Examen d'analyse en L1 – 16 décembre 2014 – U.N.S.A.

`Tout document est interdit.`

`Calculatrice, tél. portable, ordinateur, etc. sont aussi interdits !`

`Apporter le plus grand soin à la rédaction et` **justifier toute réponse** `!`

---

1. [Les suites (2.5 pt)]

   On considère la suite (u_n) définie par la recurrence à deux termes suivants:

   $$u_{n+1} = \alpha u_n + (1-\alpha)u_{n-1}, \qquad n \geq 1$$

   avec $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = 1$. Etudier le comportement de la suite (u_n) pour $n \to +\infty$ en fonction du paramètre réel α.

---

2. [Les DLs et les intégrales (5 pt)]

   (i) Ecrire le DL à l'ordre 2 pour la fonction $f : x \mapsto xe^{2x} + \ln(1-x) + 1$ dans un voisinage de $x = 0$.

   (ii) Le DL en (i) a la forme g plus un reste, avec g un polynôme de degré 2. Dessiner les graphes de f et g sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (on peut s'aider par la valeur de f et g en $x = -\frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{2}$)

   (iii) Pour tout $c \in I\!R$, calculer $I_f = \int_{-c}^{c} f(x)dx$ en utilisant l'intégration par parties et $I_g = \int_{-c}^{c} g(x)dx$. En deduire $|I_f - I_g|$ pour $c = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{4}$. Commenter les résultats.

---

3. [Les encadrements (3.5 pt)]

   (i) On donne une fonction f dérivable définie sur l'intervalle $[-3, 3]$ telle que

   $$f(-3) = 6, \qquad f(3) = -1, \qquad -2 \leq f' \leq 1.$$

   Quel encadrement peut-on en déduire pour

   $$f(-2), \qquad f(1), \qquad \max f, \qquad \min f, \qquad f, \qquad I = \int_{-3}^{3} f(x)dx\ ?$$

   Faire un dessin.

   (ii) On pose $f : x \mapsto 7x - \sin(2\pi x)$. Encadrer f' et en déduire un intervalle autour de 1 dans lequel la fonction f reste comprise entre 6.9 et 7.1. La qualité de l'intervalle n'a pas d'importance.

4. [Le graphe de fonction (5 pt)]

   On considère une autre fonction réelle de variable x réelle :

$$g(x) = \sqrt{|x-2|(x-1)}.$$

   (i) Déterminer le domaine D de définition de f.

   (ii) Calculer les limites de f à la frontière de D.

   (iii) Déterminer le domaine de définition de la fonction f' (indiquer les éventuels points où la fonction f n'est pas dérivable). Donner l'expression de f'.

   (iv) Etudier la croissance et décroissance de f.

   (v) Déterminer les éventuels asymptotes verticaux, horizontaux, obliques.

   (vi) Tracer le graphique de la fonction f sur le plan Cartesien en accord avec les résultats obtenus pour les étapes données ci-dessus.

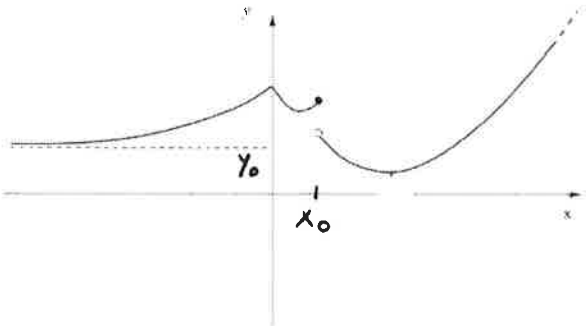
---

5. [Des questions de cours (4pt)]

   (i) Enoncer le théorème de Rolle pour une fonction f sur un intervalle $[a, b]$;
   (ii) En appliquant le théorème Rolle sur $[a, b]$ à la fonction $g : x \mapsto f(x) - rx$, avec $r = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, montrer le théorème des accroissements finis pour f sur $[a, b]$.

   On considère une fonction f dont le graphe est donné ci dessous.

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a$$
$$= \frac{bf_a - \cancel{af_a} - f_b a + \cancel{f_a a}}{b-a}$$
$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}b$$
$$= \cancel{bf_b} - af_b - \cancel{f_b b} + f_a b$$



   (iii) Donner le domaine D de définition de f;
   (iv) Déterminer le domaine où la fonction est continue et classer les eventuels points de discontinuité ;
   (v) Déterminer le domaine où la fonction est derivable et indiquer les eventuels points de non derivabilité ;
   (vi) Dire si la fonction admet des asymptotes et de quel type.

$y = y_0$ est asymptote horiz pour $x \to -\infty$

$y = mx + q$ asymptote oblique $m, q > 0$.

(iii) $D =]-\infty, +\infty[$

(iv) $\mathcal{C} =]-\infty, x_0[\cup]x_0, +\infty[$

pour f $x = x_0$ est un point de disc 1ère espece

(v) $D' =]-\infty, 0[\cup]0, x_0[\cup [x_0, +\infty[$

$x = 0$ et $x = x_0$ sont des points de non-derivabil.

1) $v_{n+1} = \alpha v_n + (1-\alpha) v_{n-1}$

on re-écrit le Terme générale v_n en fonction de n
on considère donc le polynôme caractéristique

$$p(r) = r^2 - \alpha r - (1-\alpha) = 0$$

$$\Delta = \alpha^2 + 4(1-\alpha) = \alpha^2 - 4\alpha + 4 = (\alpha - 2)^2$$

$$r_{1,2} = \frac{\alpha \pm (\alpha - 2)}{2} = \begin{cases} \alpha - 1 \\ 1 \end{cases} \quad \text{si } \alpha \neq 2$$

Rq : $\alpha \neq 1$ Toujours autrement $u_{n+1} = v_n$ mais $v_0 \neq v_1$.

$r_{1,2} = 1$ si $\alpha = 2$.

Si $\alpha = 2$ alors $v_n = (c_0 + n c_1)(1)^n$

Si $\alpha \neq 2$ alors $v_n = c_0 (\alpha - 1)^n + c_1 (1)^n$

avec c_0 et c_1 calculés en utilisant
les valeurs $v_0 = \frac{1}{2}$ et $v_1 = 1$.

Si $\alpha = 2$: $\begin{cases} c_0 = \frac{1}{2} \\ c_0 + c_1 = 1 \end{cases}$ d'où $c_0 = c_1 = \frac{1}{2}$

Si $\alpha \neq 2$ $\begin{cases} c_0 + c_1 = \frac{1}{2} \\ c_0(\alpha - 1) + c_1 = 1 \end{cases}$ d'où $c_0 = \frac{1}{2(\alpha - 2)}$

$c_1 = \frac{\alpha - 3}{2(\alpha - 2)}$

Si $\alpha = 2$ $v_n = \frac{1}{2}(1 + n) \longrightarrow +\infty$
pour $n \to +\infty$

Si $\alpha \neq 2$ $v_n = \frac{1}{2(\alpha-2)}\left((\alpha - 1)^n + (\alpha - 3)\right)$

Alors, si $|\alpha - 1| < 1$ c'est-à-dire $0 < \alpha < 2$ $\alpha \neq 1$
la suite (v_n) converge à $\frac{(\alpha - 3)}{2(\alpha - 2)}$
autrement elle diverge (ou oscille si $\alpha \leq 0$)

2) On écrit le DL à l'ordre 2 pour chaque

(i) fonction qui apparait dans l'expression de f et on combine le tout (avec intelligence)

$DL_2(0)$ de e^t : $\quad e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

donc pour e^{2x} : $\quad e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)$

$DL_2(0)$ de $\ln(1+t)$: $\quad \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

donc pour $\ln(1-x)$: $\quad \ln(1-x) = (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2)$

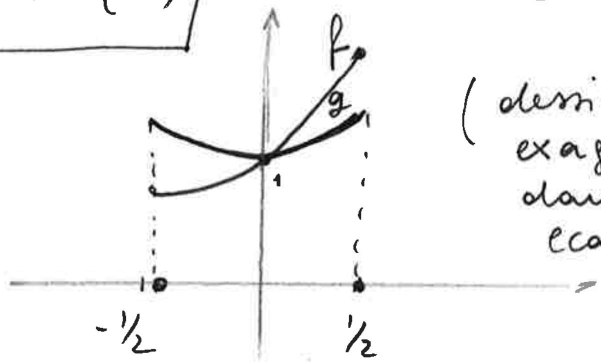
Pour f : $$f(x) = x\left(1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)\right) - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + 1$$

$$= \cancel{x} + 2x^2 + 2x^3 + o(x^3) - \cancel{x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + 1$$

négligeable par respect à $o(x^2)$

donc $$\boxed{f(x) = 1 + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}$$

(ii) $g(x) = 1 + \frac{3}{2}x^2$.



(dessin exagéré dans les écarts)

$g(\pm\frac{1}{2}) = 1 + \frac{3}{2}\,\frac{1}{4} = \frac{11}{8}$ $\quad$ 1,375

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e^1 + \ln(\frac{1}{2}) + 1$ $\quad$ 1,665

$f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}e^{-1} + \ln(\frac{3}{2}) + 1$ $\quad$ 1,221

(iii) $$I_g = \int_{-c}^{c} g\,dx = \left[x + \frac{x^3}{2}\right]_{-c}^{c} = 2\left(c + \frac{c^3}{2}\right)$$

$$I_f = \int_{-c}^{c} x e^{2x}\,dx + \int_{-c}^{c} \ln(1-x)\,dx + \int_{-c}^{c} 1\,dx$$

$$= \frac{xe^{2x}}{2}\Big|_{-c}^{c} - \frac{1}{2}\int_{-c}^{c} e^{2x}\,dx + x\ln(1-x)\Big|_{-c}^{c} + \int_{-c}^{c}\frac{x}{1-x}\,dx + 2c$$

$$= \frac{1}{2}\left(ce^{2c} + ce^{-2c} - \frac{1}{2}\left(e^{2c} - e^{-2c}\right)\right) + c\left(\ln(1-c) + \ln(1+c)\right) + 2c$$

$$\int_{-c}^{c} \frac{x}{1-x}\,dx = \int_{-c}^{c} \frac{x-1+1}{1-x}\,dx = -x\Big|_{-c}^{c} + \int_{-c}^{c} \frac{1}{1-x}\,dx$$

$$= -2c - \ln(1-x)\Big|_{-c}^{c} = -2c - \big(\ln(1-c) - \ln(1+c)\big)$$

Donc

$$I_f = \frac{1}{4}\Big((2c-1)e^{2c} + (2c+1)e^{-2c}\Big)$$

$$+ (c-1)\ln(1-c) + (c+1)\ln(1+c)$$

c'~~est~~-à-dire $\quad \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(e^{1/2} - e^{-1/2}\right) \; 0{,}6 \qquad -0{,}13027$

$$I_f = \frac{1}{4}(2c-1)\left(e^{2c} - e^{-2c}\right)$$

$$+ (c-1)\ln(1-c) + (c+1)\ln(1+c)$$

$$-\frac{3}{4}\ln\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{5}{4}\ln\frac{5}{4}$$

Numériquement :

si $c = \frac{1}{2}$: $\quad I_g \cong 1{,}1250$, $\quad I_f \cong 0{,}9547$

si $c = \frac{1}{4}$ = $\quad I_g \cong 0{,}5156$, $\quad I_f \cong 0{,}3619$

donc pour $c = \frac{1}{2}$, $\quad |I_f - I_g| \cong 0{,}1703$

et pour $c = \frac{1}{4}$, $\quad |I_f - I_g| \cong 0{,}1537$

L'approximation de f par la parabole g dans un voisinage de $x=0$ est de plus en plus precise ~~en~~ s'approchant de 0. ~~[illegible]~~ Donc, l'écart $|I_f - I_g|$ se réduit en considerant un intervalle plus petit $(c = \frac{1}{4})$ autour de l'origine.

3) f dérivable (donc continue) sur $[-3,3]$

(i) telle que $f(-3)=6$, $f(3)=-1$ et $-2 \le f' \le 1$.

On s'appuit sur l'inégalité des accroissements finis pour répondre à la question.

Soit $[-3,3] = [-3,x] \cup [x,3]$

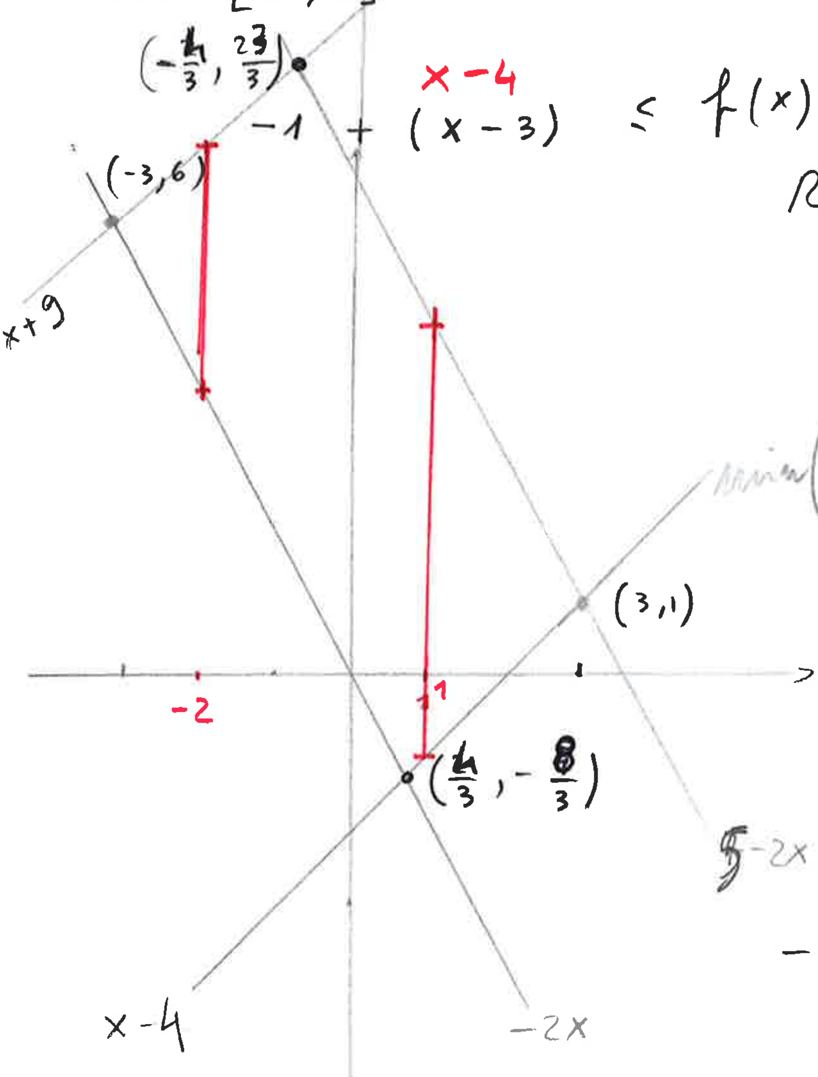
x joue le rôle de b ; x joue le rôle de a

Sur $[-3,x]$

$$\underbrace{6-2(x+3)}_{-2x} \le f(x) \le \underbrace{6+(x+3)}_{x+9}$$

Sur $[x,3]$

$$\overbrace{-1+(x-3)}^{x-4} \le f(x) \le \overbrace{-1-2(x-3)}^{5-2x}$$



Réponse aux questions :

$4 \le f(-2) \le 7$

$-2 \le f(1) \le \cancel{8}\ 10$

$\min\begin{pmatrix} x+9 \\ 7-2x \end{pmatrix}_6 \le \max f \le \frac{23}{3}$

$-\frac{8}{3} \le \min f \le \max\begin{pmatrix} -2x \\ x-2 \end{pmatrix}_{-1}$

$-\frac{8}{3} \le f \le \frac{23}{3}$

et pour l'intégrale

$-\frac{8}{3} \cdot 6 \le I \le \frac{23}{3} \cdot 6$

d'où

$-16 \le I \le 46$.

3) (ii) $f : x \longmapsto 7x - \sin(2\pi x)$

$f' : x \longmapsto 7 - 2\pi \cos(2\pi x)$

sur $\mathbb{R}$ on a $-1 \leq \cos(2\pi x) \leq 1$

d'où $7 - 2\pi \leq f' \leq 7 + 2\pi$ donc $|f'| \leq 7 + 2\pi < 20$

Pour x dans un voisinage de 1 on a

$$|f(x) - f(1)| \leq (7 + 2\pi)|x - 1|$$

Donc on cherche x dans un voisinage de 1 tel que

$$20\,|x-1| \leq 0.1$$

$$|x - 1| \leq 0.005$$

d'où $0,995 \leq x \leq 1,005$.

5) (i) Rolle

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fc continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il $\exists\, c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

(ii) T.A.F

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fc continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors, il $\exists\, c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

<u>Preuve</u> : La fc $g : x \longmapsto f(x) - r x$ avec $r = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ vérifie les Hps du Thm de Rolle.

Donc, il $\exists\, c \in]a,b[$ tq $g'(c) = 0$, c'est-à-dire $g'(c) = f'(c) - r = 0$ d'où $f'(c) = r$.

4) $f(x) = \sqrt{|x-2|(x-1)}$

(i) $Df = [1, +\infty[$

(ii) $\partial Df = \{1, +\infty\}$ bord du domaine Df

$f(1) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

(iii) f est continue sur Df

f n'est pas dérivable en $x = 2$

(à cause de la valeur absolue et de la $\sqrt{\ }$) et en $x = 1$ (à cause de la $\sqrt{\ }$)

$Df' =]1, 2[\cup]2, +\infty[$.

Si $1 < x < 2$, $f(x) = \sqrt{(2-x)(x-1)}$ $\quad -2 - x^2 + 3x$

d'où $f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(2-x)(x-1)}} (-2x+3)$

Si $x > 2$, $f(x) = \sqrt{(x-2)(x-1)}$

d'où $f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(x-2)(x-1)}} (2x-3)$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty$ (en $x=1$ f a tg verticale) $x=2$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 1$ (on va vérifier la présence d'une asymptote oblique)

pour le Thm de l'Hopital

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) \underset{\text{si}}{=}$ fini

(iv)

x		1		$3/2$		2	
signe de f'		|	$+$	0	$-$	|	$+$
croissance de de f		|	$\nearrow$		$\searrow$	|	$\nearrow$

$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ donc f en $x = \frac{3}{2}$ a un max relatif et $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$

(v) La fonction f ne presente pas des asymptotes verticaux ou horiz. Verifions juste l'asymptote oblique pour $x \to +\infty$.

$y = mx + q$ avec $m = 1$ (voir fin (iii))

$q = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$ si la limite est finie

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{(x-2)(x-1)} - x \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-2)(x-1) - x^2}{\sqrt{(x-2)(x-1)} + x} = -\frac{3}{2}$$

donc $\boxed{y = x - \frac{3}{2}}$ est asymptote oblique

(vi)