Exemple de dérivabilité en un point

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue en 3. On suppose :

$$\frac{f(x) - 10}{x^2 - 9} \underset{x \longrightarrow 3}{\longrightarrow} 4.$$

Montrer que f est dérivable en 3 et calculer $f(3)$ et $f'(3)$.

Solution

• On a, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-3,3\}$:

$$f(x) - 10 = \frac{f(x) - 10}{x^2 - 9}(x^2 - 9).$$

Comme $\dfrac{f(x) - 10}{x^2 - 9} \underset{x \longrightarrow 3}{\longrightarrow} 4$ et $x^2 - 9 \underset{x \longrightarrow 3}{\longrightarrow} 0$, on déduit $f(x) - 10 \underset{x \longrightarrow 3}{\longrightarrow} 0$, et donc, puisque f est continue en 3 : $f(3) = 10$.

• On a :

$$\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{f(x) - 10}{x - 3} = \frac{f(x) - 10}{x^2 - 9}(x + 3) \underset{x \to 3}{\longrightarrow} 4 \cdot 6 = 24$$

ce qui montre que f est dérivable en 3 et que : $f'(3) = 24$.

Conseils

Puisque f est continue en 3, on a : $f(x) \underset{x \longrightarrow 3}{\longrightarrow} f(3)$.

On remarque la factorisation : $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.

5.2 Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis

5.2.1 Théorème de Rolle

Théorème important.

Théorème — Théorème de Rolle

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

Si $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a; b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a; b[\\ f(a) = f(b) \end{array} \right.$, alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve :

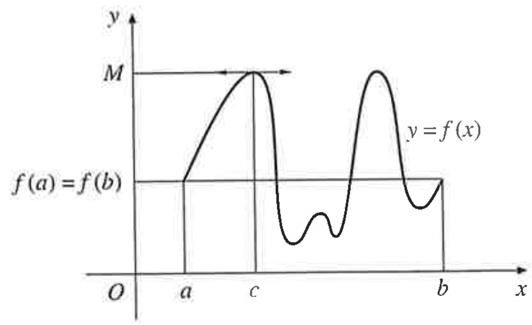
Puisque f est continue sur le segment $[a; b]$, f est bornée et atteint ses bornes (cf. 4.3.4 Th. p. 152).

Notons $m = \underset{x \in [a;b]}{\text{Inf}} f(x)$, $M = \underset{x \in [a;b]}{\text{Sup}} f(x)$.

Si $m = M$, alors f est constante, et donc : $\forall x \in]a; b[$, $f'(x) = 0$.

Supposons $m < M$; comme $f(a) = f(b)$, on ne peut avoir simultanément $M = f(a)$ et $m = f(a)$, et on peut donc se ramener, par exemple, au cas : $M \neq f(a)$.

Fermat



Puisque f atteint M, il existe $c \in]a; b[$ tel que $M = f(c)$.

Soit $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $c + h \in [a; b]$.

• Si $h > 0$, alors $\begin{cases} c+h > c \\ f(c+h) \leqslant M = f(c) \end{cases}$, donc $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqslant 0$.

• Si $h < 0$, alors $\begin{cases} c+h < c \\ f(c+h) \leqslant M = f(c) \end{cases}$, donc $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0$.

Comme f est dérivable en c, on en déduit, en faisant tendre h vers 0 : $f'(c) \leqslant 0$ et $f'(c) \geqslant 0$, d'où finalement $f'(c) = 0$.

Remarques :

1) La conclusion du théorème de Rolle s'interprète graphiquement : il existe un point de la courbe représentative C_f de f, d'abscisse dans $]a; b[$, en lequel la tangente est parallèle à $(x'x)$.

2) Il peut ne pas y avoir unicité de l'élément noté c.

3) L'application $\begin{array}{l}]0;1[\longrightarrow]a;b[\\ \theta \longmapsto a + \theta(b-a) \end{array}$ étant bijective, la conclusion du théorème de Rolle peut s'écrire : $\exists\, \theta \in]0; 1[, \quad f'(a + \theta(b-a)) = 0$.

Exercices 5.2.1 à 5.2.5.

Les méthodes à retenir

Théorème de Rolle

- De manière générale, et pour tout le programme de mathématiques des CPGE, **privilégier l'application des énoncés des théorèmes du cours**. Ne revenir aux méthodes de démonstration utilisées pour établir ces théorèmes que dans le cas où les énoncés ne s'appliquent pas (ex. 5.2.1).
- **Pour obtenir l'existence d'un ou plusieurs points satisfaisant une condition analogue à celle du théorème de Rolle**, essayer d'appliquer le théorème de Rolle à une fonction auxiliaire.

Exercices

5.2.1 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a; b]$, dérivable à droite et à gauche en tout point de $]a; b[$, et telle que $f(a) = f(b)$.
Montrer : $\exists\, c \in]a; b[, f'_g(c) f'_d(c) \leqslant 0$.

5.2.2 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(n,k,l) \in \mathbb{N}^3$ tel que $0 \leqslant l \leqslant k$ et $0 \leqslant l \leqslant n$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ n fois dérivable sur I. On suppose que f admet au moins k zéros dans I. Montrer que $f^{(l)}$ admet au moins $(k - l)$ zéros dans I.

5.2.3 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, $f,g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a; b]$, dérivables sur $]a; b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que :

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

5.2.4 Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I. On suppose :

$$f(a) = f(b) = 0, f'(a) > 0, f'(b) > 0.$$

Montrer qu'il existe $c_1, c_2, c_3 \in]a; b[$ tels que :
$c_1 < c_2 < c_3, \quad f(c_2) = 0, \quad f'(c_1) = f'(c_3) = 0.$

5.2.5 Soient $T \in]0; +\infty[$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ et T-périodique, $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f admet au moins n zéros dans $[0; T[$. Montrer qu'il en est de même de chacune de ses dérivées successives.

5.2.2 Théorème des accroissements finis

C'est un des théorèmes fondamentaux de l'analyse.

Théorème — Théorème des accroissements finis

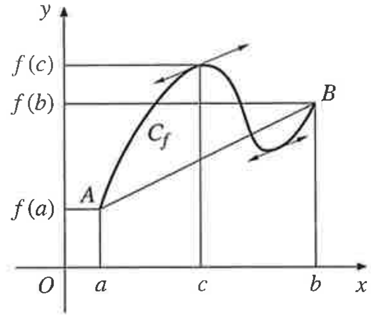
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b, f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Si f est continue sur $[a;b]$ et si f est dérivable sur $]a;b[$, alors il existe $c \in]a;b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

Pour la preuve, on se ramène au théorème de Rolle appliqué à une fonction auxiliaire.
Mais l'énoncé du théorème des accroissements finis généralise l'énoncé du théorème de Rolle.

Preuve :

Considérons $\varphi : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :



$$\forall x \in [a;b], \quad \varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x.$$

Il est clair que φ est continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$, et que $\varphi(a) = \varphi(b)$, car $\varphi(b) - \varphi(a)$

$$= f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = 0.$$

En appliquant le **théorème de Rolle** à φ, sur $[a;b]$, on obtient l'existence d'un élément c de $]a;b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, c'est-à-dire tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

La conclusion du théorème des accroissements finis s'interprète graphiquement : il existe un point de la courbe représentative de f, d'abscisse dans $]a;b[$, en lequel la tangente est parallèle à la droite (AB), où $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$.

Exercices 5.2.6 à 5.2.11.

Ce corollaire est très utile pour les exercices et les problèmes.

Corollaire — Théorème limite de la dérivée

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

Si $\left\{\begin{array}{l} f \text{ est continue en } x_0 \\ f \text{ est dérivable sur } I - \{x_0\} \\ f' \text{ admet une limite finie } l \text{ en } x_0 \end{array}\right|$,

alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$, et donc f' est continue en x_0.

Preuve :

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f'(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in I - \{x_0\}, \quad (|t - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow |f'(t) - l| \leqslant \varepsilon).$$

Soit $x \in I - \{x_0\}$ tel que $|x - x_0| \leqslant \eta$. Le **théorème des accroissements finis** s'applique à la restriction de f sur l'intervalle fermé d'extrémités x_0 et x ; il existe donc c_x (dépendant de x) tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} |c_x - x_0| \leqslant |x - x_0| \leqslant \eta \\ f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(c_x) \end{array}\right. .$$

D'où : $\left|\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - l\right| = |f'(c_x) - l| \leqslant \varepsilon.$

Ceci montre : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$

On a prouvé :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I - \{x_0\}, \quad \left(|x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - l\right| \leqslant \varepsilon\right),$$

c'est-à-dire : f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$.

Remarques :

1) On obtient un théorème analogue pour des dérivées à gauche ou à droite. Par exemple :

si $\left\{\begin{array}{l} f : [a;b[\longrightarrow \mathbb{R} \text{ est continue en } a \\ f \text{ est dérivable sur }]a;b[\\ f' \text{ admet une limite finie } l \text{ en } a^+ \end{array}\right|$, alors f est dérivable (à droite) en a, et $f'_d(a) = l$.

2) Par une démonstration analogue à la précédente, on obtient aussi :

Cas où f' a une limite infinie en x_0.

si $\left\{\begin{array}{l} f \text{ est continue en } x_0 \\ f \text{ est dérivable sur } I - \{x_0\} \\ f'(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty \text{ (resp. } -\infty) \end{array}\right|$, alors $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $-\infty$).

3) L'hypothèse « f est **continue en** x_0 » ne peut être supprimée dans le Corollaire, comme le montre l'exemple : $I = \mathbb{R}, x_0 = 0, f : I \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ si } x \neq 0 \end{array}\right.$.

Proposition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I.

Pour que f soit lipschitzienne sur I, il faut et il suffit que f' soit bornée sur I.

Preuve :

1) Supposons f' bornée sur I, et soit $(x_1, x_2) \in I^2$ tel que $x_1 < x_2$ par exemple. D'après le **théorème des accroissements finis** appliqué à f sur $[x_1; x_2]$, il existe $c \in]x_1; x_2[$ tel que :

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c).$$

D'où :

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(c)||x_2 - x_1| \leqslant ||f'||_\infty (x_2 - x_1),$$

et donc f est $||f'||_\infty$-lipschitzienne.

C'est le sens le plus utilisé en pratique : si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I et à dérivée bornée sur I, alors f est $||f'||_\infty$-lipschitzienne.

2) Réciproquement, supposons f lipschitzienne. Il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \quad |f(x_2) - f(x_1)| \leqslant k|x_2 - x_1|.$$

Soient $x_0 \in I$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x_0 + h \in I$; on a : $\left|\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right| \leqslant k$.

Puisque f est supposée dérivable en x_0, en passant à la limite quand h tend vers 0, on déduit $|f'(x_0)| \leqslant k$. Ainsi, f' est bornée sur I. ∎

Remarques :

1) On a obtenu, sous les hypothèses de la Proposition :

$$\underset{(x_1,x_2) \in I^2,\ x_1 \neq x_2}{\text{Sup}} \left|\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| = \underset{x \in I}{\text{Sup}} |f'(x)|.$$

2) La Proposition précédente est utile dans l'étude des suites réelles du type $u_{n+1} = f(u_n)$ (cf. 3.4.3 p. 114).

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{2x^2 + 3x - 1}{x^4 + x^2 + 1}$.

Il est clair que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et un calcul élémentaire fournit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{-4x^5 - 9x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 6x + 3}{(x^4 + x^2 + 1)^2}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, notons $t = \operatorname{Max}(1, |x|)$. On a, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} |-4x^5 - 9x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 6x + 3| \leqslant 29t^5 \\ (x^4 + x^2 + 1)^2 \geqslant (x^4 + 1)^2 \geqslant t^8 \end{cases}, \quad \text{d'où} \quad |f'(x)| \leqslant \frac{29}{t^3} \leqslant 29.$$

D'après la proposition précédente, f est lipschitzienne.

Exercice-type résolu

Un exemple d'utilisation du théorème de Rolle

Soient $f : [-1 ; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. On note :

$$g : [-1 ; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto g(x) = 2x^4 + x + f(x).$$

On suppose que f s'annule en $-1, 0, 1$.

Montrer qu'il existe $c \in]-1 ; 1[$ tel que : $g'(c) = 0$.

Solution

• On a : $g(-1) = 1$, $g(0) = 0$, $g(1) = 3$. Puisque g est continue sur l'intervalle $[0 ; 1]$, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, il existe $a \in [0 ; 1]$ tel que $g(a) = 1$.

• L'application g est continue sur $[-1 ; a]$, dérivable sur $]-1 ; a[$, et $g(-1) = g(a)$. D'après le **théorème de Rolle**, il existe $c \in]-1 ; a[\subset]-1 ; 1[$ tel que $g'(c) = 0$.

Conseils

Le but recherché ressemble à la conclusion du théorème de Rolle.

On va donc essayer de montrer que g prend la même valeur en au moins deux points distincts.

Utilisation du théorème de Rolle.

Les méthodes à retenir

Théorème des accroissements finis

• **Pour établir une propriété du type « il existe $c \in]a; b[$ tel que... », la fin de la propriété faisant intervenir une dérivée, on peut essayer :**
  – d'appliquer le théorème de Rolle ou le théorème des accroissements finis, une ou plusieurs fois (ex. 5.2.6, 5.2.10).
  – de construire un réel A et une fonction auxiliaire φ en s'inspirant de la preuve du théorème des accroissements finis p. 181 (ex. 5.2.9).

Exercices

5.2.6 Théorème des accroissements finis généralisés

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, $f,g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a;b]$, dérivables sur $]a;b[$, telles que : $\forall x \in]a;b[,\ g'(x) \neq 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que : $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

5.2.7 Règle de L'Hospital

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en x_0, dérivables sur $I - \{x_0\}$, telles que :

$$\begin{cases} \forall x \in I - \{x_0\}, \quad g'(x) \neq 0 \\ \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \underset{x \longrightarrow x_0}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Montrer : $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \underset{x \longrightarrow x_0}{\longrightarrow} l.$

(Utiliser l'exercice 5.2.6).

Application : en supposant connues les dérivées des fonctions circulaires, montrer :

$$\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1, \quad \frac{1-\cos x}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}, \quad \frac{x-\sin x}{x^3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{6}.$$

5.2.8 Soit $f :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $]0;+\infty[$ et telle que f' admette une limite finie l en $+\infty$.

Montrer : $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l.$

5.2.9 Soient $h \in \mathbb{R}_+^*$, $f : [-h;h] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^5. Montrer qu'il existe $c \in]-h;h[$ tel que :

$$f(h) - f(-h) = \frac{h}{3}(f'(-h) + 4f'(0) + f'(h)) - \frac{1}{90}h^5 f^{(5)}(c).$$

5.2.10 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ sauf peut-être en un nombre fini n $(n \in \mathbb{N})$ de points. Montrer qu'il existe $(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$, tel que $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$, et $(c_1,\dots,c_{n+1}) \in (]a;b[)^{n+1}$, tel que $a < c_1 < \dots < c_{n+1} < b$, vérifiant :

$$f(b) - f(a) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f'(c_i)\right)(b-a).$$

5.2.11 Théorème de Darboux

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

5.3 Variations des fonctions

5.3.1 Étude de la monotonie pour une fonction dérivable

1) Caractérisation des applications constantes

Rappel de notation : $\overset{\circ}{I}$ désigne I privé de ses éventuelles extrémités.

Souvent, en pratique, f est dérivable sur I.

Proposition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.

Pour que f soit constante sur I, il faut et il suffit que :

$$\forall x \in \overset{\circ}{I}, \quad f'(x) = 0.$$

Preuve :

• Il est clair que, si f est constante, alors : $\forall x \in \overset{\circ}{I}$, $f'(x) = 0$.

• Soit $(x_1,x_2) \in I^2$ tel que $x_1 < x_2$. D'après le **théorème des accroissements finis** (appliqué à f sur $[x_1;x_2]$), il existe $c \in]x_1;x_2[$ tel que :

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) = 0.$$

Remarque : Le résultat précédent est valable plus généralement pour $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ (considérer Ré f et Im f).

2) Caractérisation des applications monotones

Souvent, en pratique, f est dérivable sur I.

Théorème 1

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. Pour que f soit croissante sur I, il faut et il suffit que : $\forall x \in \overset{\circ}{I},\ f'(x) \geqslant 0$.

Preuve :

1) Supposons f croissante sur I.

Soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$; pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x_0 + h \in I$, on a : $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0$.

En passant à la limite quand h tend vers 0, on déduit $f'(x_0) \geqslant 0$.

2) Réciproquement, supposons : $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \geqslant 0$.

Soit $(x_1, x_2) \in I^2$ tel que $x_1 < x_2$. En appliquant le **théorème des accroissements finis** à f sur $[x_1 ; x_2]$, on voit qu'il existe $c \in]x_1 ; x_2[$ tel que :

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c) \geqslant 0.$$

Ainsi, f est croissante sur I.

Remarque : En étudiant $-f$ au lieu de f, on obtient un théorème analogue au précédent, en remplaçant $\begin{cases} \text{croissante} & \text{par} & \text{décroissante} \\ \geqslant 0 & \text{par} & \leqslant 0 \end{cases}$.

Souvent, en pratique, f est dérivable sur I.

Théorème 2

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.

Pour que f soit strictement croissante, il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} \forall x \in \overset{\circ}{I},\ f'(x) \geqslant 0 \\ \{x \in \overset{\circ}{I},\ f'(x) = 0\} \text{ ne contient aucun intervalle d'intérieur non vide} \end{cases}$$

Preuve :

1) Supposons f strictement croissante sur I. D'après le Théorème 1, on a déjà :

$$\forall x \in \overset{\circ}{I}, \quad f'(x) \geqslant 0.$$

Raisonnons par l'absurde : supposons que $\{x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) = 0\}$ contient un intervalle d'intérieur non vide.

Il existe donc $c \in \{x \in \overset{\circ}{I} ; f'(x) = 0\}$ et $\alpha > 0$ tels que :

$$]c - \alpha ; c + \alpha[\subset \{x \in \overset{\circ}{I},\ f'(x) = 0\}.$$

Ceci signifie : $\forall x \in]c - \alpha ; c + \alpha[, f'(x) = 0$.

D'après la Prop. p. 184, f est alors **constante** sur $]c - \alpha ; c + \alpha[$, donc n'est pas strictement croissante sur I, ce qui contredit l'hypothèse.

On conclut que $\{x \in \overset{\circ}{I},\ f'(x) = 0\}$ ne contient aucun intervalle d'intérieur non vide.

2) Réciproquement, supposons :

$$\begin{cases} \forall x \in \overset{\circ}{I},\ f'(x) \geqslant 0 \\ \{x \in \overset{\circ}{I},\ f'(x) = 0\} \text{ ne contient aucun intervalle d'intérieur non vide} \end{cases}$$

D'après le Théorème 1, on sait déjà que f est croissante sur I.

Raisonnons par l'absurde : supposons que f ne soit pas strictement croissante sur I. Il existe donc $(x_1,x_2) \in I^2$ tel que : $x_1 < x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$.

Comme f est croissante sur I, on a alors :

$$\forall x \in [x_1; x_2], \quad f(x) = f(x_1),$$

et donc $]x_1; x_2[\subset \{x \in \overset{\circ}{I};\ f'(x) = 0\}$, ce qui contredit l'hypothèse.

Donc f est strictement croissante sur I.

Remarque :

1) En particulier, si f est dérivable sur I et si $(\forall x \in I, f'(x) > 0)$, alors f est strictement croissante sur I.

2) Il se peut que f soit dérivable sur I, strictement croissante sur I, et que f' s'annule en au moins un point de I. Exemple : $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}. \\ x \longmapsto x^3 \end{array}$

Les Théorèmes 1 et 2 sont utilisés dans l'étude des variations d'une fonction, et les résultats seront en général consignés dans un tableau, appelé **tableau de variation(s) de f.**

Par exemple, considérons $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x}{1+x^2} \end{array}$. L'application f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

et : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Les flèches indiquent en principe une stricte monotonie.

Exercices 5.3.1 à 5.3.8.

3) Dérivée d'une application réciproque

Théorème 3

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}^I$. Si f est dérivable sur I et si $(\forall x \in I, f'(x) > 0)$ ou $(\forall x \in I, f'(x) < 0)$, alors $\widetilde{f} : \begin{array}{l} I \longrightarrow f(I) \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$ est bijective, l'application réciproque $\widetilde{f}^{-1}$ (notée abusivement f^{-1}) est dérivable sur $f(I)$, et :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Preuve : Supposons, par exemple, $f' > 0$ (le cas $f' < 0$ s'y ramène en considérant $-f$). D'après le Théorème 2, f est strictement croissante. On peut alors appliquer 5.1.2 Th. 3 p. 169 pour déduire que f^{-1} est dérivable et exprimer sa dérivée.

Remarque : D'après le théorème de Darboux (exercice 5.2.11 p. 184), on peut remplacer l'hypothèse $((\forall x \in I, f'(x) > 0)$ ou $(\forall x \in I, f'(x) < 0))$ par : $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$.

4) C^n-difféomorphismes

Définition

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow J$, $n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. On dit que f est un **C^n-difféomorphisme de I sur J** si et seulement si :

$$\begin{cases} f \text{ est de classe } C^n \text{ sur } I \\ f \text{ est bijective} \\ f^{-1} \text{ est de classe } C^n \text{ sur } J \end{cases}.$$

Théorème 4

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow J$, $n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Pour que f soit un C^n-difféomorphisme de I sur J, il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} f \text{ est de classe } C^n \text{ sur } I \\ f' > 0 \text{ ou } f' < 0 \\ f(I) = J \end{cases}.$$

Preuve :

1) Supposons que f soit un C^n-difféomorphisme de I sur J. En particulier, f et f^{-1} sont de classe C^1 et $(f^{-1} \circ f)' = 1$, d'où $((f^{-1})' \circ f)f' = 1$. Ceci montre que f' ne s'annule en aucun point de l'intervalle I ; comme f' est continue, le **théorème des valeurs intermédiaires** montre : $f' > 0$ ou $f' < 0$.

2) Réciproquement, supposons f de classe C^n sur I et $f' > 0$ (le cas $f' < 0$ s'y ramène en considérant $-f$). Le Théorème 3 montre que f est bijective, et que f^{-1} est dérivable sur J et : $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Cette dernière formule montre que $(f^{-1})'$ est continue (puisque f' et f^{-1} sont continues). Une récurrence immédiate permet alors, à partir de cette même formule, de montrer que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, f^{-1} est de classe C^k sur J. En particulier, f^{-1} est de classe C^n sur J.

5) Calcul de valeurs approchées d'un point fixe d'une fonction : méthode des approximations successives

x

point fixe

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur $[a\,;b]$, telle qu'il existe $C \in [0\,;1[$ tel que :

$$\forall x \in [a\,;b], \quad |f'(x)| \leqslant C.$$

Supposons : $\big(f(a) - a\big)\big(f(b) - b\big) \leqslant 0$.

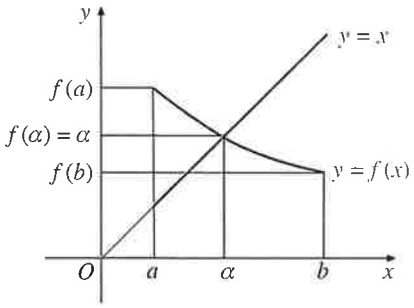
L'application $g : \begin{array}{l}[a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x)-x\end{array}$ est continue sur l'intervalle $[a\,;b]$ et $g(a)g(b) \leqslant 0$, donc, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, g admet au moins un zéro dans $[a\,;b]$.

De plus, g est dérivable sur $[a\,;b]$ et :

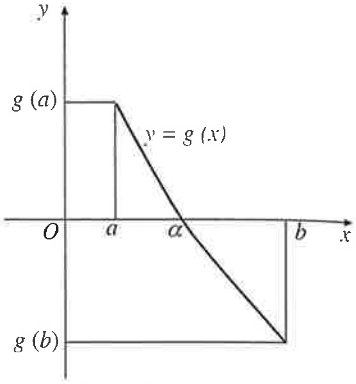
$$\forall x \in [a\,;b], \quad g'(x) = f'(x) - 1 \leqslant C - 1 < 0,$$

donc g est strictement décroissante sur $[a\,;b]$.

Ceci montre que g admet un zéro et un seul, noté α, et donc f admet un point fixe et un seul, α.



Représentation graphique de f, équation $f(x) = x$



Représentation graphique de g, équation $g(x) = 0$

Pour obtenir une valeur approchée de α, on peut utiliser la **méthode des approximations successives** suivante.

Considérons la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [a\,;\,b]$ (quelconque) et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = f(u_n).$$

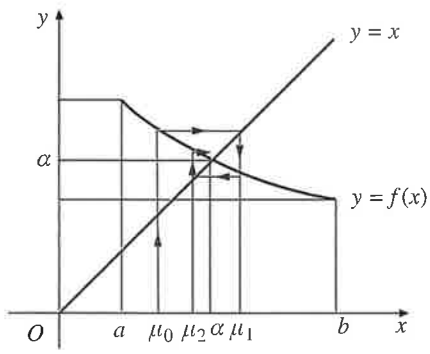
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant l'inégalité des accroissements finis :

$$|u_{n+1} - \alpha| = \big|f(u_n) - f(\alpha)\big| \leqslant C|u_n - \alpha|,$$

d'où, par une récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ |u_n - \alpha| \leqslant C^n|u_0 - \alpha| \leqslant C^n(b-a).$$

Comme $C \in [0\,;1[$, on a $C^n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, par théorème d'encadrement, $|u_n - \alpha| \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, et on conclut : $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \alpha$.



Pour $N \in \mathbb{N}$ fixé, une valeur approchée de α à 10^{-N} près est donc u_n, où $n \in \mathbb{N}$ est choisi tel que $C^n(b-a) \leqslant 10^{-N}$.

Les méthodes à retenir

Variations des fonctions

- **Pour établir qu'une fonction f est constante sur un intervalle I**, on peut montrer que f est dérivable sur I et que $f' = 0$ (ex. 5.3.1).
- **Pour étudier l'existence et le nombre de points en lesquels une fonction f d'une variable réelle s'annule**, essayer d'étudier les variations de f (ex. 5.3.3).

- **Pour résoudre une équation fonctionnelle** (c'est-à-dire une équation dans laquelle l'inconnue est une fonction f) dont l'inconnue f est supposée dérivable, « dériver » la relation de l'énoncé, en précisant la variable utilisée, et déduire de nouvelles relations qui permettront peut-être de trouver f (ex. 5.3.4 *a), b), c), d), e)*).
- **Pour établir une inégalité à une variable réelle (ex. 5.3.5) on peut essayer :**
  - d'étudier les variations d'une fonction obtenue en faisant tout passer à gauche dans l'inégalité voulue
  - d'appliquer le théorème des accroissements finis ou, plus généralement (cf. plus loin, chapitre 6) l'inégalité de Taylor-Lagrange ou la formule de Taylor avec reste intégral.
- **Pour établir une inégalité à plusieurs variables réelles (ex. 5.3.8), on peut essayer :**
  - de faire un changement de variables permettant de se ramener à une inégalité plus simple (ex. 5.3.8 *a)*)
  - d'appliquer le théorème ou l'inégalité des accroissements finis (ex. 5.3.8 *b), c)*)
  - de fixer toutes les variables sauf une et se ramener à établir une inégalité à une variable.

Exercices

5.3.1 Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telles que :

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y| g(|x-y|) \\ \lim\limits_{0^+} g = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est constante.

5.3.2 Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée, deux fois dérivable, telle que $0 \leqslant f''$. Montrer que f décroît.

5.3.3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$, $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\lambda_n \neq 0$. Montrer que l'équation $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k x^{\alpha_k} = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$, admet au plus n solutions.

5.3.4 Trouver toutes les applications f dans chacun des cas suivants :

a) $\begin{cases} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \end{cases}$

b) $\begin{cases} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + f(y)) = f(y + f(x)) \end{cases}$

c) $\begin{cases} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ deux fois dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x+y) f''(x+y) = f(x) + f(y) \end{cases}$

d) $\begin{cases} f :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable sur }]-1;1[\\ \forall (x,y) \in]-1;1[^2, \; f(x) + f(y) = f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right) \end{cases}$

5.3.5 Montrer les inégalités suivantes :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \; x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0$

b) $\forall x \in]-1; +\infty[, \; \dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$

c) $\forall x \in]0; +\infty[, \; \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{8} < \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} < \dfrac{1}{2}$

d) $\forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right], \; x \cos x < \dfrac{\pi^2}{16}$

e) $\forall x \in [0; 1[, \; \tan x \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

f) $\forall x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[, \; x \cotan \dfrac{x}{2} - x \tan^3 \dfrac{x}{2} < 2.$

5.3.6 Trouver toutes les applications $f : [0; +\infty[\longrightarrow [0; +\infty[$, bijectives, deux fois dérivables, telles que $f \geqslant 0$, $f' \geqslant 0$, $f'' \geqslant 0$, telles que, en notant $g = f^{-1}$, g soit deux fois dérivable et que : $g \geqslant 0$, $g' \geqslant 0$, $g'' \geqslant 0$.

5.3.7 *a)* Montrer que, au voisinage de 0 :

$$-\frac{x^2}{2} - 3x^4 \leqslant \ln \cos x \leqslant -\frac{x^2}{2}.$$

b) En déduire $\lim\limits_{n\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \cos \dfrac{\sqrt{k}}{n}$.

5.3.8 Montrer les inégalités suivantes:

a) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,$

$$m > n \Longrightarrow (x^m + y^m)^n < (x^n + y^n)^m$$

b) $\forall (x,y) \in [0;1[^2,$

$$\left(x < y \Longrightarrow \frac{y-x}{\sqrt{1-x^2}} < \operatorname{Arcsin} y - \operatorname{Arcsin} x < \frac{y-x}{\sqrt{1-y^2}}\right).$$

c) $\forall x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[, \forall y \in]0;1[,$

$$x - \operatorname{Arcsin} y \leqslant \frac{\sqrt{1-y^2} - \cos x}{y}$$

d) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$

$$\left(0 < x < y < \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \frac{y}{x} < \frac{\tan y}{\tan x} < \frac{4}{\pi}\,\frac{y}{x}\right).$$

5.3.2 Étude des extremums pour une fonction dérivable

Définition

Soient $a \in I, f \in \mathbb{R}^I$.

1) On dit que f **admet un maximum local** en a si et seulement si, au voisinage de a :

$$f(x) \leqslant f(a).$$

2) On dit que f **admet un minimum local en** a si et seulement si, au voisinage de a :

$$f(x) \geqslant f(a).$$

3) On dit que f **admet un maximum local strict en** a si et seulement si, au voisinage de a sauf en a :

$$f(x) < f(a).$$

4) On dit que f **admet un minimum local strict en** a si et seulement si, au voisinage de a sauf en a :

$$f(x) > f(a).$$

5) On dit que f **admet un extremum local en** a si et seulement si f admet un maximum local en a ou un minimum local en a.

6) On dit que f **admet un extremum local strict en** a si et seulement si f admet un maximum local strict en a ou un minimum local strict en a.

Exemples :

1) Toute application constante admet en tout point un maximum local et un minimum local.

2) $|\cdot| : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{array}$ admet un minimum local strict en 0.

3) $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto d(x,\mathbb{Z}) \end{array}$ (cf. 4.1.4 Exemple *3)* p. 127) admet un maximum local strict en $\frac{1}{2}$.

Remarque : On ramène souvent l'étude d'un minimum local et l'étude d'un maximum local l'une à l'autre, en considérant $-f$ au lieu de f.

Bien noter la condition $a \in \overset{\circ}{I}$ dans les hypothèses.

Théorème

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I, f \in \mathbb{R}^I$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} a \in \overset{\circ}{I} \\ f \text{ est dérivable en } a \\ f \text{ admet un extremum local en } a \end{array} \right.$, alors $f'(a) = 0$.

Preuve :

Supposons que f admette, par exemple, un maximum local en a. Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in I$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} h > 0 \Longrightarrow \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \leqslant 0 \\ h < 0 \Longrightarrow \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \geqslant 0 \end{array} \right.$$

En passant à la limite quand h tend vers 0, on déduit $\begin{cases} f'(a) \leqslant 0 \\ f'(a) \geqslant 0 \end{cases}$, d'où $f'(a) = 0$.

C'est essentiellement la même preuve que pour le théorème de Rolle 5.2.1 p. 179).

Exercice 5.3.10.

Remarques :

1) La preuve précédente montre plus précisément :

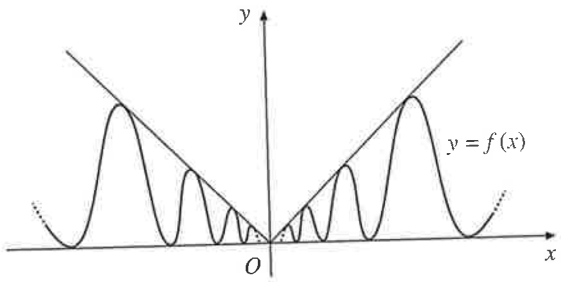
si $\left\{ \begin{array}{l} a \in \overset{\circ}{I} \\ f \text{ est dérivable à droite et à gauche } a \\ f \text{ admet un maximum local en } a \end{array} \right|$, alors : $f'_g(a) \geqslant 0$ et $f'_d(a) \leqslant 0$.

2) Le théorème tombe en défaut si a est une extrémité de I.

Par exemple, $\begin{array}{rl} f: [0;1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x \end{array}$ est dérivable sur $[0; 1]$ et admet un minimim local en 0 ; cependant $f'(0) = 1 \neq 0$.

Attention au cas où f admet un extremum au bord de I.

3) Une application peut admettre un extremum local en a sans être dérivable en a. Par exemple, $\begin{array}{rl} f: \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} |x| \sin^2 \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ admet un minimum local non strict en 0, et n'est pas dérivable en 0.



4) Si f est dérivable en a et $f'(a) = 0$, on ne peut pas déduire que f admette un extremum local en a. Exemple : $\begin{array}{rl} f: \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^3 \end{array}$ et $a = 0$.

Notons cependant la propriété suivante, évidente, d'usage fréquent :

Un tableau de variation permet souvent d'obtenir l'existence et la valeur d'un extremum local, pour une fonction définie par une formule assez simple.

Proposition

Soient $a \in \overset{\circ}{I}$, $f \in \mathbb{R}^I$.

Si f est croissante sur $I \cap]-\infty; a]$ et décroissante sur $I \cap [a; +\infty[$, alors f admet un maximum local en a.

x		a	
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Exercice 5.3.9.

Exercice-type résolu

Une inégalité à deux variables

Montrer :

$$\forall (x,y) \in]0\,;\pi]\times]0\,;1[, \quad (\sin x)y < \sin(xy).$$

Solution

Soit $y \in]0\,;1[$ fixé.

Considérons l'application

$$f : [0\,;\pi] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \sin(xy) - (\sin x)y.$$

Il est clair que f est dérivable et, pour tout $x \in [0\,;\pi]$:

$$f'(x) = y\cos(xy) - (\cos x)y = y\big(\cos(xy) - \cos x\big).$$

Si $x \neq 0$, alors $0 < xy < x < \pi$, donc, puisque l'application cos est strictement décroissante sur $[0\,;\pi]$: $\cos(xy) - \cos x > 0$, puis : $f'(x) > 0$.

D'autre part : $f'(0) = 0$.

Il en résulte que f est strictement croissante sur $[0\,;\pi]$, et donc :

$$\forall x \in]0\,;\pi],\quad f(x) > f(0) = 0,$$

d'où le résultat voulu.

Conseils

L'inégalité demandée porte sur deux variables. On fixe l'une des deux et on fait varier l'autre.

On étudie les variations de f.

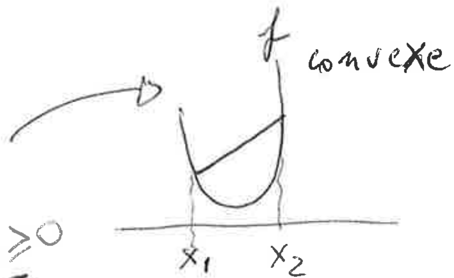
Exercices

5.3.9 Calculer

$$\mathrm{Sup}\left\{ -x^3 + \frac{75}{4}x\,;\ x \in \mathbb{R} \text{ et } x^4 + 36 \leqslant 13x^2 \right\}.$$

5.3.10 Soit $f : \ ]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim\limits_{-1^+} f = \lim\limits_{1^-} f = +\infty$. Montrer qu'il existe $c \in]-1;1[$ tel que $f'(c) = 0$.

5.4 Fonctions convexes



5.4.1 Définition

1) Définition

$f'' \geq 0$

Définition

Une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **convexe** si et seulement si :

$$\forall (x_1,x_2) \in I^2, \forall \lambda \in [0;1],\ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

On dit que f est **concave** si et seulement si $-f$ est convexe.

$f'' \leq 0$

Puisque I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on a, pour tout (x_1,x_2) de I^2 et tout λ de $[0;1]$:

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in I.$$

X

Exercices 5.4.1 à 5.4.3.

Accroissements finis

Dédou

Février 2012

L'inégalité des accroissements finis et son dessin

Théorème IAF

Soit f dérivable sur $I := [a, b]$ avec $a < b$ et m et M deux nombres réels. On suppose

$$m \leq f' \leq M \quad \text{sur } I.$$

Alors on a l'encadrement suivant de $f(b)$:

$$f(a) + m(b-a) \leq f(b) \leq f(a) + M(b-a).$$

Et ça se dessine grave.

Un exemple I

Je peux prendre n'importe quelle f dérivable, par exemple

$$f := x \mapsto e^x,$$

et n'importe quel $I := [a, b]$ dans $\mathrm{DD}f$, par exemple

$$a := 0,\ b := 1.$$

Un exemple II

Pour m et M, c'est plus compliqué.
Je dois d'abord calculer f', facile :

$$f' = x \mapsto e^x.$$

Et après, je dois encadrer f' sur $[0, 1]$. Comme f' est croissante, elle est encadrée par ses valeurs aux bornes 0 et 1, à savoir 1 et e. Donc pour m je peux prendre n'importe quel nombre inférieur à 1, par exemple 1, et pour M je peux prendre n'importe quel nombre supérieur à e, par exemple 3 :

$$\forall x \in [0, 1], \quad 1 \leq f'(x) \leq 3.$$

La formule $f(a) + m(b-a) \leq f(b) \leq f(a) + M(b-a)$ devient

$$1 + 1 \leq e \leq 1 + 3 \ \text{ autrement dit } \ 2 \leq e \leq 4.$$

Bien sûr on le savait déjà.

Exercice

Quand on applique IAF, on sait peut-être qui sont f, a et b, mais il faut choisir m et M de façon que l'hypothèse soit vérifiée !

Rappel de IAF

$$m \le f' \le M \Rightarrow f(a) + m(b-a) \le f(b) \le f(a) + M(b-a).$$

Exo 1

Encadrer $\ln 2$ en appliquant IAF à $\ln$ sur $[1,2]$.

La variante en termes de taux

La conclusion de IAF

$$f(a) + m(b-a) \le f(b) \le f(a) + M(b-a)$$

peut se reformuler comme suit (en retranchant $f(a)$ aux trois termes) :

$$m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$$

ou encore (en divisant les trois termes par $b-a$ qui est bien positif) :

$$m \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le M.$$

Le point de vue physique

En physique, on utilise une fonction f pour représenter la position $f(x)$ d'un point mobile sur un axe en fonction du temps (x, qu'on préfère alors appeler t).

- La dérivée $f'(t)$ représente alors la vitesse de notre mobile à l'instant t ;
- le quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ représente la vitesse moyenne entre les instants a et b ;
- l'hypothèse $m \le f' \le M$ signifie que, dans l'intervalle de temps considéré, la vitesse de notre mobile reste comprise entre m et M ;
- la conclusion $m \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le M$ signifie que la vitesse moyenne est elle aussi comprise entre m et M.

Que cette hypothèse implique cette conclusion semble "physiquement" incontestable.

Accroissements finis et approximation linéaire

Dans l'approximation linéaire on "approche" $f(b)$ par

$$f(a) + f'(a)(b-a).$$

Avec IAF, on encadre le même $f(b)$ par

$$f(a) + m(b-a) \quad \text{et} \quad f(a) + M(b-a).$$

Notez que l'hypothèse de IAF implique en particulier

$$m \le f'(a) \le M.$$

IAF à reculons

On a vu comment encadrer $f(b)$ en termes de $f(a)$ mais comment encadrer $f(a)$ en termes de $f(b)$? On a

$$f(a) + m(b-a) \leq f(b) \leq f(a) + M(b-a) \quad \Leftrightarrow$$

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a) \quad \Leftrightarrow$$

$$-M(b-a) \leq f(a) - f(b) \leq -m(b-a) \quad \Leftrightarrow$$

$$f(b) - M(b-a) \leq f(a) \leq f(b) - m(b-a)$$

qui est l'encadrement rêvé. Ca se comprend bien sur le dessin.

L'inégalité des accroissements finis à reculons

Théorème IAF à reculons

Soit f dérivable sur $I := [a, b]$ avec $a < b$ et m et M deux nombres réels. On suppose

$$m \leq f' \leq M \quad \text{sur } I.$$

Alors on a l'encadrement suivant de $f(b)$:

$$f(b) - M(b-a) \leq f(a) \leq f(b) - m(b-a).$$

Et ça se dessine grave.

Exemple

Encadrons $\ln 2.7$ "en partant de $\ln e$". On prend donc

$$f := \ln, \ a := 2.7, \ b := e.$$

On a $f' = x \mapsto \frac{1}{x}$. Cette fonction est décroissante sur $[a, b]$, où elle est donc encadrée par ses valeurs aux bornes :

$$m := \frac{1}{e} \leq f' \leq \frac{1}{2.7} =: M.$$

L'inégalité des accroissement finis "à reculons"

$$f(b) - M(b-a) \leq f(a) \leq f(b) - m(b-a)$$

donne, en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{5.4 - e}{2.7} \leq \ln 2.7 \leq \frac{2.7}{e}.$$

Exercice

Rappel de IAF à reculons

$$m \leq f' \leq M \quad \Rightarrow \quad f(b) - M(b-a) \leq f(a) \leq f(b) - m(b-a).$$

Exo 2

Encadrer $\sin 3$ en appliquant IAF à la fonction sinus sur $[3, \pi]$.

Preuve de IAF

On pose $g := x \mapsto f(x) - f(a) - m(x-a)$ et on calcule $g' = x \mapsto f'(x) - m$. Notre hypothèse assure que g' est positive, "donc" que g est croissante sur l'intervalle $[a, b]$. Quand on calcule $g(a) \leq g(b)$, on trouve

$$0 \leq f(b) - f(a) - m(b-a) \quad i.e. \quad f(a) + m(b-a) \leq f(b).$$

On montre la deuxième moitié de la même façon en posant $h := x \mapsto f(x) - f(a) - M(x-a)$.

Preuve de IAF

On pose $g := x \mapsto f(x) - f(a) - m(x-a)$ et on calcule $g' = x \mapsto f'(x) - m$. Notre hypothèse assure que g' est positive, "donc" que g est croissante sur l'intervalle $[a, b]$. Quand on calcule $g(a) \leq g(b)$, on trouve

$$0 \leq f(b) - f(a) - m(b-a) \quad i.e. \quad f(a) + m(b-a) \leq f(b).$$

On montre la deuxième moitié de la même façon en posant $h := x \mapsto f(x) - f(a) - M(x-a)$.

Exo 3

Faire cette deuxième moitié de preuve.