Exercice-type résolu

Moyenne entre borne inférieure et borne supérieure

Soient X un ensemble non vide, $f,g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications bornées.
On note :

$$m(f) = \operatorname*{Inf}_{x\in X} f(x), \quad M(f) = \operatorname*{Sup}_{x\in X} f(x), \quad \mu(f) = \frac{1}{2}\big(m(f) + M(f)\big)$$

et de même pour g.
Montrer : $m(f+g) \leqslant \mu(f) + \mu(g) \leqslant M(f+g)$.

Solution

1) On a, pour tout $x \in X$:

$$m(f+g) \leqslant (f+g)(x) = f(x) + g(x) \leqslant f(x) + M(g).$$

Ainsi : $\forall x \in X,\ m(f+g) - M(g) \leqslant f(x)$.
En passant à la borne inférieure lorsque x décrit X, on déduit :

$$m(f+g) - M(g) \leqslant m(f),$$

c'est-à-dire : $m(f+g) \leqslant m(f) + M(g)$.
En appliquant ce dernier résultat au couple (g,f) à la place du couple (f,g), on a aussi :

$$m(f+g) \leqslant m(g) + M(f).$$

D'où, en additionnant :

$$2m(f+g) \leqslant m(f) + M(g) + m(g) + M(f) = 2\mu(f) + 2\mu(g),$$

et donc : $m(f+g) \leqslant \mu(f) + \mu(g)$.

2) Appliquons le résultat de *1)* au couple $(-f,-g)$ à la place du couple (f,g), ce qui est possible car $-f$ et $-g$ sont bornées ; on a donc :

$$m(-f-g) \leqslant \mu(-f) + \mu(-g).$$

Mais :

$$\begin{cases} m(-f-g) = m\big(-(f+g)\big) = -M(f+g) \\ \mu(-f) = \dfrac{1}{2}\big(m(-f) + M(-f)\big) = \dfrac{1}{2}\big(-M(f) - m(f)\big) = -\mu(f) \\ \mu(-g) = -\mu(g). \end{cases}$$

On obtient : $-M(f+g) \leqslant -\mu(f) - \mu(g)$,
et on conclut : $\mu(f) + \mu(g) \leqslant M(f+g)$.

Conseils

On majore $g(x)$ par $M(g)$ et on garde $f(x)$.

$m(f+g) - M(g)$ est un minorant de f, donc $m(f+g) - M(g)$ est inférieur ou égal au plus grand des minorants de f, qui est $m(f)$.

f et g ont des rôles symétriques.

Cf. § 4.1.8, Proposition 2, *4)*.

4.2 Limites

Dans les sections 4.2 et 4.3, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide ni réduit à un point. On note $\overline{I}$ l'intervalle fermé de mêmes extrémités que I, et $\overset{\circ}{I}$ l'intervalle ouvert de mêmes extrémités que I, cf. 1.2.1 p. 46.

Dans un souci d'unification, on dit qu'une propriété portant sur une fonction définie sur I est vraie **au voisinage de** a ($a \in \overline{I} \cup \{-\infty,+\infty\}$) si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert non vide centré en a si $a \in \mathbb{R}$, avec un intervalle $]c;+\infty[$ lorsque $a = +\infty$, avec un intervalle $]-\infty;c[$ lorsque $a = -\infty$.

Définit finies.

Définitio infinies.

4.2.1 Notion de limite

Définition « rigoureuse » des limites finies.

Définition 1

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, $l \in \mathbb{K}$.

1) Soit $a \in \overline{I}$. On dit que f **admet** l **pour limite en** a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad \big(|x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)-l| \leqslant \varepsilon\big).$$

2) Si I admet $+\infty$ comme extrémité, on dit que f **admet** l **pour limite en** $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad \big(x \geqslant A \Longrightarrow |f(x)-l| \leqslant \varepsilon\big).$$

3) Si I admet $-\infty$ comme extrémité, on dit que f **admet** l **pour limite en** $-\infty$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad \big(x \leqslant B \Longrightarrow |f(x)-l| \leqslant \varepsilon\big).$$

Lorsque f admet une limite l en a ($l \in \mathbb{K}$), on dit que f **admet une limite finie en** a.

Remarque :
Il est clair que f admet l pour limite en $-\infty$ si et seulement si $\check{f} : x \longmapsto f(-x)$ admet l pour limite en $+\infty$.

Définition « rigoureuse » des limites infinies.

Définition 2

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

• *1)* Soit $a \in \overline{I}$. On dit que f **admet** $+\infty$ **pour limite en** a si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad \big(|x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant A\big).$$

2) Si I admet $+\infty$ comme extrémité, on dit que f **admet** $+\infty$ **pour limite en** $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists A' \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad \big(x \geqslant A' \Longrightarrow f(x) \geqslant A\big).$$

3) Si I admet $-\infty$ comme extrémité, on dit que f **admet** $+\infty$ **pour limite en** $-\infty$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B' \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad \big(x \leqslant B' \Longrightarrow f(x) \geqslant A\big).$$

• On dit que f **admet** $-\infty$ **pour limite en** a ($a \in \overline{I} \cup \{-\infty,+\infty\}$) si et seulement si $-f$ admet $+\infty$ pour limite en a.

Remarque :
La notion de voisinage dans $\overline{\mathbb{R}}$, qui est hors-programme, permettrait une unification de ces définitions.
Dans la suite de ce § 4.2, les lettres $a,b,\dots,l,l',\dots$ pourront désigner des éléments de $\overline{I}$, ou $+\infty$, ou $-\infty$.

Proposition 1 **Unicité de la limite, si elle existe**

Si f admet l et l' pour limites en a, alors $l = l'$.

Preuve :

Supposons, par exemple, $a \in \overline{I}$ et $(l,l') \in \mathbb{K}^2$, les autres cas étant analogues.

Raisonnons par l'absurde : supposons que f admette l et l' pour limites en a, et que $l \neq l'$.

Notons $\varepsilon = \frac{1}{3}|l' - l| > 0$. Il existe $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ tels que :

$$\forall x \in I, \quad \begin{cases} |x-a| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon \\ |x-a| \leqslant \eta_2 \Longrightarrow |f(x) - l'| \leqslant \varepsilon \end{cases}.$$

Notons $\eta = \mathrm{Min}(\eta_1, \eta_2) > 0$. Il est clair qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $|x_0 - a| \leqslant \eta$, et on a :

Utilisation de l'inégalité triangulaire.

$$|l' - l| = \big|(l' - f(x)) + (f(x) - l)\big| \leqslant |f(x) - l'| + |f(x) - l| \leqslant 2\varepsilon = \frac{2}{3}|l' - l|,$$

contradiction.

La proposition précédente montre qu'on peut utiliser un symbole fonctionnel : si f admet l pour limite en a, on dit que l est la **limite de** f **en** a, et on note :
$l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, ou $l = \lim\limits_{a} f$, ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$, ou $f \underset{a}{\longrightarrow} l$.

Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont deux applications coïncidant au voisinage de a, alors les existences de limites pour f et g en a sont équivalentes et, dans le cas où ces limites existent, elles sont égales. Autrement dit, vis-à-vis d'une étude de limite en a, f et g se comportent de la même façon.

Proposition 2

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

La réciproque est fausse.
Par exemple, l'application $\begin{array}{l}\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin(\frac{1}{x})\end{array}$ est bornée sur $\mathbb{R}^*$ et n'a pas de limite en 0.

Preuve :

Supposons, par exemple, $a \in \overline{I}$, les cas $a = +\infty$, $a = -\infty$ étant analogues.
Il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad (|x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant 1 \Longrightarrow |f(x)| \leqslant |f(x) - l| + |l| \leqslant 1 + |l|),$$

donc f est bornée au voisinage de a.

Remarque :
Par contre-apposition, on voit, par exemple, que l'application $\begin{array}{l}]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x})\end{array}$, qui n'est pas bornée au voisinage de 0, n'a pas de limite finie en 0.

Proposition 3 **Utilisation de suites pour traduire une limite de fonction**

Ce théorème fait le lien entre suites et fonctions.

Pour que $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ admette l pour limite en a, il faut et il suffit que : pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans I telle que $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} a$, on a $f(u_n) \underset{n\infty}{\longrightarrow} l$.

Preuve :

Supposons $a \in \overline{I}$ et $l \in \mathbb{K}$, les autres cas étant analogues.

1) Supposons que f admette l pour limite en a, et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans I telle que $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} a$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f \underset{a}{\longrightarrow} l$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad (|x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon).$$

Ensuite, puisque $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} a$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - a| \leqslant \eta).$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(u_n) - l| \leqslant \varepsilon),$$

et donc $f(u_n) \underset{n\infty}{\longrightarrow} l$.

Raisonne

Traductic quantifié

Remarq
$]-\infty;$
sont ouv

Remarque du § 3.1.2

Bien note on suppo l en a.

Raisonnement par contre-apposition.

Traduction de la négation d'une phrase quantifiée.

2) Supposons que f n'admette pas l pour limite en a, c'est-à-dire :

$$\text{Non}(\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\quad (|x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)-l| \leqslant \varepsilon)).$$

Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall \eta > 0,\ \exists x \in I,\quad \begin{cases} |x-a| \leqslant \eta \\ |f(x)-l| > \varepsilon \end{cases}.$$

En particulier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ (en remplaçant η par $\frac{1}{n}$), il existe $u_n \in I$ tel que :

$$|u_n - a| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(u_n) - l| > \varepsilon.$$

On voit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans I ainsi construite satistait : $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} a$ et $f(u_n) \underset{n\infty}{\not\longrightarrow} l$.

Définition 3

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \overline{I}$, $l \in \mathbb{K} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

On dit que f **admet l pour limite à gauche** (resp. **à droite**) **en** a si et seulement si la restriction $f\big|_{]-\infty;\, a[\cap I}$ (resp. $f\big|_{]a;\, +\infty[\cap I}$) admet l pour limite en a.

Remarquer que les intervalles $]-\infty; a[$, $]a; +\infty[$ envisagés ici sont ouverts en a.

Exemple :

Si $l \in \mathbb{K}$, f admet l pour limite à droite en a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\quad \big(0 < x - a \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon\big).$$

Lorsque f admet l pour limite à gauche (résp. droite) en a, on note :

$$l = \lim_{x\to a^-} f(x) \quad \text{ou} \quad l = \lim_{a^-} f(x) \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} l \quad \text{ou} \quad l = f(a^-)$$

$$\Big(\text{resp. } l = \lim_{x\to a^+} f(x) \quad \text{ou} \quad l = \lim_{a^+} f(x) \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} l \quad \text{ou} \quad l = f(a^+)\Big).$$

4.2.2 Ordre et limite

Dans ce § 4.2.2, les fonctions envisagées sont à **valeurs réelles**.

Proposition 1

Remarquer l'analogie avec la Proposition 1 du § 3.1.2 p.88 sur les suites réelles.

Bien noter que, dans cette Proposition 1 on ***suppose*** que f admet une limite finie l en a.

Soient $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$, $(c,d) \in \mathbb{R}^2$.

On suppose que f admet l pour limite en a.

1) Si $c < l$, alors, au voisinage de a : $c < f(x)$

2) Si $l < d$, alors, au voisinage de a : $f(x) < d$

3) Si $c < l < d$, alors, au voisinage de a : $c < f(x) < d$.

Preuve :

1) Puisque $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ et que $l - c > 0$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que, pour tout x de I :

$$|x-a| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \frac{1}{2}(l-c) < l - c \Longrightarrow -f(x) + l < l - c \Longrightarrow c < f(x).$$

2) De même, il existe $\eta_2 > 0$ tel que :

$$\forall x \in I,\quad (|x-a| \leqslant \eta_2 \Longrightarrow f(x) < d).$$

3) En notant $\eta = \text{Min}(\eta_1, \eta_2) > 0$, on a :

$$\forall x \in I,\quad (|x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow c < f(x) < d).$$

Dans les hypothèses de la Proposition 1, les inégalités sur c, l, d sont **strictes**.

Remarque : Les inégalités **strictes** ($c < l, \ldots$) des hypothèses ne peuvent pas être remplacées par des inégalités larges.

En effet, si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ et $c \leqslant l$, il se peut que l'on n'ait pas $c \leqslant f(x)$ au voisinage de a, comme le montre l'exemple : $f : \underset{x \longmapsto x}{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}}$, $a = 0, l = 0, c = 0$.

Propriét d'encadr de l.

Ainsi, en passant à la limite, on obtient des inégalités *au* ***sens large***, même si celles concernant f sont strictes.

Bien noter que, dans cette Proposition 2, on **suppose** que f admet une limite finie en a.

Proposition 2 — Passage à la limite dans des inégalités

Soient $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$, $(c,d) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que f admet l pour limite en a.

1) Si $c \leqslant f(x)$ au voisinage de a, alors $c \leqslant l$

2) Si $f(x) \leqslant d$ au voisinage de a, alors $l \leqslant d$

3) Si $c \leqslant f(x) \leqslant d$ au voisinage de a, alors $c \leqslant l \leqslant d$.

Preuve :

Se déduit de la Proposition 1 en raisonnant par l'absurde.

Remarque :

Supposons $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ et, au voisinage de $a, c < f(x)$.

La Proposition 2 permet de déduire $c \leqslant l$; mais on ne peut pas conclure $c < l$, comme le montre l'exemple : $I =]0; +\infty[$, $a = 0$, $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$, $l = 1, c = 1$.

Autrement dit :

par passage à la limite, des inégalités strictes deviennent des inégalités larges.

Le théorème d'encadrement, s'il s'applique, permet d'abord de conclure qu'une fonction admet une limite (et il la donne).

Proposition 3 — Théorème d'encadrement

Soient $f, g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $l \in \mathbb{R}$.

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \\ h(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \text{ au voisinage de } a \end{array} \right. \text{, alors } g \text{ admet } l \text{ pour limite en } a.$$

Propriétés a

Preuve :

Supposons, par exemple, $a \in \overline{I}$, les cas $a = -\infty$, $a = +\infty$ étant analogues.

Soit $\varepsilon > 0$; puisque f et h admettent l pour limite en a, il existe $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ tels que :

$$\forall x \in I, \quad \left\{ \begin{array}{l} |x - a| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon \\ |x - a| \leqslant \eta_2 \Longrightarrow |h(x) - l| \leqslant \varepsilon \end{array} \right. .$$

En notant $\eta = \mathrm{Min}(\eta_1, \eta_2) > 0$, on a donc, pour tout x de I :

$$|x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |f(x) - l| \leqslant \varepsilon \\ |h(x) - l| \leqslant \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow -\varepsilon \leqslant f(x) - l \leqslant g(x) - l \leqslant h(x) - l \leqslant \varepsilon \Longrightarrow |g(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$

Donc g admet l pour limite en a.

Remarques : *1)* Le théorème d'encadrement, contrairement aux Propositions 1 et 2, permet de conclure à l'existence d'une limite, et s'avère ainsi très utile.

2) On peut schématiser le théorème d'encadrement :

$$\begin{array}{ccc} f(x) \leqslant & g(x) & \leqslant h(x) \\ {}_{x \to a}\searrow & & \swarrow_{x \to a} \\ & l & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l.$$

Proposition 4

Soient $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cup \{-\infty,+\infty\}$.

Si $\left\{\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \\ \text{Au voisinage de } a : f(x) \leqslant g(x) \end{array}\right|$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$.

Propriété analogue au théorème d'encadrement, $+\infty$ jouant le rôle de l.

Preuve :

Supposons, par exemple, $a \in \overline{I}$, les cas $a = -\infty$, $a = +\infty$ étant analogues.

Soit $A \in \mathbb{R}$; puisque $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que :

$\forall x \in I, \quad (|x-a| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow f(x) \geqslant A)$.

D'autre part, par hypothèse, il existe $\eta_2 > 0$ tel que :

$\forall x \in I, \quad (|x-a| \leqslant \eta_2 \Longrightarrow f(x) \leqslant g(x))$.

En notant $\eta = \mathrm{Min}(\eta_1,\eta_2)$, on a donc :

$$\forall x \in I, \quad \left(|x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) \geqslant A \\ f(x) \leqslant g(x) \end{array}\right. \Longrightarrow g(x) \geqslant A\right).$$

Ainsi $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$.

Un théorème analogue pour $-\infty$ s'obtient aisément.

4.2.3 Opérations algébriques sur les fonctions admettant une limite

1) Cas des limites finies

Proposition 1

Propriétés algébriques des limites finies.

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $a \in \overline{I} \cup \{-\infty,+\infty\}$, $f,g : I \longrightarrow \mathbb{K}$, $(l,l') \in \mathbb{K}^2$. On a :

1) $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \Longrightarrow |f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} |l|$

2) $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow |f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$

3) $\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l' \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x)+g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l+l'$

4) $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \Longrightarrow \lambda f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda l$

5) $\left\{\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \\ g \text{ bornée au voisinage de } a \end{array}\right| \Longrightarrow f(x)g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$

6) $\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l' \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x)g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} ll'$ 7) $\left.\begin{array}{l} g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l' \\ l' \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \dfrac{1}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \dfrac{1}{l'}$

8) $\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l' \\ l' \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \dfrac{l}{l'}$.

Les démonstrations sont analogues aux démonstrations de la Prop. 1 du § 3.1.3 p. 90. On pourrait d'ailleurs se ramener à cette Proposition en utilisant la Prop. 3 du § 4.2.1 p. 136.

Preuve :

Supposons, par exemple, $a \in \overline{I}$, les cas $a = -\infty$, $a = +\infty$ étant analogues.

1) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad (|x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon).$$

Utilisation de l'inégalité triangulaire renversée.

Comme : $\forall x \in I, \ \ ||f(x)| - |l|| \leqslant |f(x) - l|$,

on déduit : $\forall x \in I, \ \ (|x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow ||f(x)| - |l|| \leqslant \varepsilon)$,

et finalement : $|f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} |l|$.

2) La propriété est immédiate puisque :

$$\forall x \in X, \quad ||f(x)| - 0| = |f(x)| = |f(x) - 0|.$$

3) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l'$, il existe $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ tels que :

Le choix de $\dfrac{\varepsilon}{2}$ est justifié par l'addition ultérieure de deux termes.

$$\forall x \in I, \quad \begin{cases} |x - a| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \\ |x - a| \leqslant \eta_2 \Longrightarrow |g(x) - l'| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}.$$

En notant $\eta = \mathrm{Min}(\eta_1, \eta_2) > 0$, on a :

$$\forall x \in I, \quad \left(|x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow \begin{cases} |f(x) - l| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \\ |g(x) - l'| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}\right.$$

$$\left.\Longrightarrow |(f(x) + g(x)) - (l + l')| = |(f(x) - l) + (g(x) - l')| \leqslant |f(x) - l| + |g(x) - l'| \leqslant \varepsilon\right).$$

Donc $f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l + l'$.

4) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$, il existe $\eta > 0$ tel que :

L'intervention du rapport $\dfrac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}$ est justifiée par la multiplication ultérieure par λ.

$$\forall x \in I, \quad \left(|x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}\right).$$

On a alors :

$$\forall x \in I, \quad \left(|x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |\lambda f(x) - \lambda l| = |\lambda|\,|f(x) - l| \leqslant \frac{|\lambda|\varepsilon}{|\lambda| + 1} \leqslant \varepsilon\right).$$

Donc $\lambda f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda l$.

5) Par hypothèse, il existe $\eta_1 > 0$ et $C \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$\forall x \in I, \quad (|x - a| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow |g(x)| \leqslant C).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$, il existe $\eta_2 > 0$ tel que :

L'intervention du rapport $\dfrac{\varepsilon}{C + 1}$ est justifiée par la multiplication ultérieure par C.

$$\forall x \in I, \quad \left(|x - a| \leqslant \eta_2 \Longrightarrow |f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{C + 1}\right).$$

En notant $\eta = \mathrm{Min}(\eta_1, \eta_2) > 0$, on a :

$$\forall x \in I, \quad \left(|x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon C}{C + 1} \leqslant \varepsilon\right).$$

Donc $f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

L'intervention de $f(x) - l$ permet, puisque $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$, de se ramener à une fonction de limite nulle.

6) Notons $h : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto f(x) - l \end{array}$.

On a : $\forall x \in I, \quad f(x)g(x) = lg(x) + h(x)g(x)$.

D'après *4)*, $lg(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} ll'$. D'autre part, d'après *3)* et *4)*, $h(x) = f(x) - l \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, et donc, d'après *5)*, $h(x)g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, puisque g est bornée au voisinage de a.

Finalement, d'après *3)*, $f(x)g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} ll'$.

7) Puisque $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l'$, on a, d'après *1)* : $|g(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} |l'|$.

Comme $|l'| > 0$, d'après (4.2.2, Prop. 1, p. 137) il existe $\eta_1 > 0$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad \left(|x-a| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow |g(x)| > \frac{|l'|}{2}\right).$$

En particulier : $\forall x \in I, \ (|x-a| \leqslant \eta_1 \Longrightarrow g(x) \neq 0)$.

Ainsi, $\dfrac{1}{g}$ est définie au voisinage de a, sauf peut-être en a.

La fonction $\dfrac{1}{g}$ est donc définie, au moins, sur $I \cap]a-\eta_1 ; a+\eta_1[$.

On a, pour tout x de $I \cap]a-\eta_1 ; a+\eta_1[$:

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l'}\right| = \frac{|g(x)-l'|}{|g(x)|\,|l'|} \leqslant \frac{2}{|l'|^2}\,|g(x)-l'|.$$

Comme $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l'$, on déduit $\dfrac{2}{|l'|^2}\,|g(x)-l'| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ (cf. *4)*), puis, d'après le théorème d'encadrement (4.2.2 Prop. 3 p. 138), $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{l'}\right| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \dfrac{1}{l'}$.

Un quotient se ramène au produit par un inverse.

8) Il suffit d'appliquer *6)* et *7)* en remarquant : $\dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g}$.

Cas des fonctions à valeurs complexes.

Proposition 2

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $l \in \mathbb{C}$. On a :

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \iff \overline{f}(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \overline{l}.$$

Preuve :

Immédiat, puisque $|f(x) - l| = |\overline{f(x) - l}| = |\overline{f}(x) - \overline{l}|$.

Cas des fonctions à valeurs complexes.

Corollaire

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \alpha + \mathrm{i}\beta \iff \begin{cases} (\text{Ré } f)(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \alpha \\ (\text{Im } f)(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \beta. \end{cases}$$

2) Cas des limites infinies

La Proposition suivante, dans son énoncé et sa preuve, est analogue à 3.1.3 Prop 3 p. 92.

Propriétés algébriques des limites infinies.

Proposition

Soient $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

1) Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ et si g est minorée au voisinage de a, alors :

$$f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty.$$

En particulier :

- $\left\{\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \end{array}\right| \Longrightarrow f(x)+g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$

- $\left\{\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l' \in \mathbb{R} \end{array}\right| \Longrightarrow f(x)+g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty.$

2) Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ et si g est minorée au voisinage de a par une constante strictement positive, alors :

$$f(x)g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty.$$

En particulier :

- $\left\{\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \end{array}\right| \Longrightarrow f(x)g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$

- $\left\{\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \\ g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l' \in \mathbb{R}_+^* \end{array}\right| \Longrightarrow f(x)g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty.$

On peut aussi dresser des tableaux de limites pour $f+g$ et fg analogues à ceux relatifs aux limites de suites $(u_n+v_n)_n$, $(u_nv_n)_n$, pp. 93 et 94.

3) Composition des limites

Proposition

Soient $a \in \overline{I} \cup \{-\infty,+\infty\}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$, $b \in \overline{J} \cup \{-\infty,+\infty\}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{K}$, $l \in \mathbb{K} \cup \{-\infty,+\infty\}$.

Si $\left\{\begin{array}{l} f \text{ admet } b \text{ pour limite en } a \\ g \text{ admet } l \text{ pour limite en } b \end{array}\right|$, alors $g \circ f$ admet l pour limite en a.

Ici, $g \circ f : \underset{x \longmapsto g(f(x))}{I \longrightarrow \mathbb{K}}$, par abus de langage.

Preuve :

Supposons $a \in I$, $b \in J$, $l \in \mathbb{K}$, les autres cas étant analogues.

Soit $\varepsilon > 0$; puisque $g(y) \underset{y\to b}{\longrightarrow} l$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall y \in J, \quad (|y-b| \leqslant \eta \Longrightarrow |g(y)-l| \leqslant \varepsilon).$$

Le réel η vient d'être fixé.

Puis, comme $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad (|x-a| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x)-b| \leqslant \eta).$$

On a alors : $\forall x \in I, \quad (|x-a| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x)-b| \leqslant \eta \Longrightarrow |g(f(x))-l| \leqslant \varepsilon)$,

donc : $g \circ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$.

Rappelc n'a de s valeurs r

Ce théo s'il ne dc

te stric-

atifs aux

$) \subset J,$

4.2.4 Cas des fonctions monotones

Rappelons que la notion de monotonie n'a de sens que pour les fonctions à valeurs *réelles*.

Dans ce § 4.2.4, les fonctions envisagées sont à valeurs réelles.

Ce théorème est très important, même s'il ne donne pas explicitement la limite.

Théorème

Soient $(a,b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\})^2$ tel que $a < b$, $f :]a;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application croissante.

1) Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b et :

$$\lim_b f = \operatorname*{Sup}_{x \in]a;b[} f(x).$$

2) Si f n'est pas majorée, alors f admet $+\infty$ pour limite en b.

Preuve :

1) La partie $f(]a;b[)$ de $\mathbb{R}$ est non vide et majorée, donc admet une borne supérieure l dans $\mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $l - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $f(]a;b[)$ dans $\mathbb{R}$, il existe $y \in f]a;b[)$ tel que $l - \varepsilon < y$, puis, par définition de $f(]a;b[)$, il existe $\xi \in]a;b[$ tel que $y = f(\xi)$. On a donc : $l - \varepsilon < f(\xi) \leqslant l$.

Alors, pour tout $x \in]a;b[$:

$$\xi \leqslant x \Longrightarrow f(\xi) \leqslant f(x) \Longrightarrow l - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant l \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$

Supposons $b \in \mathbb{R}$ (le cas $b = +\infty$ étant analogue).

En notant $\eta = b - \xi > 0$, on a ainsi : $\forall x \in]a;b[, \quad (0 < b - x \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon)$.

Ceci prouve : $f(x) \xrightarrow[x \to b]{} l$.

2) Soit $A \in \mathbb{R}$. Puisque f n'est pas majorée, il existe $\zeta \in]a;b[$ tel que $f(\zeta) > A$. Alors, pour tout $x \in]a;b[$: $\zeta \leqslant x \Longrightarrow f(\zeta) \leqslant f(x) \Longrightarrow f(x) \geqslant A$.

Supposons $b \in \mathbb{R}$ (le cas $b = +\infty$ étant analogue).

En notant $\eta = b - \zeta > 0$, on a ainsi : $\forall x \in]a;b[, \quad (0 < b - x \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant A)$.

Ceci prouve $f(x) \xrightarrow[x \to b]{} +\infty$.

Lorsque $b \in \mathbb{R}$, on peut, dans le théorème précédent, parler de limite à gauche en b.
On remarquera donc qu'une application croissante sur $]a;b[$ admet toujours une limite, finie ou infinie, en b.
En considérant les applications

$$\left\{\begin{array}{l} x \longmapsto -f(x) \\ x \longmapsto f(a+b-x) \end{array}\right| \quad \text{si} \quad b \in \mathbb{R}$$

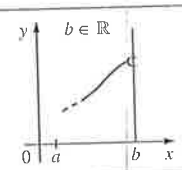
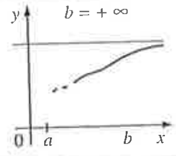
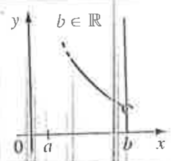
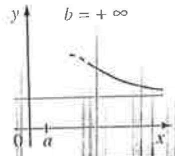
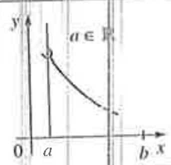
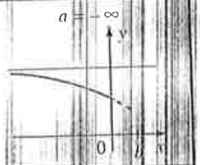
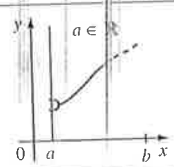
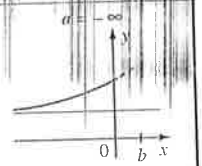
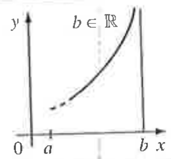
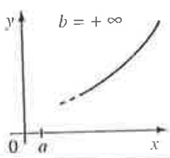
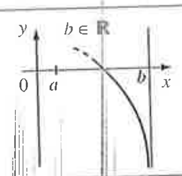
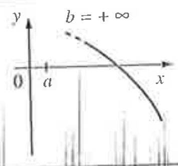
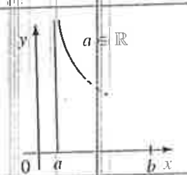
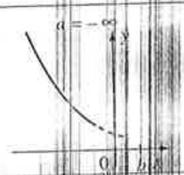
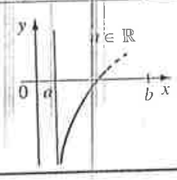
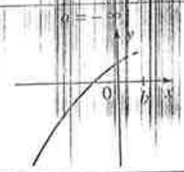
$$\left\{\begin{array}{l} x \longmapsto -f(x) \\ x \longmapsto f(-x) \end{array}\right| \quad \text{si } b = +\infty,$$

on déduit du théorème précédent les résultats consignés dans le tableau de la page suivante.

Proposition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application croissante. Alors, en tout point a de $\overset{\circ}{I}$, f admet une limite à gauche et une limite à droite finies, et :

$$\lim_{a^-} f \leqslant f(a) \leqslant \lim_{a^+} f.$$

Hypothèses sur $f :]a\,;b[\to \mathbb{R}$	Conclusion : Existence de ...	Conclusion : qui vaut ...	Schémas	
croissante et majorée	$\lim\limits_{b} f$	$\mathop{\mathrm{Sup}}\limits_{x \in]a\,;b[} f(x)$		
décroissante et minorée	$\lim\limits_{b} f$	$\mathop{\mathrm{Inf}}\limits_{x \in]a\,;b[} f(x)$		
décroissante et majorée	$\lim\limits_{a} f$	$\mathop{\mathrm{Sup}}\limits_{x \in]a\,;b[} f(x)$		
croissante et minorée	$\lim\limits_{a} f$	$\mathop{\mathrm{Inf}}\limits_{x \in]a\,;b[} f(x)$		
croissante et non majorée	$\lim\limits_{b} f$	$+\infty$		
décroissante et non minorée	$\lim\limits_{b} f$	$-\infty$		
décroissante et non majorée	$\lim\limits_{a} f$	$+\infty$		
croissante et non minorée	$\lim\limits_{a} f$	$-\infty$		

Si $f : I$ —
$a \in \mathring{I}$, alors
seulement si

Lien entr
fonction.

Par ex
$f : \mathbb{R}$ —
$x \longmapsto \{$
admet un
espèce en