Examen d'analyse en L1 – 10 juin 2015 – U.N.S.A.

`Tout document est interdit.`

`Calculatrice, tél. portable, ordinateur, etc. sont aussi interdits !`

`Apporter le plus grand soin à la rédaction et` **justifier toute réponse** `!`

---

1. [Les suites (2.5 pt)]

   On considère la suite (u_n) définie comme suit :

   $$u_{n+1} = \sqrt{u_n - \frac{2}{9}}, \qquad n \geq 0, \qquad u_0 \geq \frac{1}{3}.$$

   Etudier le comportement de la suite (u_n) pour $n \to +\infty$ en fonction de la valeur de u_0. Faire un dessin.

---

2. [Les DLs et les intégrales (5 pt)]

   (i) Ecrire le DL à l'ordre 3 pour la fonction $f : x \mapsto x\ln(1-x) + e^{x^2} - 1$ dans un voisinage de $x = 0$.

   (ii) En s'appuyant sur des DLs, déterminer l'équation de l'asymtote oblique de la fonction $f : x \to xe^{\frac{1}{1-x}}$ pour $x \to +\infty$.

---

3. [Les encadrements (3.5 pt)]

   On sait qu'on peut écrire $[a,b] = [a,x] \cup [x,b]$ et que pour une fonction f continue derivable sur $[a,b]$ avec derivée bornée $m \leq f' \leq M$ on a

   $$\begin{aligned} f(a) + m(x-a) \leq f(x) \leq f(a) + M(x-a) &\qquad x \geq a, \\ f(b) - M(b-x) \leq f(x) \leq f(b) - m(b-x) &\qquad x \leq b. \end{aligned}$$

   (i) On donne une fonction f dérivable définie sur l'intervalle $[1,7]$ telle que

   $$f(1) = 2, \qquad f(7) = 3, \qquad -1 \leq f' \leq 3.$$

   Quel encadrement peut-on en déduire pour

   $$f(2), \qquad f(4), \qquad \max f, \qquad \min f, \qquad f, \qquad I = \int_2^4 f(x)dx \ ?$$

   Faire un dessin.

   (ii) On pose $f : x \mapsto 3x + \cos(\pi x)$. Encadrer f' et en déduire un intervalle autour de 3 dans lequel la fonction f reste comprise entre 7.98 et 8.02. La qualité de l'intervalle n'a pas d'importance.

4. [Le graphe de fonction (5 pt)]

On considère une fonction réelle de variable réelle x :

$$f(x) = x\left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right).$$

(i) Déterminer le domaine D de définition de f.

(ii) Calculer les limites de f à la frontière de D.

(iii) Déterminer le domaine de définition de la fonction f' (indiquer les éventuels points où la fonction f n'est pas dérivable). Donner l'expression de f'.

(iv) Etudier la croissance et décroissance de f.

(v) Déterminer les éventuelles asymptotes verticales, horizontales, ou obliques.

(vi) Tracer le graphe de la fonction f dans le plan cartesien en accord avec les résultats obtenus dans les questions (i)-(v).

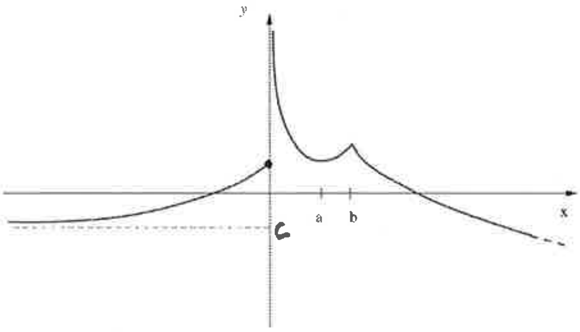
---

5. [Des questions de cours (4pt)]

(i) Enoncer le théorème des accroissements finis pour f sur $[a, b]$.; Voir cours

(ii) En appliquant le théorème des accroissements finis sur $[a, b]$, montrer que pour f derivable sur $]a, b[$ on a : f est croissante sur $]a, b[$ si et seulement si $f'(x) \geq 0$, pour $x \in]a, b[$. Voir le cours

On considère une fonction f dont le graphe est donné ci dessous.



(iii) Donner le domaine D de définition de f;

(iv) Déterminer le domaine où la fonction est continue et indiquer les éventuels points de discontinuité ;

(v) Déterminer le domaine où la fonction est derivable et indiquer les éventuels points de non derivabilité ;

(vi) Dire si la fonction admet des asymptotes et de quel type.

(iii) $D = \mathbb{R}$

(IV) f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. En $x = 0$ elle présente une discontinuité de 2ème espèce.

(V) f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\} \setminus \{b\}$. Les points de non dérivabilité sont $x = 0$ (f n'y est pas continue) et $x = b$ (car $f'_-(b) > 0$ et $f'_+(b) < 0$).

(vi) $y = c$ asympt. horiz. et $x = 0$ asympt. vertic.

1) La suite (u_n) est du type récurrente d'ordre 1 non-linéaire, de la famille des suites

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) & n \geq 0 \\ u_0 \text{ donné.} \end{cases} \quad \text{avec } f : x \longmapsto \sqrt{x - \frac{2}{9}}$$

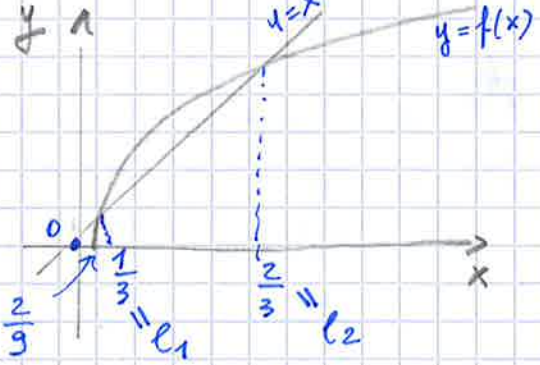
$D_f = [\frac{2}{9}, +\infty[$; or $u_0 \in [\frac{1}{3}, +\infty[$ donc $u_0 \in D_f$.

La théorie nous dit que étant f continue sur D_f, si la suite (u_n) converge pour $n \to +\infty$, alors sa valeur limite ℓ est un point fixe de f (c'est-à-dire, $\ell = f(\ell)$). On cherche donc les eventuels points fixes de f dans $[\frac{1}{3}, +\infty[$.

$$\ell = \sqrt{\ell - \frac{2}{9}} \; ; \; \ell^2 = \ell - \frac{2}{9} \; ; \; \ell^2 - \ell + \frac{2}{9} = 0$$

$$\ell_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{8}{9}}}{2} = \begin{cases} (1 + \frac{1}{3})/2 = \frac{2}{3} = \ell_1 \\ \frac{(1 - \frac{1}{3})}{2} = \frac{1}{3} = \ell_2 \end{cases}$$

Donc si (u_n) converge pour $n \to +\infty$ alors la valeur limite est ℓ_1 ou ℓ_2 en fonction du choix de u_0.



Si $u_0 = \frac{1}{3}$ alors $u_n = \frac{1}{3}$ $\forall n$. La suite (u_n) converge à $\frac{1}{3} = \ell_1$ pour $n \to +\infty$.

Si $\frac{1}{3} < u_0 < \frac{2}{3}$ la suite u_n est croissante (en fait le graphe de $f(x)$ est plus haut que le graphe de x)

Pour $\frac{1}{3} < u_0 < \frac{2}{3}$ on a $u_n < \underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}}$ $\forall n$

Alors la suite (u_n) est $\nearrow$ bornée par ℓ_2 donc elle converge à ℓ_2 pour $n \to +\infty$.

Pour $u_0 = \frac{2}{3}$ la suite $u_n = \frac{2}{3}$ $\forall n$ donc elle converge à ℓ_2 pour $n \to +\infty$.

Pour $u_0 > \frac{2}{3}$, la suite est $\searrow$ (en fait le graphe de $f(x)$ est plus bas que le graphe de x). Donc pour $u_0 > \frac{2}{3}$, $u_n > \underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}}$ $\forall n$. Alors la suite (u_n) est $\searrow$ bornée par ℓ_2 donc elle converge à ℓ_2 pour $n \to +\infty$

2)

DL à l'ordre 3 en 0 pour $x\ln(1-x)$

(i) s'obtient en faisant x (DL à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$)

$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ DL à l'ordre 2 en 0

$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ obtenu à partir du DL à l'ordre 2 de e^t et en remplaçant $t = x^2$.

$$f(x) = x\left(-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + \cancel{1} + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) - \cancel{1}$$

$$f(x) = \cancel{-x^2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) + \cancel{x^2} + \underbrace{\frac{x^4}{2} + o(x^4)}_{\text{ordre supérieure}}$$

Donc le DL à l'ordre 3 de f en $x_0 = 0$ est

$$f(x) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

(ii) l'asympt. oblique a éq $y = mx + q$

avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = q$

On utilise le DL de e^t à l'ordre 1 en 0 et on remplace $t = \frac{1}{1-x}$ (en fait pour $x \to +\infty$ on a $t \to 0$)

$$(*) \quad e^{\frac{1}{1-x}} = 1 + \frac{1}{1-x} + o\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

On calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x e^{\frac{1}{1-x}}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{1-x}} = \underbrace{1}_{m}$

puis

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x e^{\frac{1}{1-x}} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{1-x}} - 1\right)$$

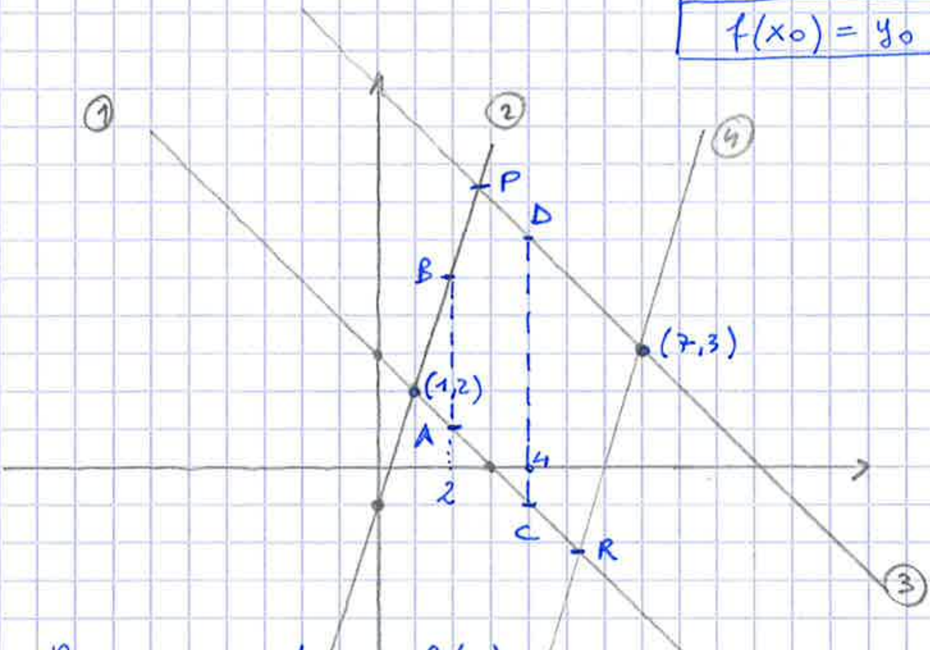
$$\overset{\text{DL } (*)}{=} \lim_{x \to +\infty} x\left(\cancel{1} + \frac{1}{1-x} + o\left(\frac{1}{1-x}\right) \cancel{-1}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{1-x} + o\left(\frac{1}{1-x}\right)\right) = \underbrace{-1}_{q}$$

L'éq de l'asympt. oblique est $\boxed{y = x - 1}$

3)

	Eq de la droite $y = y_0 + p(x - x_0)$	passant par (x_0, y_0)	de pente p (= M ou m)
①	$y = 2 - (x-1)$	$(1, 2)$	-1
②	$y = 2 + 3(x-1)$	$(1, 2)$	3
③	$y = 3 - (x-7)$	$(7, 3)$	-1
④	$y = 3 + 3(x-7)$	$(7, 3)$	3
		$\boxed{f(x_0) = y_0}$	$\boxed{m \leq f' \leq M}$



Pour encadrer $f(2)$ on calcule les coordonnées des points A, B

On pose $x = 2$ dans ① $y_A = 1$

et dans ②, $y_B = 5$

Donc

$$1 \leq f(2) \leq 5$$

Pour encadrer $f(4)$ on calcule les coordonnées des points C et D. On pose $x = 4$ dans ①, $y_C = -1$ et dans ③, $y_D = 6$. Donc

$$-1 \leq f(4) \leq 6$$

Pour le max f on doit calculer les coordonnées de P $(③ \cap ②)$: $3 - x + 7 = 2 + 3x - 3$

donc $4x = 11$; $x_P = \frac{11}{4}$; $y_P = \frac{29}{4}$

On a l'encadrement

$$\underbrace{3}_{\max(f(a),f(b))} \leq \max f \leq \frac{29}{4}$$

Pour le min f on doit calculer les coordonnées de R $(④ \cap ①)$: $3 + 3x - 21 = 2 - x + 1$

donc $4x = 21$; $x_R = \frac{21}{4}$; $y_R = -\frac{9}{4}$

On a l'encadrement

$$-\frac{9}{4} \leq \min f \leq \underbrace{2}_{\min(f(a),f(b))}$$

Pour f on a l'encadrement

$$-\frac{9}{4} \leq f \leq \frac{29}{4}$$

Pour encadrer I on utilise l'encadrement de f

$$\int_2^4 \left(-\frac{9}{4}\right) dx \leq \int_2^4 f(x)\,dx \leq \int_2^4 \frac{29}{4}\,dx$$

d'où

$$-\frac{9}{4}\cdot(4-2) \leq I \leq \frac{29}{4}\cdot(4-2)$$

(ii)

$f : x \longmapsto 3x + \cos(\pi x)$

$f' : x \longmapsto 3 - \pi \sin(\pi x)$

d'où $\quad 3 - \pi \leq f' \leq 3 + \pi$

qu'on exagère en $\quad |f'| \leq 3 + \pi$

Dire que la valeur de f reste compris entre $7{,}98$ et $8{,}02$ signifie demander que $|f - 8| \leq \underbrace{0{,}02}_{\varepsilon}$

On utilise le TAF :

$$|f - 8| = |f'_{(c)}|\,|x - 3| \leq 0{,}02$$

donc $\quad |x - 3| \leq \dfrac{0{,}02}{(3+\pi)} \qquad 3 + \pi \approx 6$

donc $\quad -\dfrac{0{,}02}{(3+\pi)} \leq x - 3 \leq \dfrac{0{,}02}{(3+\pi)}$

4) $f : x \longmapsto x\left(1 + \dfrac{1}{\ln x}\right)$

(i) Pour le D_f : $\ln x$ défini pour $x > 0$

et $\dfrac{1}{\ln x}$ défini pour $\ln x \neq 0$

donc $x \neq 1$

On a alors que $D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

(ii) La frontière de $D_f = \{0, 1, +\infty\}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f = 0$ (le facteur x l'importe sur $\ln x$)

$\lim\limits_{x \to 1^-} f = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f = \infty$

(iii) la fonction f est dérivable sur D_f étant composée de fc dérivables.

$$f' : x \longmapsto \left(1 + \frac{1}{\ln x}\right) + x\left(-\frac{1}{x(\ln x)^2}\right)$$

donc $f' : x \longmapsto 1 + \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{(\ln x)^2}$

(iv) Pour étudier la croissance de f on étudie le signe de f' :

$$1 + \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln x^2} = \frac{(\ln x)^2 + \ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

on pose $t = \ln x$: $t^2 + t - 1 > 0$

$(\ln x)^2 > 0 \ \forall x \in D_f$ pour $t < t_1$ et $t > t_2$

avec $t_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} = t_1 \\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = t_2 \end{cases}$

donc $f' > 0$ $x < e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$ et $x > e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

		0		$e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$		1		$e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$	
f'		|	$+$	|	$-$	|	$-$	|	$+$
f		|	↗	|	↘	|	↘	|	↗

(v) En calculant les limites

on a que $x = 1$ est asymptote verticale

On vérifie la présence d'un asymptote oblique d'éq $y = mx + q$ car $\lim_{x \to +\infty} f = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = m$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\cancel{1} + \frac{1}{\ln x} - \cancel{1}\right) = +\infty$$

donc il n'y a pas d'asymptote oblique (car q n'est pas un nombre fini)

(vi)