sont souvent utilisés dans l'étude des séries de Fourier.

2)

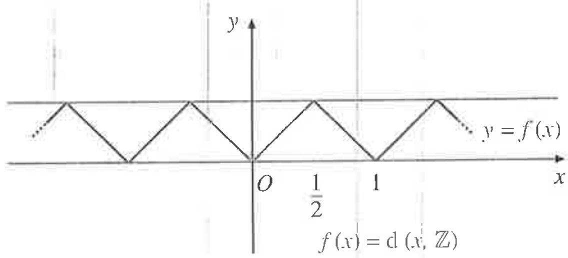


$f(x) = x - \mathrm{E}(x)$

L'application $\begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x - \mathrm{E}(x)\end{array}$ est 1-périodique.

Rappel de notation : $\mathrm{E}(x)$ désigne la **partie entière** de x.

3)



$f(x) = \mathrm{d}(x, \mathbb{Z})$

L'application $\begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{d}(x,\mathbb{Z})\end{array}$ est 1-périodique, où

$$\mathrm{d}(x,\mathbb{Z}) = \mathrm{Inf}\{|x-n|;\, n \in \mathbb{Z}\} = \mathrm{Min}(x - \mathrm{E}(x), \mathrm{E}(x) + 1 - x).$$

4) Les applications sin et cos sont **2π-périodiques** sur $\mathbb{R}$; l'application tan est **π-périodique** sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + n\pi;\, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Tout multiple d'une période de f est une période de f.

La somme de deux périodes de f est une période de f.

Remarques :

1) Si f est T-périodique, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est nT-périodique. Par exemple, sin est 6π-périodique.

2) Si f est périodique et si T_1 et T_2 sont des périodes de f, alors $T_1 + T_2$ est aussi une période de f puisque :

$$\forall x \in X, \quad f(x + (T_1 + T_2)) = f((x + T_1) + T_2) = f(x + T_1) = f(x).$$

Proposition 1

Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$ et $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ tels que : $\forall x \in X, x + T \in X$. L'ensemble des applications T-périodiques de X dans $\mathbb{K}$ est une sous-algèbre unitaire de $\mathbb{K}^X$.

Preuve : Les vérifications sont immédiates :

• $1 : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto 1 \end{array}$ est T-périodique

• Si $f, g : X \to \mathbb{K}$ sont T-périodiques et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $f + g$, λf, fg sont T-périodiques.

On remarquera aussi que, si $g : X \to \mathbb{K}$ est T-périodique et ne s'annule en aucun point de X, alors $\dfrac{1}{g}$ est T-périodique.

Autrement dit : $g \circ f$ est T-périodique dès que f est T-périodique.

Proposition 2

Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$ et $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ tels que : $\forall x \in X$, $x + T \in X$. Soient $f \in \mathbb{R}^X$, $Y \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ tel que $f(X) \subset Y$, $g \in \mathbb{K}^Y$.

Si f est T-périodique, alors $g \circ f : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{array}$ est aussi T-périodique.

Preuve : évidente : $g(f(x+T)) = g(f(x))$.

On remarquera qu'une hypothèse de périodicité sur g est ici superflue.

Groupe de périodes

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. L'ensemble $P_f = \{t \in \mathbb{R};\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+t) = f(x)\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$: $\begin{cases} 0 \in P_f \\ \forall (t,u) \in (P_f)^2,\ t + u \in P_f \\ \forall t \in P_f,\ -t \in P_f \end{cases}$.

Généralisation de la notion de période au cas d'une période négative.

L'application f est périodique si et seulement si $P_f \neq \{0\}$; dans ce cas, on appelle **période de** f tout élément de $P_f - \{0\}$. Ainsi, f peut admettre des périodes < 0.

La représentation graphique de $\chi_{\mathbb{Q}}$ ne peut pas être « tracée ».

Exemples :

- $P_{\sin} = 2\pi\mathbb{Z}$
- $P_{\chi_{\mathbb{Q}}} = \mathbb{Q}$, où $\chi_{\mathbb{Q}} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$ est la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$.

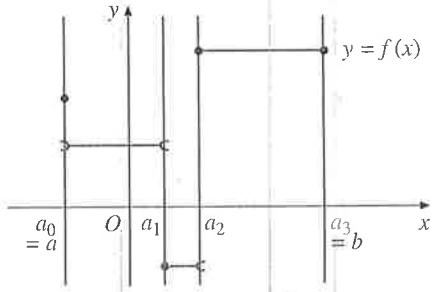
4.1.5 Applications en escalier sur un segment

Dans tout ce § 4.1.5, (a,b) désigne un couple de réels tel que $a < b$.

Définition

Une application $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **en escalier** si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, \ldots, a_n) \in [a; b]^{n+1}$, $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\begin{cases} a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b \\ \forall i \in \{0, \ldots, n-1\},\ \forall x \in]a_i; a_{i+1}[,\quad f(x) = \lambda_i. \end{cases}$$



Autrement dit, f n'a qu'un nombre fini de discontinuités, et est constante entre deux discontinuités successives.

Proposition

L'ensemble $E(a,b)$ des applications en escalier sur $[a;\,b]$ est une sous-algèbre unitaire de $\mathbb{R}^{[a;b]}$, c'est-à-dire :

1) $1 \in E(a,b)$

2) $\forall (f,g) \in (E(a,b))^2, \quad f+g \in E(a,b)$

3) $\forall f \in E(a,b), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda f \in E(a,b)$

4) $\forall (f,g) \in (E(a,b))^2, \quad fg \in E(a,b)$.

Opérations algébriques sur les fonctions en escalier.

Preuve :

Les propriétés *1)* et *3)* sont évidentes.

Soit $(f,g) \in (E(a,b))^2$.

Il existe $n,p \in \mathbb{N}^*$, $(a_0,\dots,a_n) \in [a;\,b]^{n+1}$, $(b_0,\dots,b_p) \in [a;\,b]^{p+1}$, $(\lambda_0,\dots,\lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, $(\mu_0,\dots,\mu_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tels que :

$$\begin{cases} a = a_0 < \dots < a_n = b \\ a = b_0 < \dots < b_p = b \\ \forall i \in \{0,\dots,n-1\},\ \forall x \in]a_i;\,a_{i+1}[,\ f(x) = \lambda_i \\ \forall j \in \{0,\dots,p-1\},\ \forall x \in]b_j;\,b_{j+1}[,\ g(x) = \mu_j \end{cases}$$

Il s'agit de réunir les deux subdivisions $(a_0,\dots,a_n)$ et $(b_0,\dots,b_p)$.

Notons $c_0,\dots,c_q$ les points de $[a;\,b]$ obtenus en réunissant $\{a_0,\dots,a_n\}$ et $\{b_0,\dots,b_p\}$ puis en réordonnant la partie finie de $[a;\,b]$ ainsi obtenue.

Sur chaque $]c_k;\,c_{k+1}[$ $(k \in \{0,\dots,q-1\})$, f et g sont constantes, donc $f+g$ et fg le sont aussi. ∎

L'étude des applications en escalier sera approfondie en vue de l'intégration des applications continues par morceaux sur un segment (cf. 6.1, p. 207).

4.1.6 Applications polynomiales, fonctions rationnelles

Définition 1

Soit $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$. Une application $P : X \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite **polynomiale** si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que :

$$\forall x \in X,\ P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Les applications polynomiales de X dans $\mathbb{K}$ forment une sous-algèbre unitaire de $\mathbb{K}^X$.

Au lieu d'application polynomiale, on dit aussi application-polynôme, ou encore plus brièvement, polynôme.

Définition 2

Soit $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$. Une fonction f de X dans $\mathbb{K}$ est dite **rationnelle** si et seulement s'il existe deux fonctions polynomiales $P, Q : X \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que :

$$\begin{cases} Q \neq 0 \\ \forall x \in X, \left(Q(x) \neq 0 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}\right). \end{cases}$$

L'ensemble de définition de f est $\{x \in X\ ;\ Q(x) \neq 0\}$.

Exemple :

Les fonctions de variable réelle f, g définies par les formules $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{x-1}{x(x-1)}$ n'ont pas le même ensemble de définition, mais coïncident sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$.

4.1.7 Monotonie

Définition

Soient $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ et $f \in \mathbb{R}^X$.

1) On dit que f est **croissante** si et seulement si :

$$\forall (x_1,x_2) \in X^2, \quad \big(x_1 \leqslant x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)\big).$$

2) On dit que f est **décroissante** si et seulement si :

$$\forall (x_1,x_2) \in X^2, \quad \big(x_1 \leqslant x_2 \Longrightarrow f(x_2) \leqslant f(x_1)\big).$$

3) On dit que f est **strictement croissante** si et seulement si :

$$\forall (x_1,x_2) \in X^2, \quad \big(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)\big).$$

4) On dit que f est **strictement décroissante** si et seulement si :

$$\forall (x_1,x_2) \in X^2, \quad \big(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_2) < f(x_1)\big).$$

5) On dit que f est **monotone** si et seulement si :

f est croissante ou f est décroissante.

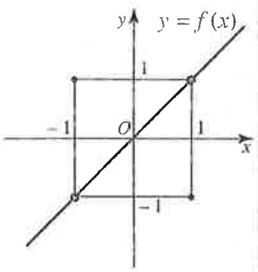
6) On dit que f est **strictement monotone** si et seulement si :

f est strictement croissante ou f est strictement décroissante.

Remarques :

1) Une application peut ne pas être monotone ; exemples :

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto x^2 \end{array} \quad \chi_{\mathbb{Q}} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}, \quad \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}. \\ x \longmapsto \dfrac{1}{x} \end{array}$$



2) Toute application strictement monotone est injective ; mais la réciproque est fausse comme le montre l'exemple :

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } (x \neq -1 \text{ et } x \neq 1) \\ 1 & \text{si } x = -1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array}$$

ment s'il

$$\frac{x-1}{x(x-1)}$$

Proposition

1) Si $f,g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sont croissantes, alors $f+g$ est croissante.

2) Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante, alors $-f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, et $\check{f} : \begin{array}{l} \check{X} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(-x) \end{array}$ (où $\check{X} = \{x \in \mathbb{R};\ -x \in X\}$) sont décroissantes.

3) Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante et si $\lambda \in \mathbb{R}_+$ alors λf est croissante.

4) Si $f,g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sont croissantes et $\geqslant 0$, alors fg est croissante.

5) Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ sont croissantes et si $f(X) \subset Y$, alors l'application composée $\begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{array}$ est croissante.

Preuve : immédiate.

Des propriétés analogues faisant intervenir des applications décroissantes peuvent être aussi énoncées.

Autrement dit : la somme d'une application croissante et d'une application décroissante n'est pas, en général, monotone.

Exercices 4.1.6 et 4.1.7.

Remarque :

Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante et $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est décroissante, on ne peut pas conclure que $f+g$ soit monotone ; exemple : $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{array}$ et $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -x \end{array}$.

Exercices

4.1.6 Résoudre l'équation $x^{18} + x^{10} = 544$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$.

4.1.7 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} f \circ f & \text{est croissante} \\ f \circ f \circ f & \text{est strictement décroissante} \end{cases}$$

Montrer que f est strictement décroissante.

4.1.8 Applications majorées, minorées, bornées

Dans tout ce § 4.1.8, X désigne un ensemble quelconque non vide.

Définition

1) Une application $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **majorée** si et seulement s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in X, \quad f(x) \leqslant A.$$

2) Une application $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **minorée** si et seulement s'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que:

$$\forall x \in X, \quad B \leqslant f(x).$$

3) Une application $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in X, \quad B \leqslant f(x) \leqslant A.$$

ausse

Remarque : f est minorée si et seulement si $-f$ est majorée.

Remarques :

1) L'application f est majorée (resp. minorée, resp. bornée) si et seulement si la partie $f(X)$ de $\mathbb{R}$ est majorée (resp. minorée, resp. bornée) (cf. 1.2.1 p. 45).

2) Toute application constante est bornée.

3) $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si $|f| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est majorée, c'est-à-dire si et seulement si : $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in X,\quad |f(x)| \leqslant M$.

Le point *3)* sera généralisé dans l'étude des fonctions à valeurs complexes, puis des fonctions à valeurs vectorielles (Analyse MP, 2.1.4).

Proposition-Définition 1

Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est majorée (resp. minorée), alors $f(X)$ admet une borne supérieure (resp. inférieure) dans $\mathbb{R}$, appelée **borne supérieure** (resp. **inférieure**) de f et notée $\underset{x\in X}{\operatorname{Sup}} f(x)$ (resp. $\underset{x\in X}{\operatorname{Inf}} f(x)$), ou $\underset{X}{\operatorname{Sup}} f$ (resp. $\underset{X}{\operatorname{Inf}} f$).

Ceci résulte directement du théorème (ou : axiome) de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ (cf. 1.2.3 p. 52).
Ainsi, par définition : $\underset{x\in X}{\operatorname{Sup}} f(x) = \operatorname{Sup}\{f(x);\ x \in X\} = \operatorname{Sup} f(X)$.

Proposition 2

1) Si $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sont majorées, alors $f + g$ est majorée et :

$$\underset{x\in X}{\operatorname{Sup}} (f+g)(x) \leqslant \underset{x\in X}{\operatorname{Sup}} f(x) + \underset{x\in X}{\operatorname{Sup}} g(x).$$

2) Si $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sont majorées et $\geqslant 0$, alors fg est majorée et :

$$\underset{x\in X}{\operatorname{Sup}} (fg)(x) \leqslant \left(\underset{x\in X}{\operatorname{Sup}} f(x)\right)\left(\underset{x\in X}{\operatorname{Sup}} g(x)\right).$$

3) Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est majorée et $\lambda \in \mathbb{R}_+$, alors λf est majorée et :

$$\underset{x\in X}{\operatorname{Sup}} (\lambda f)(x) = \lambda \underset{x\in X}{\operatorname{Sup}} f(x).$$

4) Pour que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ soit minorée, il faut et il suffit que $-f$ soit majorée et on a, dans ce cas :

$$\underset{x\in X}{\operatorname{Inf}} f(x) = -\underset{x\in X}{\operatorname{Sup}} (-f(x)).$$

Manipulation de bornes supérieures : ces propriétés sont quasiment indispensables dans des études de bornes supérieures, par exemple pour montrer que certaines applications sont des normes (voir Analyse MP).

La propriété *4)* ci-contre permet souvent de ramener l'étude d'une borne inférieure à celle d'une borne supérieure.

La borne
fonctions
somme d
fonctions
De même

Structure
bornées (

Preuve :

1) Notons $M_f = \underset{x\in X}{\operatorname{Sup}} f(x),\ M_g = \underset{x\in X}{\operatorname{Sup}} g(x)$.

On a : $\forall x \in X,\ (f+g)(x) = f(x) + g(x) \leqslant M_f + M_g$.

Ceci montre que $M_f + M_g$ est un majorant de $f+g$ et : $\underset{x\in X}{\operatorname{Sup}}(f+g)(x) \leqslant M_f + M_g$, puisque $\underset{x\in X}{\operatorname{Sup}}(f+g)(x)$ est le plus petit des majorants de $(f+g)(X)$ et que $M_f + M_g$ est un majorant de $(f+g)(X)$.

Utilisation de la définition de $\underset{x\in X}{\operatorname{Sup}} (f+g)(x)$.

2) De même que ci-dessus :

$$\left(\forall x \in X,\quad \begin{cases} 0 \leqslant f(x) \leqslant M_f \\ 0 \leqslant g(x) \leqslant M_g \end{cases}\right) \Longrightarrow (\forall x \in X,\ 0 \leqslant (fg)(x) \leqslant M_f M_g).$$

3) En appliquant la propriété 2) ci-dessus à (λ, f) où λ est considérée comme application constante, on obtient : $\underset{x\in X}{\operatorname{Sup}}(\lambda f)(x) \leqslant \lambda \underset{x\in X}{\operatorname{Sup}} f(x)$.

Si $\lambda = 0$, l'égalité voulue est évidente.

Si $\lambda > 0$, en appliquant l'inégalité ci-dessus à $\left(\dfrac{1}{\lambda}, \lambda f\right)$ au lieu de (λ, f), on a :

$$\operatorname*{Sup}_{x\in X}\left(\left(\frac{1}{\lambda}\right)(\lambda f)(x)\right) \leqslant \frac{1}{\lambda}\operatorname*{Sup}_{x\in X}(\lambda f)(x),$$

et finalement l'égalité voulue.

4) • Supposons f minorée, et notons $m_f = \operatorname*{Inf}_{x\in X} f(x)$.

On a : $\forall x \in X,\ m_f \leqslant f(x)$,

d'où : $\forall x \in X,\ -f(x) \leqslant -m_f$.

Ceci montre que $-f$ est majorée et que : $M_{-f} \leqslant -m_f$.

Puisque $(\forall x \in X,\ -f(x) \leqslant M_{-f})$, on déduit $(\forall x \in X,\ -M_{-f} \leqslant f(x))$, d'où, par définition de m_f : $-M_{-f} \leqslant m_f$.

Finalement, $m_f = -M_{-f}$.

• Réciproque analogue.

Remarque :

Les inégalités des propriétés *1)* et *2)* peuvent être strictes, comme le montre l'exemple : $f : \begin{array}{l}[0;1] \longrightarrow \mathbb{R}\\ x \longmapsto x\end{array}$, $g : \begin{array}{l}[0;1] \longrightarrow \mathbb{R}\\ x \longmapsto 1-x\end{array}$; dans cet exemple :

$$\begin{cases} \operatorname*{Sup}_{x\in[0;1]} (f+g)(x) = 1 \neq \operatorname*{Sup}_{x\in[0;1]} f(x) + \operatorname*{Sup}_{x\in[0;1]} g(x) = 2 \\ \operatorname*{Sup}_{x\in[0;1]} (fg)(x) = \dfrac{1}{4} \neq \left(\operatorname*{Sup}_{x\in[0;1]} f(x)\right)\left(\operatorname*{Sup}_{x\in[0;1]} g(x)\right) = 1 \end{cases}$$

La borne supérieure d'une somme de fonctions peut ne pas être égale à la somme des bornes supérieures de ces fonctions.
De même pour le produit.

Structure de l'ensemble des applications bornées de X dans $\mathbb{R}$.

Proposition 3

L'ensemble $\mathrm{B}(X;\mathbb{R})$ des applications bornées de X dans $\mathbb{R}$ est une sous-algèbre unitaire de $\mathbb{R}^X$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 1 \in \mathrm{B}(X;\mathbb{R}) \\ \forall (f,g) \in (\mathrm{B}(X;\mathbb{R}))^2,\ f+g \in \mathrm{B}(X;\mathbb{R}) \\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall f \in \mathrm{B}(X;\mathbb{R}),\ \lambda f \in \mathrm{B}(X;\mathbb{R}) \\ \forall (f,g) \in (\mathrm{B}(X;\mathbb{R}))^2,\ fg \in \mathrm{B}(X;\mathbb{R}) \end{cases}$$

De plus, en notant $||f||_\infty = \operatorname*{Sup}_{x\in X} |f(x)|$ pour $f \in \mathrm{B}(X;\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{cases} \forall f \in \mathrm{B}(X;\mathbb{R}),\ (||f||_\infty = 0 \Longleftrightarrow f = 0) \\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall f \in \mathrm{B}(X;\mathbb{R}),\ ||\lambda f||_\infty = |\lambda|\,||f||_\infty \\ \forall (f,g) \in (\mathrm{B}(X;\mathbb{R}))^2,\ ||f+g||_\infty \leqslant ||f||_\infty + ||g||_\infty \\ \forall (f,g) \in (\mathrm{B}(X;\mathbb{R}))^2,\ ||fg||_\infty \leqslant ||f||_\infty ||g||_\infty \end{cases}$$

Preuve :

Immédiate en appliquant la Proposition 2 précédente.