Dérivation

CHAPITRE 5

Plan

Introduction

La notion de dérivée d'une fonction en un point, issue d'un taux d'accroissement par passage à la limite lorsque l'accroissement sur la variable tend vers 0, donne une indication sur le comportement de $f(x) - f(a)$ lorsque x est près de a.

La notion de fonction dérivée permet ensuite d'étudier les variations locales et globales des fonctions d'une variable réelle, de déterminer des extrémums, de calculer des vitesses.

Grâce à la dérivation, on pourra obtenir certaines inégalités portant sur une ou plusieurs variables, et étudier la convexité.

Prérequis

- Fonctions réelles ou complexes d'une variable réelle (chapitre 4) : limites, continuité, fonction réciproque, applications lipschitziennes.

Objectifs

- Définition et étude de la dérivée en un point, de la fonction dérivée.
- Mise en place des formules algébriques sur les dérivées et les dérivées successives.
- Introduction de la notion de classe d'une fonction.
- Étude des théorèmes fondamentaux (théorème de Rolle et théorème des accroissements finis) et de leurs conséquences.
- Utilisation de la dérivation en vue de l'étude des variations et des extremums d'une fonction réelle d'une variable réelle.
- Définition, étude, utilisation des fonctions réelles convexes d'une variable réelle.

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, et on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle que $\mathbb{K}^I$ désigne l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{K}$.

5.1 Dérivées

5.1.1 Dérivée en un point

Définition 1

Soient $a \in I$, $f \in \mathbb{K}^I$. On dit que f est **dérivable en** a si et seulement si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie ; cette limite est alors notée $f'(a)$ et appelée **dérivée de f en a.**

Exercices 5.1.1, 5.1.2.

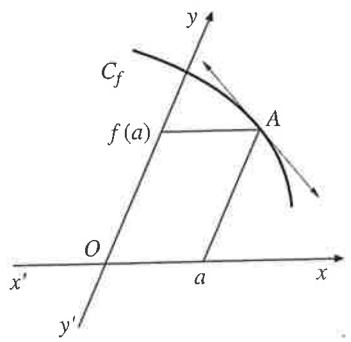
On peut aussi noter $(D_1 f)(a)$, ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$, au lieu de $f'(a)$.

Remarque : Toute application constante $\lambda : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda \end{array}$ est dérivable en tout a de I, et $\lambda'(a) = 0$.

Définition 2

Le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ s'appelle le **taux d'accroissement** (ou : **taux de variation**) **de f entre** a **et** $a+h$.

Ainsi, sous réserve d'existence, une dérivée en un point est la limite d'un taux d'accroissement.

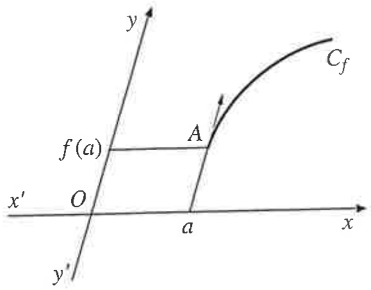


Interprétation graphique de la dérivée de f en a, sous réserve d'existence.

Si f est à valeurs réelles, la dérivabilité de f en a se traduit géométriquement par l'existence d'une **tangente**, non parallèle à $(y'y)$, en le point A de coordonnées $(a, f(a))$ de la courbe représentative C_f de f.

Cette tangente a pour coefficient directeur $f'(a)$.

Résultats analogues lorsque $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand h tend vers 0^+ ou vers 0^-.
Dans ces cas, f n'est pas dérivable en a.



Si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, la courbe C_f admet en A une demi-tangente parallèle à $(y'y)$.

Définition 3

Soient $a \in I, f \in \mathbb{K}^I$.

1) On dit que f est **dérivable en** a **à droite** si et seulement si

$\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie ; cette limite est alors notée $f'_d(a)$, et appelée **dérivée de** f **à droite en** a.

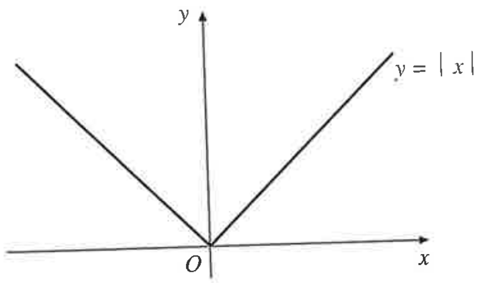
2) On dit que f est **dérivable en** a **à gauche** si et seulement si

$\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie ; cette limite est alors notée $f'_g(a)$, et appelée **dérivée de** f **à gauche en** a.

Remarque : Lorsque $I = [a; b[$ $((a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b)$, les définitions de « f est dérivable en a » et de « f est dérivable à droite en a » sont équivalentes.

L'application $f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (x)\end{array}$ n'est pas dérivable en 0.

Exemple : $f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x|\end{array}$ est dérivable à gauche en 0 et dérivable à droite en 0, et $f'_g(0) = -1, f'_d(0) = 1$.



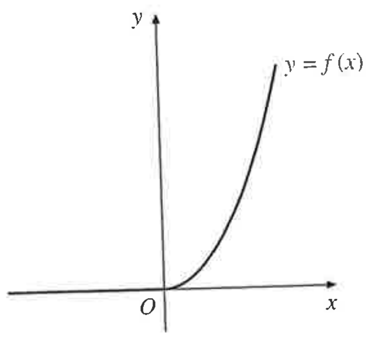
La Proposition suivante est immédiate :

Proposition 1

Soient $a \in \overset{\circ}{I}$, $f \in \mathbb{K}^I$. Pour que f soit dérivable en a, il faut et il suffit que f soit dérivable à gauche et à droite en a et que $f'_g(a) = f'_d(a)$. De plus, sous ces hypothèses, on a : $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

On pourra essayer d'utiliser cette Proposition lorsque $f(x)$ est donnée par deux « formules » distinctes suivant la position de x par rapport à a.

Exemples :

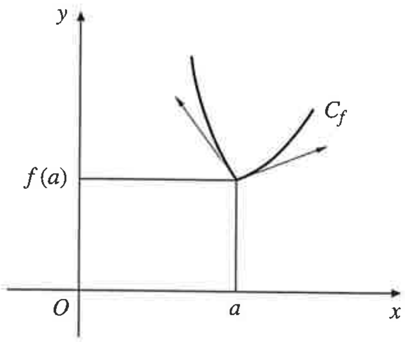


Considérons $f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}\end{array}$

On a, pour tout h de $\mathbb{R}^*$:

$$\begin{cases} \text{si } h > 0, \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = h \xrightarrow[h \to 0^+]{} 0 \\ \text{si } h < 0, \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = 0 \xrightarrow[h \to 0^-]{} 0 \end{cases}.$$

Ainsi, f est dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.



On dit que le point $A(a, f(a))$ de C_f est un **point anguleux** de C_f lorsque C_f admet en A deux demi-tangentes non-parallèles. C'est le cas, par exemple, lorsque $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent et sont différents.

Proposition 2

Soient $a \in I, f \in \mathbb{K}^I$.

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Preuve : Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in I$, on a :

$$f(a+h) = f(a) + h\,\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Puisque $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f'(a)$, on déduit alors $f(a+h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f(a)$, et donc f est continue en a. ∎

Remarques :

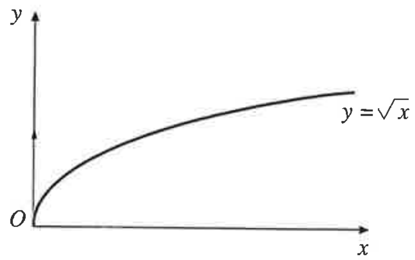
1) La réciproque de la propriété précédente est fausse : une application peut être continue en a sans être dérivable en a, comme le montrent les exemples suivants :

Pour la fonction $|\cdot|$, les dérivées à droite et à gauche en 0 existent mais sont différentes.

(i) $|\cdot| : \begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x|\end{array}$ est continue en 0 et n'est pas dérivable en 0.

La courbe représentative de $\sqrt{\cdot}$ a une demi-tangente « verticale » en 0.

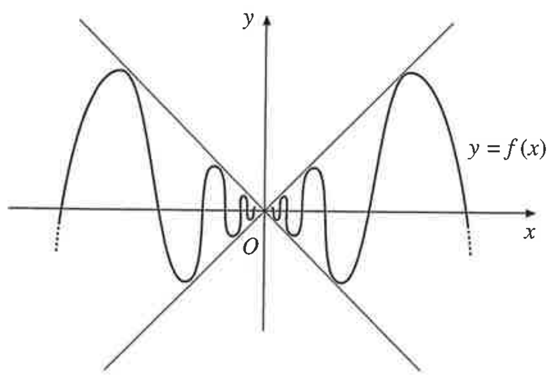
(ii)



$\sqrt{\cdot} : \begin{array}{l}\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x}\end{array}$ est continue en 0, et n'est pas dérivable en 0, puisque :

$$\forall h > 0, \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \underset{h \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

(iii)



Ce type de fonction est souvent envisagé dans l'étude de contre-exemples portant sur la notion de dérivée (cf. exercice 5.1.10 p. 177).

L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

est continue en 0 (car $|f(x)| \leqslant |x| \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$), et n'est pas dérivable en 0 puisque $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \sin\left(\dfrac{1}{h}\right)$ n'a pas de limite lorsque h tend vers 0.

2) On montre, de la même façon que dans la proposition précédente, que :

- Si f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a, alors f est continue à droite (resp. à gauche) en a
- Si f est dérivable à gauche en a et dérivable à droite en a, alors f est continue en a.

Exercices

5.1.1 Soient $a \in \mathbb{R}$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $a \in I$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable en a.

Trouver $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h^2) - f(a + h)}{h}$.

5.1.2 Montrer que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} x + 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 3 - x \text{ si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

5.1.2 Propriétés algébriques des fonctions dérivables en un point

Opérations algébriques sur les fonctions dérivables en un point.

Théorème 1

Soient $a \in I, \lambda \in \mathbb{K}, f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ deux applications dérivables en a. Alors

1) $f + g$ est dérivable en a et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

2) λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$

3) fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

4) si $g(a) \neq 0$, $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = -\dfrac{g'(a)}{(g(a))^2}$

5) si $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

On revient à la définition de la dérivabilité en un point, en utilisant un taux d'accroissement.

Preuve :

1) $\dfrac{1}{h}((f + g)(a + h) - (f + g)(a))$

$= \dfrac{1}{h}(f(a + h) - f(a)) + \dfrac{1}{h}(g(a + h) - g(a)) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f'(a) + g'(a)$

2) $\dfrac{1}{h}((\lambda f)(a + h) - (\lambda f)(a)) = \lambda \dfrac{1}{h}(f(a + h) - f(a)) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \lambda f'(a)$

3) $\dfrac{1}{h}((fg)(a + h) - (fg)(a))$

$= \dfrac{1}{h}((f(a + h) - f(a))g(a + h) + f(a)(g(a + h) - g(a)))$

$$= \left(\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))\right) g(a+h) + f(a) \left(\frac{1}{h}(g(a+h) - g(a))\right).$$

Puisque g est dérivable en a, g est continue en a, et donc $g(a+h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} g(a)$.

On déduit : $\frac{1}{h}((fg)(a+h) - (fg)(a)) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

4) Puisque $g(a) \neq 0$ et que g est continue en a (car g est dérivable en a), on a, au voisinage de a, $g(x) \neq 0$.

Ainsi $\frac{1}{g}$ est définie au voisinage de a. Alors, pour tout réel h au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{h}\left(\left(\frac{1}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}\right) = -\frac{1}{h}\,\frac{g(a+h)-g(a)}{g(a+h)g(a)}$$

$$= -\left(\frac{1}{h}(g(a+h) - g(a))\right) \frac{1}{g(a+h)g(a)} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} -g'(a)\,\frac{1}{(g(a))^2}.$$

5) Se déduit de 3) et 4), et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f\,\frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a)\,\frac{1}{g(a)} + f(a)\,\frac{-g'(a)}{(g(a))^2}$$
$$= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

■

Remarque : Le théorème précédent s'étend aisément à des dérivées à droite (resp. à gauche).

Exercice 5.1.3.

Corollaire

Soient $a \in I, f : I \longrightarrow \mathbb{C}$. Les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) f est dérivable en a

(ii) $\overline{f}$ est dérivable en a

(iii) Ré f et Im f sont dérivables en a.

De plus, si f est dérivable en a, alors :

$$(\overline{f})'(a) = \overline{f'(a)}, \quad (\text{Ré } f)'(a) = \text{Ré}\big(f'(a)\big), \quad (\text{Im } f)'(a) = \text{Im}\big(f'(a)\big).$$

Cas des fonctions à valeurs complexes.

Théorème 2 **Dérivée d'une composée**

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que $f(I) \subset J$. On note (abusivement) $g \circ f : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{array}$.

Si f est dérivable en a et g dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Preuve : Notons ε_1 l'application définie sur $\{h \in \mathbb{R};\ a+h \in I\}$ par :

$$\varepsilon_1(h) = \begin{cases} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) & \text{si } h \neq 0 \\ 0 & \text{si } h = 0 \end{cases}.$$

On a ainsi : $\begin{cases} \forall h \in \mathbb{R},\ a+h \in I \Longrightarrow f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon_1(h) \\ \varepsilon_1(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$

De même, notons ε_2 l'application définie sur $\{k \in \mathbb{R};\ f(a)+k \in J\}$ par :

$$\varepsilon_2(k) = \begin{cases} \dfrac{g(f(a)+k)-g(f(a))}{k} - g'(f(a)) & \text{si } k \neq 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

On a ainsi :

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{R},\ f(a)+k \in J \Longrightarrow g(f(a)+k) = g(f(a)) + kg'(f(a)) + k\varepsilon_2(k) \\ \varepsilon_2(k) \xrightarrow[k\to 0]{} 0 \end{cases}$$

Pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $a+h \in I$, on a donc :

$$\begin{aligned}(g\circ f)(a+h) &= g(f(a+h)) = g(f(a)+hf'(a)+h\varepsilon_1(h)) \\ &= g(f(a)) + (hf'(a)+h\varepsilon_1(h))g'(f(a)) \\ &\quad + (hf'(a)+h\varepsilon_1(h))\varepsilon_2(hf'(a)+h\varepsilon_1(h)) \\ &= g(f(a)) + hf'(a)g'(f(a)) + h\varepsilon(h),\end{aligned}$$

où ε est définie par : $\varepsilon(h) = \varepsilon_1(h)g'(f(a)) + (f'(a)+\varepsilon_1(h))\varepsilon_2(hf'(a)+h\varepsilon_1(h))$.

Comme $\varepsilon_1(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ et $\varepsilon_2(k) \xrightarrow[k\to 0]{} 0$, on déduit $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. Ceci revient à :

$$\frac{(g\circ f)(a+h)-(g\circ f)(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(a)g'(f(a)).$$

Nous avons en fait exprimé la dérivabilité de f et de g par l'existence de développements limités à l'ordre 1, et composé ces développements limités (cf. § 8.3.4).

Théorème 3 **Dérivée d'une fonction réciproque**

Soient $a \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application strictement monotone et continue sur I, dérivable en a et telle que $f'(a) \neq 0$. Alors la fonction réciproque de f, $f^{-1} : f(I) \longrightarrow \mathbb{R}$, est dérivable en $f(a)$ et : $\quad (f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

On a ici (abusivement) confondu $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et sa restriction $\widetilde{f} : \begin{array}{l} I \longrightarrow f(I) \\ x \longmapsto f(x)\end{array}$; f^{-1} désigne en fait l'application réciproque $\widetilde{f}^{-1} : f(I) \longrightarrow I$.

Preuve :

D'après 4.3.3 Th. p. 150, $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\widetilde{f} : \begin{array}{l} I \longrightarrow f(I) \\ x \longmapsto f(x)\end{array}$ est bijective, et sa réciproque $\widetilde{f}^{-1}$ est strictement monotone de même que sens que f, et continue sur $f(I)$.

Pour tout y de $f(I) - \{f(a)\}$, on a :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \frac{f^{-1}(y) - a}{f(f^{-1}(y)) - f(a)} = \left(\frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}\right)^{-1}.$$

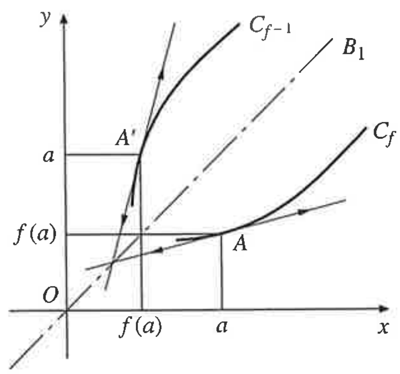
Puisque f est dérivable en a, que $f'(a) \neq 0$, et que $f^{-1}(y) \xrightarrow[y\to f(a)]{} a$, on obtient, par composition des limites : $\dfrac{f^{-1}(y) - a}{f(f^{-1}(y)) - f(a)} \xrightarrow[y\to f(a)]{} \dfrac{1}{f'(a)}$.

Ceci montre que f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et que $(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Remarques :

1) On se place dans les hypothèses du théorème précédent. On dispose alors du schéma suivant.

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives C_f et $C_{f^{-1}}$ sont **symétriques par rapport à la première bissectrice B_1**. Les tangentes en $A(a,f(a))$ à C_f et en $A'(f(a),a)$ à $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à B_1.

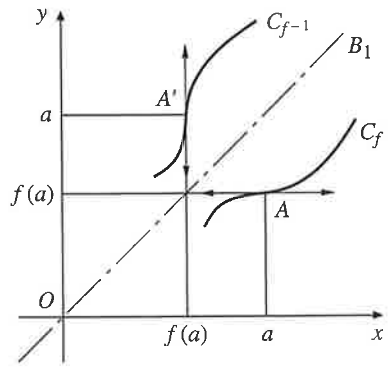


Méthode pratique pour retrouver la valeur de $(f^{-1})'(f(a))$, si on l'a oubliée.

2) Sachant que f^{-1} est dérivable en $f(a)$, on peut retrouver la valeur de $(f^{-1})'(f(a))$ en remarquant $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_I$, d'où $(f^{-1} \circ f)'(a) = 1$, c'est-à-dire $(f^{-1})'(f(a))f'(a) = 1$.

3) Comme dans la remarque *2)* ci-dessus, on voit que si f est strictement monotone et continue sur I, dérivable en a, et telle que $f'(a) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en $f(a)$. Plus précisément, en reprenant et adaptant la démonstration du théorème précédent, on voit que $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} \underset{y \to f(a)}{\longrightarrow} +\infty$, dans le cas où f est strictement croissante.

Dans ce cas, la tangente en $A'(f(a),a)$ à $C_{f^{-1}}$ existe et est parallèle à $(y'y)$.



Exercice

5.1.3 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \overset{\circ}{I}$, $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables en a. Trouver $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a}$.

5.1.3 Application dérivée

La plupart des notions et propriétés de ce § peuvent être généralisées au cas de fonctions définies sur une réunion d'un nombre fini d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Définition

Soit $f \in \mathbb{K}^I$. On appelle **dérivée de** f l'application qui, à chaque $x \in I$ tel que $f'(x)$ existe, associe $f'(x)$.

Ainsi $\mathrm{Def}(f') = \{x \in I;\ f \text{ est dérivable en } x\}$, et $f' : \begin{array}{l} \mathrm{Def}(f') \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto f'(x) \end{array}$.

On dit que f est **dérivable sur** I si et seulement si $\mathrm{Def}(f') = I$.

Ainsi, par définition, $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point de I.

Au lieu de f', on peut noter $D_1 f$, ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$; au lieu de $f'(x)$, on peut noter $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$.

Exemples :

1) $f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2\end{array}$, $\quad f' : \begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x\end{array}$.

2) $f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x|\end{array}$, $\quad f' : \begin{array}{l}\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}\end{array}$.

3) $f : \begin{array}{l}[0;1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x(1-x)\end{array}$, $\quad f' : \begin{array}{l}[0;1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow 1-2x\end{array}$.

Le Théorème suivant se déduit aisément du Théorème 1 de 5.1.2 p. 167.

Opérations algébriques sur les fonctions dérivables sur un intervalle.

Théorème 1

Soient $\lambda \in \mathbb{K}, f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ dérivables sur I. Alors :

1) $f + g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$

2) λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$

3) fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$

4) si $(\forall x \in I,\ g(x) \neq 0)$, alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$

5) si $(\forall x \in I,\ g(x) \neq 0)$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Remarque : Une récurrence immédiate permet de montrer que :
si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $f_1, \ldots, f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ sont dérivables sur I, alors $\prod_{k=1}^{n} f_k$ est dérivable sur I et :

Cette propriété peut être utilisée pour calculer une *dérivée logarithmique*, cf. plus loin p. 173.

$$\left(\prod_{k=1}^{n} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{n} f_1 \ldots f_{k-1} f_k' f_{k+1} \ldots f_n.$$

Par exemple : $(f_1 f_2 f_3)' = f_1' f_2 f_3 + f_1 f_2' f_3 + f_1 f_2 f_3'$.

Cas des fonctions à valeurs complexes.

Corollaire

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$. Les propriétés suivantes deux à deux équivalentes :

(i) f est dérivable sur I

(ii) $\overline{f}$ est dérivable sur I

(iii) Ré f et Im f sont dérivables sur I.

De plus, si f est dérivable sur I, alors :

$$(\overline{f})' = \overline{f'}, \quad (\text{Ré } f)' = \text{Ré}(f'), \quad (\text{Im } f)' = \text{Im}(f').$$

Dérivée d'une fonction composée.

Théorème 2

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que $f(I) \subset J$. On note abusivement $g \circ f : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(f(x))\end{array}$.

Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) f'.$$

Preuve : se déduit immédiatement du Théorème 2 de 5.1.2 p. 168.

Remarque : On obtient un résultat analogue pour des composées multiples d'applications dérivables ; par exemple : $(h \circ g \circ f)' = (h' \circ g \circ f)(g' \circ f)f'$.

Le théorème relatif à la dérivée d'une application réciproque se trouve plus loin, § 5.3.1 3) p 186.

Dérivées des fonctions usuelles

Dérivée d'une fonction puissance d'exposant entier naturel.

1) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n\end{array}$. On a, pour tout $(a,h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{h}((a+h)^n - a^n) = \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k a^{n-k} h^k$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} \mathrm{C}_n^{l+1} a^{n-l-1} h^l \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} = na^{n-1}.$$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = nx^{n-1}$.

Dérivée d'une fonction puissance d'exposant entier négatif.

2) Soient $n \in \mathbb{Z}_-^*$ et $g : \begin{array}{l}\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n\end{array}$. D'après 5.1.3 Th.1 *4)* p. 171, g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g'(x) = -\frac{(-n)x^{-n-1}}{(x^{-n})^2} = nx^{n-1}.$$

Dérivée d'une fonction racine q-ème.

3) Soient $q \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : \begin{array}{l}\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^{\frac{1}{q}}\end{array}$.

L'application φ est la réciproque de $f : \begin{array}{l}\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ y \longmapsto y^q\end{array}$.

Les résultats de *1)*, *2)*, *3)* seront généralisés dans Analyse MP, lors de l'étude des fonctions puissances $x \longmapsto x^y, y \in \mathbb{R}$ fixé.

Comme f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$, et que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $(\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(y) = qy^{q-1} \neq 0)$, d'après le Théorème 3 de 5.1.2 p. 169, φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{f'(\varphi(x))} = \frac{1}{q(x^{\frac{1}{q}})^{q-1}} = \frac{1}{q}\,x^{\frac{1}{q}-1}.$$

De plus : $\forall h \in \mathbb{R}_+^*, \dfrac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = h^{\frac{1}{q}-1} \underset{h \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ si $q \geqslant 2$.

Donc, si $q \geqslant 2$, φ n'est pas dérivable en 0.

Par exemple, $\sqrt{\cdot} : \begin{array}{l}\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x}\end{array}$ n'est pas dérivable en 0.

Dérivée de la fonction sin.

4) Pour tout $(a,h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$$\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \sin a\,\frac{\cos h - 1}{h} + \cos a\,\frac{\sin h}{h}.$$

Admettons : $\dfrac{\sin h}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 1$ (cf. 8.2.3 p. 281).

Alors $\dfrac{\cos h - 1}{h} = -\dfrac{2\sin^2 \frac{h}{2}}{h} = -\dfrac{h}{2}\left(\dfrac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2 \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$

Ainsi $\dfrac{\sin(a+h)-\sin a}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \cos a$, et donc sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin' = \cos$.

Dérivée de la fonction cos.

De même, on montre que cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos' = -\sin$. (On peut aussi remarquer : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ et appliquer le théorème de dérivation d'une fonction composée, Th. 2 p. 171).

Dérivée de la fonction tan.

5) tan est dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + n\pi\,;\, n \in \mathbb{Z}\right\}$ et :

$$\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin'\cos - \sin\cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2.$$

Dérivée de la fonction cotan.

De même, cotan est dérivable sur $\mathbb{R} - \{n\pi\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$ et

$$\text{cotan}' = -\frac{1}{\sin^2} = -(1 + \text{cotan}^2).$$

Dérivée de l'exponentielle, dérivée du logarithme.

6) Nous verrons plus loin (7.2) que l'exponentielle $x \longrightarrow e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée elle-même. Nous verrons aussi plus loin (7.1) que $\ln : \begin{array}{l}\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln x\end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln' x = \dfrac{1}{x}$.

Dérivée logarithmique

Nous verrons en 7.4 la définition et l'étude des fonctions puissances $x \longmapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Si f se présente sous la forme d'un produit de facteurs comportant des puissances fixes, par exemple $f = u^\alpha v^\beta w^\gamma$ (où $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$, et u,v,w sont des applications dérivables sur I et à valeurs > 0), on peut considérer la **dérivée logarithmique de** f, c'est-à-dire la dérivé de $\ln \circ f$:

Cette présentation évite de manipuler l'expression lourde : $\alpha u'vw + \beta uv'w + \gamma uvw'$.

$$\frac{f'}{f} = (\ln \circ f)' = (\alpha \ln u + \beta \ln v + \gamma \ln w)' = \alpha\,\frac{u'}{u} + \beta\,\frac{v'}{v} + \gamma\,\frac{w'}{w}.$$

5.1.4 Dérivées successives

On convient de noter $f^{(0)}$ pour f.

Définition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application.

On définit les **dérivées successives de** f de proche en proche (c'est-à-dire : par récurrence) par (pour tout n de $\mathbb{N}^*$) :

- pour $a \in I$, $f^{(n)}(a)$ est, si elle existe, la dérivée de $f^{(n-1)}$ en a
- $f^{(n)}$ est l'application dérivée de $f^{(n-1)}$.

On appelle **dérivée $n^{\text{ème}}$ de f en** a l'élément $f^{(n)}(a)$ de $\mathbb{K}$.

On appelle **application dérivée $n^{\text{ème}}$ de** f l'application $x \longmapsto f^{(n)}(x)$.

On dit que f est **n fois dérivable sur** I si et seulement si $f^{(n)}$ est définie sur I.

On dit que f est **indéfiniment dérivable sur** I si et seulement si f est n fois dérivable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Au lieu de $f^{(n)}(a)$, on peut noter $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(a)$; au lieu de $f^{(n)}$, on peut noter $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

Remarques :

1) $f^{(1)} = f'$; $f^{(2)}$ est notée f'' ; $f^{(3)}$ peut être notée f'''.

2) Si f est n fois dérivable sur I, alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leqslant n$, f est p fois dérivable sur I, et, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p+q \leqslant n$, on a : $(f^{(p)})^{(q)} = f^{(p+q)}$.

3) Il se peut que les ensembles de définition de $f, f', f'', \ldots$ soient distincts.

4) L'existence de $f^{(n)}(a)$ suppose que $f^{(n-1)}$ soit définie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert non vide centré en a.

Opérations algébriques sur les fonctions n fois dérivables.

Théorème

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ n fois dérivables sur I.
Alors :

1) $f + g$ est n fois dérivable sur I et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

2) λf est n fois dérivable sur I et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$

3) fg est n fois dérivable sur I et $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$ **(formule de Leibniz)**

4) si $(\forall x \in I,\ g(x) \neq 0)$, alors $\dfrac{f}{g}$ est n fois dérivable sur I.

Il n'y a pas de formule « simple » fournissant $\left(\dfrac{f}{g}\right)^{(n)}$.

Preuve :

1) et *2)* se montrent aisément par récurrence.

3) Récurrence sur n.

Le cas $n = 1$ a été vu (5.1.3 Th. 1 *3)* p. 171). Supposons la propriété vraie au rang n et soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ $(n+1)$ fois dérivables sur I. D'après l'hypothèse de récurrence, fg est n fois dérivable sur I et $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$. Alors $(fg)^{(n)}$ apparaît comme somme de produits d'applications dérivables sur I, donc est dérivable sur I et :

Remarquer l'analogie avec la démonstration de la formule du binôme de Newton (Algèbre MPSI, 2.3.3).

D'autres formules de Leibniz seront vues ultérieurement.

$$\begin{aligned}
((fg)^{(n)})' &= \left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\
&= \sum_{l=1}^{n+1} \mathrm{C}_n^{l-1} f^{(l)} g^{(n+1-l)} + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{l=0}^{n+1} \mathrm{C}_n^{l-1} f^{(l)} g^{(n+1-l)} + \sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (\mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^k) f^{(k)} g^{(n+1-k)} = \sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}.
\end{aligned}$$

Changement d'indice $l = k + 1$ dans la première somme.

Car $\mathrm{C}_n^{-1} = 0$ et $\mathrm{C}_n^{n+1} = 0$.

Utilisation de la **formule fondamentale sur les coefficients binomiaux :**
$\mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_{n+1}^k$

4) Récurrence sur n.

Le cas $n = 1$ a été vu (5.1.3 Th. 1 *5)* p. 171).

Supposons la propriété vraie au rang n, et soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ $(n+1)$ fois dérivables sur I, telles que $(\forall x \in I,\ g(x) \neq 0)$. Déjà, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Exercices 5.1.4 à 5.1.7.

Comme f, f', g, g' sont n fois dérivables sur I, $f'g - fg'$ et g^2 le sont aussi (cf. 3) ci-dessus) ; d'après l'hypothèse de récurrence, il en résulte que $\dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ est n fois dérivable sur I, et finalement $\dfrac{f}{g}$ est $(n+1)$ fois dérivable sur I.

Les méthodes à retenir

Dérivées $n^{\text{èmes}}$

- **Pour calculer une fonction dérivée $n^{\text{ème}}$**, s'assurer d'abord de son existence (par les théorèmes généraux), puis essayer d'appliquer la **formule de Leibniz** (ex. 5.1.4 *a)*) ou de faire une récurrence (ex. 5.1.5, 5.1.6, 5.1.7).

Exercices

5.1.4 Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n^{\text{ème}}$ de :

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (x^3 + x^2 + 1)e^{-x}$

b) $f :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)}$.

5.1.5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n :]-1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^{n-1}\ln(1+x)$.

Montrer que f_n est n fois dérivable sur $]-1;+\infty[$, et :

$$\forall x \in]-1;+\infty[,\ f_n^{(n)}(x) = (n-1)!\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+x)^k}.$$

5.1.6 Montrer que Arctan est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$:

$$(\text{Arctan})^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin\left(n \text{ Arctan } \frac{1}{x}\right).$$

5.1.7 Soit $f :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

a) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $]-1;1[$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in]-1;1[,\quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Etablir : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (2n+1)XP_n$.

b) α) Montrer :

$$\forall x \in]-1;1[,\ (1-x^2)f'(x) - xf(x) = 0.$$

β) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_{n+1} - (2n+1)XP_n - n^2(1-X^2)P_{n-1} = 0.$$

γ) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n' = n^2P_{n-1}$.

δ) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N} - \{0,1\}$:

$$n^2P_n - (2n-1)XP_n' - (1-X^2)P_n'' = 0.$$

c) Calculer $P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5.1.5 Classe d'une fonction

Lorsqu'une application $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est n fois dérivable sur I, sa dérivée n-ème existe sur I ; comme on sera souvent conduit à utiliser $f^{(n)}$, dans une intégrale par exemple, on est amené à supposer que $f^{(n)}$ est continue, ce qui justifie la définition ci-contre.

Définition 1

Soit $f \in \mathbb{K}^I$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f est **de classe C^n sur I** si et seulement si :

$$\begin{cases} f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I \\ f^{(n)} \text{ est continue sur } I \end{cases}.$$

2) On dit que f est **de classe C^∞ sur I** si et seulement si f est indéfiniment dérivable sur I.

Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on note $C^n(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des applications de classe C^n de I dans $\mathbb{K}$.

Remarques :

1) $f \in C^0(I,\mathbb{K})$ si et seulement si f est continue sur I.

2) Pour tout $(p,n) \in (\mathbb{N} \cup \{+\infty\})^2$ tel que $p \leqslant n$, on a : $C^p(I,\mathbb{K}) \supset C^n(I,\mathbb{K})$.

3) Une application $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ peut être n fois dérivable sur I sans être de classe C^n sur I. Par exemple, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (cf. ex. 5.1.10 p. 177).

4) On peut montrer (**théorème de Darboux**, ex. 5.2.11 p. 177) que, si f est dérivable sur l'intervalle I, alors f' a la propriété des valeurs intermédiaires, sans être nécessairement continue.

5) Nous verrons plus loin (5.2.2 Cor. p. 181) que, sous certaines hypothèses, si f' admet une limite finie l en a, alors f' est continue en a.

Opérations algébriques sur les fonctions de classe C^n.

Théorème 1

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $f,g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ de classe C^n sur I. Alors :

1) $f + g$ est de classe C^n sur I

2) λf est de classe C^n sur I

3) fg est de classe C^n sur I

4) si $(\forall x \in I,\ g(x) \neq 0)$, $\dfrac{f}{g}$ est de classe C^n sur I.

Preuve : se déduit aisément de 5.1.4 Th. p. 174 et de sa démonstration. ∎

Ainsi $C^n(I,\mathbb{K})$ est une sous-algèbre unitaire de $\mathbb{K}^I$.

Ainsi, la composée de deux fonctions de classe C^n est de classe C^n.

Théorème 2

Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, I,J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que $f(I) \subset J$. On note abusivement $g \circ f : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{array}$

Si f et g sont de classe C^n, alors $g \circ f$ est de classe C^n sur I.

Preuve : Récurrence sur n.

Le cas $n = 1$ a été vu (5.1.3 Th. 2 p. 171).

Supposons la propriété vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$, et soit f (resp. g) de classe C^{n+1} sur I (resp. J). Déjà, $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$ (cf. 5.1.3 Th. 2 p. 171). Puisque f et g' sont de classe C^n, l'hypothèse de récurrence montre que $g' \circ f$ est de classe C^n. Puisque $g' \circ f$ et f' sont de classe C^n, le théorème précédent montre que $(g' \circ f)f'$ est de classe C^n. Ainsi $g \circ f$ est de classe C^{n+1}.

Le cas $n = +\infty$ se déduit du résultat ci-dessus :

$$\begin{cases} f & C^\infty \\ g & C^\infty \end{cases} \Longrightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} f & C^n \\ g & C^n \end{cases}\right) \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ g \circ f \quad C^n) \Longrightarrow g \circ f \quad C^\infty. \quad ∎$$

Exercices 5.1.8 à 5.1.12.

Définition 2

Soient $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b, f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$. On dit que f est **de classe C^n par morceaux sur** $[a; b]$ si et seulement si :

il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $(a_0,\dots,a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tels que :

$$\begin{cases} \bullet \quad a = a_0 < a_1 < \dots < a_p = b \\ \bullet \quad \text{pour tout } i \in \{0,\dots,p-1\}, \text{ la restriction } f|_{]a_i;a_{i+1}[} \text{ admet un} \\ \quad\ \text{prolongement à } [a_i; a_{i+1}] \text{ qui soit de classe } C^n \text{ sur } [a_i; a_{i+1}]. \end{cases}$$

Exemples :

1) $f : \begin{array}{l} [-1; 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow d(x,\mathbb{Z}) \end{array}$ (cf. 4.1.4 Exemple *3)* p. 127) est continue sur $[-1; 1]$ et de classe C^n par morceaux sur $[-1; 1]$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2) $f : [-1; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} x^2 \text{ si } x \in]0; 1] \\ 0 \text{ si } x \in [-1; 0] \end{cases}$ (cf. 5.1.1 Exemple p. 165) est de classe C^1 sur $[-1; 1]$ et de classe C^2 par morceaux sur $[-1; 1]$.

Les méthodes à retenir

Classe d'une fonction

- **Examiner de manière détaillée le comportement de la fonction envisagée au voisinage du ou des points litigieux**, lorsque de tels points apparaissent (ex. 5.1.9, 5.1.10).
- **Pour montrer qu'une fonction est de classe C^n**, on peut essayer de la faire apparaître comme « composée » convenablement à partir de fonctions connues pour être de classe C^n (ex. 5.1.11).

Exercices

5.1.8 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathbb{R}^I$.

a) Montrer que f est dérivable sur I si et seulement si la restriction de f à tout segment $[a; b]$ de I est dérivable sur $[a; b]$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est de classe C^n sur I si et seulement si la restriction de f à tout segment $[a; b]$ de I est de classe C^n sur I.

Ce résultat (passage du local au global en ce qui concerne la classe d'une fonction) sera souvent utilisé dans le cours de seconde année, lors de l'étude de suites ou de séries de fonctions, Analyse MP.

5.1.9 Soient $P,Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} P(x) \text{ si } x \leqslant 0 \\ Q(x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$ soit de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Montrer $P = Q$.

5.1.10 Etudier la continuité, la dérivabilité, la continuité de la dérivée pour les applications

$f_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$, $\alpha \in \{0,1,2,3\}$.

5.1.11 Soient $f,g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } g(x) \geqslant 0 \\ f(x) + (g(x))^3 & \text{si } g(x) < 0 \end{cases}$$

Montrer que h est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

5.1.6 Différentielle

Définition

Soient $a \in I, f \in \mathbb{K}^I$. On suppose que f est dérivable en a.

On appelle **différentielle de f en a** l'application, notée $\mathrm{d}_a f$, définie par :

$$\mathrm{d}_a f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ h & \longmapsto & f'(a)h \end{array}.$$

La différentielle de f en a est donc une application $\mathbb{R}$-**linéaire**.
Il existe une application $\varepsilon : \{h \in \mathbb{R}\ ;\ a+h \in I\} \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que :

Autrement dit, f admet un **développement limité à l'ordre 1 en a** (cf. 8.3.1).

$$\begin{cases} \text{pour tout } h \text{ de } \mathbb{R} \text{ tel que } a+h \in I, \text{ on a :} \\ \quad f(a+h) = f(a) + (\mathrm{d}_a f)(h) + h\varepsilon(h) \\ \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

Remarques :

1) Une application $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est dérivable en a si et seulement s'il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ et une application $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{K}$ tels que :

$$\begin{cases} \text{pour tout } h \text{ de } \mathbb{R} \text{ tel que } a+h \in I, \text{ on a : } f(a+h) = f(a) + \lambda h + h\varepsilon(h) \\ \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0, \end{cases}$$

et alors $\lambda = f'(a)$.

2) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{d}_a(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & h \end{array}$. On note abusivement x l'application identité : $x : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$. On obtient ainsi, pour tout a de $\mathbb{R}$: $\mathrm{d}_a x : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & h \end{array}$.

Comme l'application $\mathrm{d}_a x$ (qui est l'identité de $\mathbb{R}$) ne dépend pas de a, on la note $\mathrm{d}x$:

Justification de la notation $\mathrm{d}x$.

$$\mathrm{d}x : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & h \end{array}.$$

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable en a. On a alors :

$\forall h \in \mathbb{R}, (\mathrm{d}_a f)(h) = f'(a)h = f'(a)\mathrm{d}x(h)$, d'où la notation $\mathrm{d}_a f = f'(a)\mathrm{d}x$.

On omet quelquefois le a de $\mathrm{d}_a f$, et on remplace abusivement a par x dans $f'(a)$, pour obtenir l'écriture condensée : $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$, ce qui permet de « retrouver » la relation $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, ce qui a posteriori justifie l'écriture $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ pour désigner $f'(x)$.

La Proposition suivante est immédiate à partir de 5.1.3 Th. 1. p. 171.

Proposition

Soient $a \in I, \lambda \in \mathbb{K}, f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ dérivables en a.

Alors :

1) $\mathrm{d}_a(f+g) = \mathrm{d}_a f + \mathrm{d}_a g$

2) $\mathrm{d}_a(\lambda f) = \lambda \mathrm{d}_a f$

3) $\mathrm{d}_a(fg) = f(a)\mathrm{d}_a g + g(a)\mathrm{d}_a f$

4) $\mathrm{d}_a\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{1}{(g(a))^2}\left(g(a)\mathrm{d}_a f - f(a)\mathrm{d}_a g\right)$, en supposant $g(a) \neq 0$.