

THÈSE de DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Specialité:

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

présentée par Mademoiselle

Francesca RAPETTI

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Sujet de la Thèse:

**APPROXIMATION DES ÉQUATIONS DE LA MAGNÉTODYNAMIQUE
EN DOMAINE TOURNANT
PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS AVEC JOINTS**

Soutenue le 29 Mai 2000

Devant le jury composé de:	Madame	Christine	Bernardi	
	Monsieur	Alain	Bossavit	(rapporteur)
	Monsieur	Frédéric	Bouillault	
	Monsieur	Stefan	Bouissou	
	Monsieur	Yvon	Maday	(directeur)
	Monsieur	Yves	Maréchal	
	Monsieur	Jacques	Rappaz	(rapporteur)
	Monsieur	Adel	Razek	

A Eros

A Federica

A Flavio e Annita

Résumé

Le travail présenté dans cette Thèse concerne l'étude mathématique et la mise en œuvre d'une méthode numérique pour la simulation de la distribution des courants de Foucault dans des systèmes électromagnétiques mobiles. Le point de départ de cette modélisation est le système des équations de Maxwell et leur formulation pour des problèmes en magnétodynamique. Dans le cadre d'une approche du type décomposition de domaine pour le traitement de domaines avec une partie fixe et une partie mobile, nous proposons une méthode de discrétisation (spatiale) non-conforme basée sur la méthode des éléments avec joints combinée avec les éléments finis du complexe de Whitney. Cette méthode nous permet de traiter aisément des maillages non-conformes à l'interface entre partie fixe et partie mobile. Il n'est donc pas nécessaire d'imposer des contraintes entre la vitesse et les paramètres de discrétisation spatiale. Les conditions de transmission à l'interface portant sur les champs physiques (ou sur une des leur composantes) sont imposées de façon faible à l'aide de multiplicateurs de Lagrange adaptés. La discrétisation temporelle est réalisée de façon classique par l'application d'un schéma implicite basé sur la méthode des différences finies. Le système algébrique final à résoudre fait intervenir une matrice symétrique, définie positive et bien conditionnée, inversée généralement par la méthode du Gradient Conjugué. La méthode analysée dans cette Thèse a été appliquée avec succès à l'étude des problèmes suivants: un problème magnétodynamique scalaire en deux dimensions, couplé et non couplé avec son aspect mécanique; un problème magnétodynamique vectoriel en deux dimensions; un problème magnétostatique vectoriel en trois dimensions. Nous avons aussi proposé un premier algorithme préconditionné du type FETI pour la résolution parallèle du problème magnétodynamique vectoriel en deux dimensions.

Summary

The work presented in this Thesis concerns the mathematical study and the implementation of a numerical method to simulate the distribution of Foucault's currents in moving electromagnetic devices. The starting point of this study is the system of Maxwell's equations and their formulation for magnetodynamic problems. Within the domain decomposition framework, adapted to deal with geometries composed of a fixed and a moving part, we propose a (spatial) non-conforming discretization technique based on the mortar element method coupled with finite elements belonging to the Whitney's complex. This method allows to deal easily with meshes that do not match at the interface between the fixed and the moving part. The movement speed and the spatial discretization parameters are independent one of the others. The transmission conditions, to restore the continuity of the fields (or of one of their components) across the sliding interface, are weakly imposed by means of a suitable space of Lagrange multipliers. The discretization in time is done in a classical way by applying an implicit finite difference scheme. The final algebraic system has a symmetric, positive definite and well-conditioned matrix and is solved by the Conjugate Gradient procedure. The method analysed in this Thesis, has been successfully applied to solve the following problems: a scalar magnetodynamic problem in two dimensions, coupled and uncoupled with its mechanical aspect; a vector magnetodynamic problem in two dimensions; a vector magnetostatic problem in three dimensions. We have also proposed a first preconditioned algorithm of FETI type for the parallel solution of the two-dimensional vector magnetodynamic problem.

Sommaire

Résumé	5
Summary	7
Liste des Figures	13
1 Introduction	15
2 Le modèle	19
2.1 Equations de Maxwell	19
2.1.1 Forme intégrale	22
2.1.2 Conditions de transmission	23
2.1.3 Lemme de Poincaré: un rappel	24
2.2 Formulations magnétostatiques	25
2.2.1 En potentiel scalaire	26
2.2.2 En potentiel vecteur	29
2.3 Formulations magnétodynamiques	33
2.3.1 En champ magnétique	34
2.3.2 En champ électrique	36
2.3.3 En potentiel vecteur électrique	37
2.3.4 En potentiel vecteur magnétique	38
2.3.5 En potentiel vecteur magnétique modifié	39
3 Les éléments de Whitney	41
3.1 Outils de base	43
3.2 Formes différentielles en électromagnétisme	53
3.3 Complexe de Whitney	56
4 Méthodes classiques pour la prise en compte du mouvement	69
4.1 Description du repère	70

4.1.1	Formulation eulerienne	72
4.1.2	Formulation lagrangienne	73
4.2	Remaillage	74
4.3	Macro-élément	74
4.4	Eléments de frontière	75
4.5	Technique du “lock-step”	75
4.6	Technique de “overlapping”	76
4.7	Connexion par interpolation	76
4.8	Multiplicateurs de Lagrange	77
4.9	Vers la méthode des joints	78
5	La méthode des joints	79
5.1	Considérations préliminaires	81
5.2	Décomposition du domaine	84
5.3	Espaces fonctionnels	85
5.3.1	Définition de M_h dans le cas scalaire pour $d = 2$	88
5.3.2	Définition de M_h dans le cas scalaire pour $d = 3$	88
5.3.3	Définition de M_h dans le cas vectoriel pour $d = 2$	89
5.3.4	Définition de M_h dans le cas vectoriel pour $d = 3$	90
5.4	Le problème discret	93
5.4.1	Estimation d’erreur quand $X \subset H^1(\Omega)$	95
5.4.2	Estimation d’erreur quand $X \subset H(\text{rot}, \Omega)$ avec $d = 2$	96
5.4.3	Estimation d’erreur quand $X \subset H(\text{rot}, \Omega)$ avec $d = 3$	97
5.5	En présence du mouvement	98
6	Applications de la méthode à éléments finis nodaux avec joints	101
6.1	<i>Article 1</i> – A sliding mesh-mortar method for a two dimensional eddy currents model of electric engines	102
6.2	<i>Article 2</i> – Calculation of eddy currents in moving structures using a finite element method on non-matching grids	143
6.3	Modélisation d’un système couplé magnéto-mécanique	163
6.3.1	Calcul de forces électromagnétiques	163
6.3.2	Modélisation des phénomènes couplés magnéto-mécanique	164
6.3.3	<i>Article 3</i> – Simulation of a magneto-mechanical damping machine: analysis, discretization and results	169

7	Applications de la méthode à éléments finis d'arêtes avec joints	195
7.1	<i>Article 4</i> – The mortar edge element method on non-matching grids for eddy current calculations in moving structures	196
7.2	<i>Article 5</i> – The Mortar Element Method for 3D Maxwell's equations: analysis and application to magnetodynamics	220
7.3	<i>Article 6</i> – The mortar edge element method in three dimensions: application to magnetostatics	233
8	Vers le parallélisme	265
8.1	Introduction	267
8.2	Deux sous-domaines: formulation avec multiplicateurs de Lagrange	268
8.3	Discrétisation de la formulation avec multiplicateurs de Lagrange	269
8.4	Deux méthodes pour la résolution du problème discret	270
8.4.1	La méthode primale ou du complément de Schur	271
8.4.2	La méthode duale	272
8.5	La méthode FETI	272
8.6	Deux ingrédients fondamentaux pour FETI plus MORTAR sur maillages non-conformes	273
8.7	<i>Article 7</i> – A FETI preconditioner for two dimensional edge element approximations of Maxwell's equations on non-matching grids	280
9	Conclusions et perspectives	297
	Annexe	301
A.1	Structure d'un logiciel à éléments finis	301
A.2	Structure d'un logiciel à éléments finis avec joints	306
A.2.1	Sans couplage magnéto-mécanique	306
A.2.2	Avec couplage magnéto-mécanique	308
	Bibliographie	311

Liste des figures

2.1	Surface Γ , son vecteur \mathbf{n} normale et vecteur $\boldsymbol{\tau}$ tangent à son contour γ . Volume Ω de frontière Γ et normale unitaire sortante \mathbf{n} .	22
2.2	Surface Γ entre deux milieux Ω_1 et Ω_2 .	23
2.3	Problème magnétostatique.	26
2.4	Domaine d'étude contenant un conducteur C de forme toroïdale.	27
2.5	Problème de courants induits.	34
3.1	Diagramme de Tonti.	54
3.2	Diagramme de Tonti pour le problème des courants induits.	55
3.3	Exemple de 3-simplexe (a), de 2-simplexe (b) et définition des quantités ρ_K et h_K pour un 2-simplexe.	57
3.4	Exemple de triangulation admissible (a) et non admissible (b) dans un carré.	58
3.5	Simplexes de dimension 0 (nœud), 1 (arête), 2 (facette) et 3 (volume).	58
4.1	Ligne caractéristique associée au vecteur \mathbf{v} et passant par le point (\mathbf{x}, s) (a); système d'étude dans lequel les parties stator et rotor sont séparées par une interface de glissement Γ cylindrique (b).	71
4.2	Exemple 1D du mouvement de déformation (I) ou rigide (II) de maillage et des particules matérielles en formulation lagrangienne (a) et eulerienne (b).	72
5.1	Illustration de trois situations que l'on peut traiter avec la méthode des joints.	80
5.2	Exemples de décomposition géométriquement conforme (a) et non-conforme (b) d'un domaine rectangulaire $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.	82
5.3	Exemples d'une représentation acceptable (a) et non acceptable (b) du squelette S comme union disjointe des côtes des sous-domaines. Les lignes de la figure (a) en trait noir foncé sont les joints.	85
5.4	Transformation de $\hat{K} \cup \hat{K}'$ dans $K \cup K'$.	91
6.1	Processus de couplage indirect.	109

Chapitre 1

Introduction

La simulation numérique en électromagnétisme porte sur l'approximation des équations de Maxwell dans des domaines bornés et non bornés. Ces dernières années c'est devenu un objet de recherche très important en analyse numérique. Parmi les applications on trouve l'étude de la propagation des signaux émis par des antennes, de la diffusion des ondes par des objets de forme compliquée ("scattering"), l'analyse des systèmes optiques et le calcul des courants de Foucault, induits dans des matériaux conducteurs. Dans cette Thèse on s'intéressera à la modélisation des courants induits dans des systèmes bidimensionnels et tridimensionnels en mouvement.

Les courants de Foucault se développent dans les milieux conducteurs soumis à des inductions magnétiques variables au cours du temps. Les effets peuvent en être bénéfiques ou néfastes.

Dans le cas où des courants de Foucault sont créés dans les circuits magnétiques des machines, des transformateurs, etc., ils sont à l'origine de pertes: il en résulte des échauffements qui peuvent imposer des limites sévères aux conditions de fonctionnement du système. Dans un dispositif, un échauffement du circuit magnétique entraîne un échauffement supplémentaire des conducteurs des bobinages qui lui sont juxtaposés, ce qui augmente encore les pertes par effet Joule. En outre, l'échauffement limite la durée de vie des isolants, ainsi que la résistance mécanique du système, et à partir d'un certain niveau de pertes volumiques, le système ne sera fiable qu'au prix de dispositifs de refroidissement complexes et coûteux.

Il n'est pas toujours nécessaire de combattre les effets dûs aux courants de Foucault: dans certaines configurations, ils peuvent être utilisés pour produire des forces ou de la chaleur. Nous pouvons citer le moteur à induction, dans lequel des courants sont induits dans un rail pour produire une force propulsive. Les forces dues aux courants peuvent être utilisées pour la lévitation magnétique. Enfin, la chaleur produite par les courants de Foucault peut servir au chauffage par induction. L'étude de ces systèmes

demande également une très bonne détermination des courants induits, qui constituent le phénomène physique principal grâce auquel le dispositif fonctionne.

Vu la complexité des structures des systèmes électromagnétiques réels, il est difficile d'obtenir une expression analytique des courants de Foucault. La seule solution, pour avoir une idée des courants induits, était, jusqu'à il y a quelques décennies, d'extrapoler à des structures réelles des résultats obtenus sur des structures simples, mais l'expérience montre que la prédétermination des pertes conduit à des écarts très variables par rapport à la réalité. L'évolution des moyens informatiques permet d'utiliser l'ordinateur pour résoudre de tels problèmes: les programmes qui ont été élaborés sont basés sur une représentation de plus en plus proche des phénomènes réels, mais il existe cependant encore certaines difficultés de modélisation. Par exemple, l'emploi de modèles tridimensionnels en magnétodynamique est encore coûteux. De plus, les courants de Foucault peuvent prendre naissance dans des systèmes électromagnétiques mobiles (freins à courants de Foucault, machines électriques), alors que certaines techniques numériques permettent difficilement de prendre en compte le mouvement.

Le but du travail que nous allons présenter dans cette Thèse est l'étude mathématique et la mise en œuvre d'une méthode numérique pour la modélisation des courants de Foucault dans des systèmes électromagnétiques mobiles. Les ingrédients principaux de la modélisation proposée ici sont :

- les équations de Maxwell et leur formulation pour des problèmes magnétodynamiques;
- une méthode de décomposition de domaine, la méthode des joints, pour le traitement de domaines avec parties fixes et parties mobiles;
- une méthode de discrétisation spatiale, la méthode des éléments finis, et temporelle, la méthode des différences finies, pour l'approximation du problème en considération dans les divers sous-domaines.

Les bases de la modélisation des courants induits sont présentées dans le *Chapitre 2*. Le modèle de départ est celui des équations de Maxwell, qui régit l'ensemble des phénomènes électromagnétiques classiques. Les hypothèses de travail (champ électrique à basses fréquences dans des milieux conducteurs) permettent d'en extraire un modèle dynamique qui constitue le problème magnétodynamique. Sa solution permet de déterminer l'évolution temporelle des champs électromagnétiques dans l'espace et, en particulier, celle de courants induits dans les matériaux conducteurs en présence des certaines sources. Le régime statique correspondant est également considéré et constitue le problème de la magnétostatique.

Nous commençons par étudier diverses formulations du problème magnétostatique, toutes équivalentes au modèle de départ mais qui se distinguent par l'utilisation de potentiels, scalaires ou vecteurs. Ensuite, nous étudions le problème magnétodynamique

et diverses formulations sont encore établies: certaines sont basées sur l'utilisation des potentiels scalaires et vecteurs, d'autres sont directement exprimées en termes de champs physiques.

La seconde partie, contenu du *Chapitre 3*, vise à une discrétisation de la structure mathématique continue. Un ensemble d'outils permettant la discrétisation des espaces fonctionnels définis, et donc des champs et potentiels scalaires et vecteurs, est présentée en détail. Cette partie décrit la méthode des éléments finis: y sont développés des éléments finis spéciaux, nodaux, d'arêtes, de facette et de volume, formant le complexe de Whitney. Ces éléments sont une généralisation des éléments finis classiques, nodaux, et diffèrent les uns des autres par les entités géométriques auxquelles sont associées les inconnues. Les fonctions de base des espaces d'approximation relatifs à ces éléments finis sont définies et leurs propriétés sont établies.

C'est dans les *Chapitres 4* et *5* que nous commençons par entrer dans le vif du sujet. La modélisation des courants induits dans des structures comprenant une partie fixe et une partie mobile nécessite une reformulation des équations du problème qui dépend du repère choisi pour la description des phénomènes physiques. Au début du *Chapitre 4* nous remarquons que le choix d'une formulation eulérienne plutôt que lagrangienne des équations se traduit par la présence d'un terme de convection dans ces équations. Le problème perd alors son caractère symétrique, ce qui n'est pas le cas dans une formulation lagrangienne. De plus, les équations de Maxwell sont naturellement formulées en variables lagrangiennes.

Cependant, travailler en variables lagrangiennes peut porter à traiter des discrétisations spatiales non-conformes aux interfaces glissantes. Les méthodes développées depuis les années 80 pour le raccordement des discrétisations non-conformes aux interfaces entre sous-domaines adjacents (rappelées dans le *Chapitre 4*), apparaissent avoir des inconvénients soit d'optimalité du point de vue mathématique, soit de mise en œuvre du point de vue numérique.

La méthode des joints, présentée dans le *Chapitre 5*, est une méthode de discrétisation bien adaptée pour une approche du type "décomposition de domaine". Elle a été conçue pour coupler méthodes variationnelles différentes dans les différents sous-domaines mais depuis sa formulation, qui remonte aux alentours de 1985 avec les premières publications en 1990, elle a été appliquée dans différents domaines de recherche. Le choix d'utiliser cette méthode dans le cadre des problèmes magnétodynamiques a deux motivations: l'application de la méthode des joints aux équations de Maxwell est très récente et beaucoup reste encore à faire; elle permet de traiter aisément des maillages non conformes aux interfaces entre sous-domaines et l'imposition des conditions de transmission aux interfaces est moins contraignante puisque elle n'est pas réalisée de façon ponctuelle mais sous forme faible, à l'aide d'un espace de multiplicateurs de Lagrange. La clé de la méthode est le choix d'un bon espace de multiplicateurs qui assure l'optimalité de la

méthode et la stabilité de la solution du problème discret.

Les *Chapitre 6, 7, 8* sont consacrés aux applications et aux résultats numériques obtenus à l'aide des logiciels de calcul développés: *ils constituent le cœur de cette Thèse*. Ces Chapitres contiennent les articles principaux relatifs au sujet de la Thèse, que l'auteur, en collaboration avec d'autres chercheurs, a soit publiés soit soumis soit préparés. Chaque article est structuré de la même façon: une première partie qui présente la formulation du problème qu'on veut étudier, une deuxième partie qui décrit la discrétisation du problème considéré et les détails plus significatifs de la mise en œuvre de la méthode utilisée, une dernière partie qui analyse les résultats obtenus. Ces articles, tous écrits en anglais, sont introduits par quelques lignes qui précisent le sujet de l'article et dans certains cas, le cadre de la recherche. Nous soulignons que, sauf pour les Articles 5 et 6, les résultats présentés concernent des applications en deux dimensions. A ce propos, nous remarquons que dans un grand nombre de systèmes réels, il existe une direction privilégiée l'établissement des champs et des courants: une étude faite avec un modèle bidimensionnel permet alors d'obtenir les différentes grandeurs avec une précision suffisante pour l'utilisation que l'on veut en faire. Dans certains cas, nous avons comparé les résultats numériques obtenus avec les solutions "analytiques" correspondantes (exactes ou bien calculées pour des valeurs "assez" petits des paramètres de discrétisation spatiale et temporelle) et une analyse de la précision de la méthode a pu être effectuée. La comparaison avec des résultats expérimentaux est en cours.

Le travail accompli dans cette Thèse a été financé par la Communauté Européenne à travers le contrat TMR ERB4001GT965424. En outre, il a été à la base d'une réelle collaboration entre deux laboratoires du CNRS, le laboratoire ASCI (Applications Scientifiques du Calcul Intensif) et le LGEP (Laboratoire de Génie Electrique de Paris), et du Dipartimento di Matematica de l'Università di Pavia.

Chapitre 2

Le modèle

Les équations de base à résoudre, pour la modélisation des phénomènes électromagnétiques, sont les équations de Maxwell. Nous débuterons par un rappel de ces équations et nous en extrairons les équations qui permettent le calcul des grandeurs physiques concernées en magnétostatique et en magnétodynamique. La suite de ce chapitre va consister à exposer les différentes formulations mathématiques développées sur la base de ces équations et ce n'est que lorsque ces formulations auront été définies en détail, avec leur principales propriétés, que nous présenterons leurs discrétisations afin de les résoudre numériquement. Afin de simplifier la lecture, les opérateurs différentiels intervenant dans les diverses formulations présentées dans ce chapitre (i.e. rot , div , grad) seront définis au début du chapitre suivant. La notation ∂_t est utilisée pour indiquer l'opérateur de dérivation en temps $\frac{\partial}{\partial t}$.

2.1 Equations de Maxwell

L'ensemble des phénomènes électromagnétiques est régi par les équations de Maxwell [84, 130]. Celles-ci constituent un système d'équations aux dérivées partielles qui lient les phénomènes magnétiques aux phénomènes électriques, et qui unifient tous les principes de l'électromagnétisme. Ces équations dans les milieux continus sont les suivantes:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D}, \quad (2.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad (2.2)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (2.3)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho. \quad (2.4)$$

Dans ces équations apparaissent ρ qui représente la densité volumique de charge électrique (C/m^3) et deux types de champs de vecteurs:

- les champs d'intensité:
 \mathbf{E} est le champ électrique (V/m),
 \mathbf{H} est le champ magnétique (A/m);
- les densités de flux:
 \mathbf{D} est la densité de flux ou induction électrique (C/m²),
 \mathbf{B} est la densité de flux ou induction magnétique (Wb/m²),
 \mathbf{J} est la densité de courant de conduction (A/m²).

L'équation (2.1) est une généralisation de la loi d'Ampère, i.e. $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$, et l'équation (2.2) est appelée la loi de Faraday. Elles constituent toutes deux les équations dites de couplage électromagnétique, alors que les équations (2.3) et (2.4) constituent des équations dites de conservation. Les deux types de champs de vecteurs sont liés par les relations constitutives [130], dites lois de comportement, décrivant les caractéristiques des matériaux. Sans elles, le système (2.1-2.4) serait indéterminé. Elles sont données généralement sous les formes suivantes:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (2.7)$$

où μ est la perméabilité magnétique (H/m), ϵ est la permittivité électrique (F/m) et σ est la conductivité électrique ($\Omega^{-1}m^{-1}$). En toute généralité, μ , ϵ et σ ont un caractère tensoriel et leur valeur n'est pas constante (saturation, hystérésis, dépendance vis-à-vis de la température, fonction de la position dans l'espace, ...). Les lois de comportement (2.5-2.7) sont caractéristiques des milieux considérés et sont données par l'expérience.

La relation (2.7) est appelée loi d'Ohm locale. Nous avons $\sigma > 0$ dans les conducteurs (i.e. corps dans lesquels il-y-a une population de charges électriques libres, qui bougent sous l'action d'un champ électrique et créent ainsi une densité de courant macroscopique) et $\sigma = 0$ dans les isolants. On appelle générateurs les régions de l'espace où la densité de courant est donnée de façon indépendante du champ électromagnétique local et où, par conséquent, la relation (2.7) n'est plus valable. Il est donc convenable de supposer $\sigma = 0$ dans ces régions et d'écrire une loi d'Ohm généralisée, valable pour des générateurs, des conducteurs et des isolants:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_s. \quad (2.8)$$

L'équation (2.2) entraîne

$$0 = \text{div rot } \mathbf{E} = -\partial_t \text{div } \mathbf{B}$$

et donc $\text{div } \mathbf{B}$ est une constante en temps. Ainsi, si $\text{div } \mathbf{B}$ est nulle à l'instant initial, elle le restera à tout instant ultérieur. L'équation (2.3) n'est donc pas complètement indépendante de (2.2), mais cela uniquement en régime dynamique.

La conservation de la charge électrique s'exprime par la relation

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\partial_t \rho \quad (2.9)$$

qui est implicite dans les équations de Maxwell. En effet, les équations (2.1) et (2.4) mènent à

$$0 = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{div} \mathbf{J} + \partial_t \operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \mathbf{J} + \partial_t \rho.$$

Le terme $\partial_t \mathbf{D}$ dans l'équation (2.1) est appelé densité de courant de déplacement. Ce terme est au centre de la théorie des ondes électromagnétiques [133]. Sa présence dans l'équation (2.1) implique qu'une variation temporelle du champ électrique crée une variation spatiale du champ magnétique; l'équation (2.2) implique qu'une variation temporelle du champ magnétique crée une variation spatiale du champ électrique. Les champs électrique et magnétique sont donc intimement liés et l'on parle de "couplage électromagnétique". Il y aurait une symétrie complète entre phénomènes électriques et magnétiques si ce n'était qu'il n'existe pas de charge magnétique, ni par conséquent de courant magnétique.

Cependant, pour les applications où le champ électrique \mathbf{E} est faible ou confiné dans des structures de dimensions négligeables devant la longueur d'onde¹, le courant de déplacement est faible comparé au courant de conduction: on parle d'approximation de l'électrotechnique, ou encore d'approximation quasi-stationnaire. Mathématiquement, l'approximation qui consiste à négliger les courants de déplacement revient à remplacer un problème hyperbolique du second ordre, caractérisant les phénomènes de propagation, par un problème elliptique ou parabolique, caractérisant les phénomènes d'une nature proche des phénomènes de diffusion.

Dans l'approximation de l'électrotechnique, l'équation (2.1) se réduit à

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.10)$$

et la conservation de la charge (2.9) se réduit alors à

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (2.11)$$

Un problème couramment rencontré en électrotechnique est le problème du calcul des courants induits (par variation de champ magnétique), ou courants de Foucault, dont l'étude est l'objet de la magnétodynamique. Lorsque les phénomènes étudiés sont invariants dans le temps, les dérivées temporelles s'annulent dans les équations de Maxwell et il apparaît un découplage entre phénomènes magnétiques et électriques. L'étude des phénomènes magnétiques est l'objet de la magnétostatique et celle des phénomènes électriques est l'objet de l'électrostatique [59, 126].

¹Ceci se vérifie quand on travaille à basses fréquences f , la longueur d'onde λ définie comme $\lambda = c/f$, où c est la vitesse de propagation de la lumière dans le milieu considéré. Le concept de "basse fréquence" est *relative* au cadre dans lequel on veut l'appliquer, comme il est montré par les exemples reportés dans la Section 8.1.2 de l'ouvrage [34].

2.1.1 Forme intégrale

Soit Γ une surface de contour γ et soit \mathbf{n} la normale unitaire à Γ et orientée de façon à voir le contour γ orienté dans le sens direct.

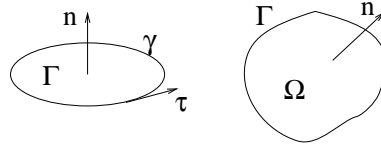


Figure 2.1: Surface Γ , son vecteur \mathbf{n} normale et vecteur $\boldsymbol{\tau}$ tangent à son contour γ . Volume Ω de frontière Γ et normale unitaire sortante \mathbf{n} .

Le *théorème de Stokes* affirme que pour tout vecteur \mathbf{v} , on a

$$\int_{\gamma} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} d\gamma = \int_{\Gamma} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \quad (2.12)$$

L'application du théorème de Stokes aux équations (2.1) et (2.2), sur une surface Γ de contour γ , donne

$$\int_{\gamma} \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\tau} d\gamma = \int_{\Gamma} (\mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \quad (2.13)$$

$$\int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} d\gamma = - \int_{\Gamma} \partial_t \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \quad (2.14)$$

Il s'agit des formes intégrales des lois d'Ampère et de Faraday. Elle relient les circulations de \mathbf{H} et \mathbf{E} , le long d'une courbe fermée, respectivement aux flux de $\mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D}$ et $-\partial_t \mathbf{B}$, au travers d'une surface quelconque qui s'appuie sur cette courbe.

Soit Ω un volume de frontière Γ et soit \mathbf{n} la normale unitaire à Γ orientée vers l'extérieur de Ω . Le *théorème de la divergence* affirme que pour tout vecteur \mathbf{v} , on a:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v} d\Omega. \quad (2.15)$$

L'application du théorème de la divergence aux équations (2.3) et (2.4), sur un volume Ω de frontière Γ , donne les formes intégrales associées

$$\int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0, \quad (2.16)$$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \rho d\Omega. \quad (2.17)$$

Ces formes indiquent que le flux de \mathbf{B} à travers une surface fermée est nul, alors que le flux de \mathbf{D} à travers cette même surface est égal à la charge totale contenue dans le volume intérieur.

Sous forme intégrale les champs \mathbf{E} , \mathbf{H} sont donc intégrés le long des lignes, les densités de flux \mathbf{B} , \mathbf{D} (et de courant \mathbf{J}) sont intégrées sur des surface, et la densité de charge ρ est intégrée dans un volume. Les vecteurs champ et densité de flux sont alors de natures différentes. Physiquement, les intégrales de ligne (les circulations) de \mathbf{E} et de \mathbf{H} représentent respectivement la force électromotrice et la force magnétomotrice, et les intégrales surfaciques de \mathbf{D} , de \mathbf{B} et de \mathbf{J} sont respectivement le flux électrique, le flux magnétique et le courant électrique (de conduction) à travers des surfaces correspondantes.

2.1.2 Conditions de transmission

Lors du passage d'un milieu à un autre, les champs électromagnétiques subissent des discontinuités et ne sont par conséquent pas différentiables. Cependant, il est possible de déduire des conditions dites de transmission des champs [53].

Considérons une surface Γ entre deux milieux continus, représentés par les sous-domaines Ω_1 et Ω_2 (Figure 2.2). Nous ne faisons pas d'hypothèse concernant les propriétés de ces deux milieux afin d'obtenir des relations tout à fait générales. La normale \mathbf{n} à Γ est orientée de Ω_1 vers Ω_2 . La valeur d'un champ de part et d'autre de Γ dans le milieu Ω_i est désignée à l'aide de l'indice i , i.e. $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}|_{\Omega_i}$, par exemple.

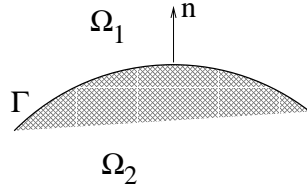


Figure 2.2: Surface Γ entre deux milieux Ω_1 et Ω_2 .

Les équations (2.1-2.4) peuvent être intégrées sur des volumes incluant des portions de la surface Γ . L'application du théorème de la divergence ou du théorème de Stokes impliquent alors les conditions de transmission, ou conditions d'interface, suivantes:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)|_{\Gamma} = \mathbf{J}_{Sur}, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)|_{\Gamma} = \mathbf{0}, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)|_{\Gamma} = 0, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)|_{\Gamma} = \rho_{Sur}, \quad (2.21)$$

où ρ_{Sur} et \mathbf{J}_{Sur} sont respectivement une densité de charge et de courant sur la surface Γ . Les conditions de transmission sont relatives soit à la composante tangentielle, soit à la composante normale des champs. Elles entraînent que la composante normale de \mathbf{B} et la composante tangentielle de \mathbf{E} sont continues à travers Σ . Par contre, si ρ_{Sur} et \mathbf{J}_{Sur} sont différents de zéro, la composante normale de \mathbf{D} et la composante tangentielle de \mathbf{H} sont discontinues. Nous considérerons en général le cas où \mathbf{J}_{Sur} est nul et la composante tangentielle de \mathbf{H} est alors continue². Pour plus de détails, voir le Chapitre 2 dans [34].

2.1.3 Lemme de Poincaré: un rappel

Dans la suite de ce chapitre, on va étudier plusieurs formulations du problème de la magnétostatique, toutes équivalentes au modèle de départ mais qui se distinguent par l'utilisation de divers potentiels, scalaires et vecteurs. A ce propos, il est essentiel faire une petite digression concernant le Lemme de Poincaré (voir Chapitre 5 et Annexe A.3.3. dans [34]), sur lequel on retournera aussi dans le Chapitre 3. Le Lemme de Poincaré donne une formulation précise à l'assertion suivante: les champs à rotationnel nul sont, localement, des gradients et les champs à divergence nulle sont des rotationnels.

Un domaine Ω de \mathbb{R}^3 est *contractile* si il est simplement connexe à frontière connexe. Le terme “contractile” dérive du fait que Ω peut être réduit à un point $\mathbf{x} \in \Omega$ par déformation continue. L'adjectif *connexe* signifie fait d'un seul morceau et *simplement connexe* signifie que tout circuit est réductible à un point par déformation continue dans Ω . L'intérieur d'un tore est connexe mais il n'est pas simplement connexe.

Lemme de Poincaré - Soit $\mathbf{E}, \mathbf{B}, q$ deux champs vecteurs réguliers et une fonction régulière sur un domaine Ω contractile et soit $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$ et $\text{div } \mathbf{B} = 0$ dans Ω . Alors, ils existent une fonction régulière ψ (potentiel scalaire) et deux champs réguliers \mathbf{a} (potentiel vecteur) et \mathbf{J} tels que $\mathbf{E} = \text{grad } \psi$, $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{a}$ et $q = \text{div } \mathbf{J}$ dans Ω .

Toute boule ouverte (i.e. le voisinage d'un point) de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 est contractile, tout domaine simplement connexe de \mathbb{R}^2 est contractile; en \mathbb{R}^3 , tout domaine contractile est simplement connexe mais le contraire n'est pas vrais (le domaine inclu entre deux sphères de même centre est simplement connexe mais sa frontière n'est pas connexe). Pour tout

²La décomposition d'un vecteur \mathbf{v} selon ses composantes normale et tangentielle en un point d'une surface est donnée par

$$\mathbf{v} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} + (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{n};$$

sa composante tangentielle est donc $(\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{n}$, mais nous y ferons en général directement référence pas le vecteur $\mathbf{n} \times \mathbf{v}$, qui lui est orthogonal et de même norme, tout en restant tangent à la surface. La notation originale sera utilisée là où nous devrons distinguer entre la composante tangentielle et $\mathbf{n} \times \mathbf{v}$.

domaine simplement connexe à frontière non simplement connexe, on peut dire que tout champ à rotationnel nul est un gradient mais on ne peut pas dire que tout champ à divergence nulle est un rotationnel. Enfin, nous signalons le domaine en Figure 8.8 dans le Chapitre 8 de [34] comme exemple de région non simplement connexe où tout champ à rotationnel nul est un gradient.

Les potentiels sont des outils mathématiques et sont des intermédiaires pour déterminer les champs électromagnétiques. Leur introduction peut augmenter le nombre des inconnues scalaires et des équations mais cette complication apparente se justifie par une amélioration dans le traitement des discontinuités qui apparaissent quand on applique des méthodes numériques, comme on le verra dans la suite. La définition générale des potentiels scalaires nécessite l'introduction de la notion de coupure, afin de traiter les potentiels multivoques. En travaillant avec des potentiels vecteurs, il faut en assurer l'unicité à l'aide de la notion de jauge.

Le problème magnétodynamique est ensuite envisagé et diverses formulations sont encore établies. Certaines sont basées sur des potentiels scalaires et vecteurs, d'autres sont directement exprimées en termes de champs physiques, tels que le champ magnétique ou électrique.

2.2 Formulations magnétostatiques

La magnétostatique consiste en l'étude des phénomènes magnétiques en régime stationnaire. Le champ magnétique est alors invariant dans le temps et n'est dû qu'à des courants stationnaires imposés ou à des aimants permanents. Les équations à considérer sont les équations de Maxwell (2.1-2.4) où les dérivées temporelles sont annulées. Elles sont

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (2.22)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.23)$$

plus la loi de comportement magnétique (2.5)

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (2.24)$$

Des conditions aux limites adéquates doivent être données sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine d'étude Ω . Elles sont relatives soit à la composante tangentielle de \mathbf{H} , sur une partie $\Gamma_{\mathbf{H}}$ de $\partial\Omega$, soit à la composante normale de \mathbf{B} , sur une partie $\Gamma_{\mathbf{B}} = \partial\Omega \setminus \Gamma_{\mathbf{H}}$, pour assurer l'unicité de la solution. Pour simplifier l'exposition, elles seront explicitées dans la suite si nécessaire.

Un problème typique de la magnétostatique est donné dans la Figure 2.3. La densité de courant \mathbf{J} est donnée et constitue une source de champ magnétique. Des aimants

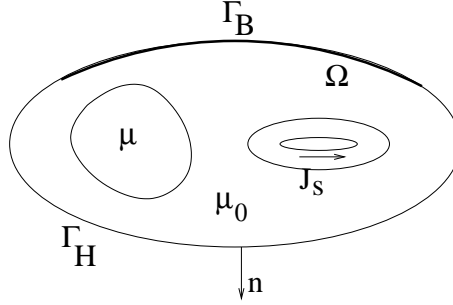


Figure 2.3: Problème magnétostatique.

permanents peuvent être considérés comme autre source grâce à la loi (2.24) réécrite sous la forme

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_r + \mu(\mathbf{H})\mathbf{H}$$

pour mettre en évidence la non linéarité ($\mu = \mu(\mathbf{H})$) et le magnétisme rémanent (\mathbf{B}_r) de ces matériaux.

Les concepts de champ magnétique \mathbf{H} ou d'induction magnétique \mathbf{B} sont suffisants pour caractériser un état magnétique dans l'espace. Néanmoins, l'introduction de la notion de potentiel magnétique peut se révéler utile. Différents potentiels sont envisageables et conduisent ainsi à diverses formulations [33].

2.2.1 En potentiel scalaire

Potentiel total – Dans une région de l'espace où il n'existe pas de courants, l'équation (2.22) devient $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{0}$. Si le domaine d'étude est contractile, grâce au Lemme de Poincaré, nous pouvons dériver \mathbf{H} d'un potentiel scalaire magnétique Φ , c'est-à-dire

$$\mathbf{H} = - \text{grad } \Phi. \quad (2.25)$$

Ce potentiel est défini à une constante arbitraire près et est appelé potentiel scalaire total. Portant (2.24) et (2.25) dans (2.22), nous obtenons l'équation

$$- \text{div } (\mu \text{ grad } \Phi) = 0. \quad (2.26)$$

Celle-ci se réduit en particulier à l'équation de Laplace $\Delta\Phi = 0$ dans tous les domaines où μ est une constante. L'équation (2.26) constitue une formulation magnétostatique en potentiel scalaire (voir Chapitres 2 et 3 dans [34]). Ce potentiel suffit à caractériser un état magnétique; on peut en déduire le champ \mathbf{H} par (2.25) et ensuite le champ \mathbf{B} par (2.24). Notons que par la relation (2.25), la continuité de la composante tangentielle du champ

magnétique est assurée si le potentiel scalaire est continu. La condition de continuité de la composante normale de l'induction est implicite dans l'équation (2.26).

Si le domaine d'étude n'est pas contractile, la relation (2.25) peut encore être valable, comme nous l'avons signalé en rappelant le Lemme de Poincaré. La relation (2.25) entraîne que la circulation de \mathbf{H} le long d'un chemin γ_{AB} , reliant deux points A et B, est égale à la différence des valeurs du potentiel scalaire entre l'origine et l'extrémité de ce chemin, i.e.

$$\int_{\gamma_{AB}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma_{AB}} -\text{grad } \Phi \cdot d\mathbf{l} = \Phi_A - \Phi_B. \quad (2.27)$$

En particulier, lorsque le chemin d'intégration est fermé, i.e. $A \equiv B$, la circulation de \mathbf{H} est nulle puisque $\Phi_A = \Phi_B$.

Supposons maintenant que Ω contient un conducteur C de forme toroïdale (le domaine $\Omega \setminus C$ n'est pas contractile): si C est traversé par un fil conducteur parcouru par un courant I (Figure 2.4), alors la circulation de \mathbf{H} le long d'une génératrice γ du tore est nulle si l'on s'en tient à la relation (2.27), et donc à (2.25).

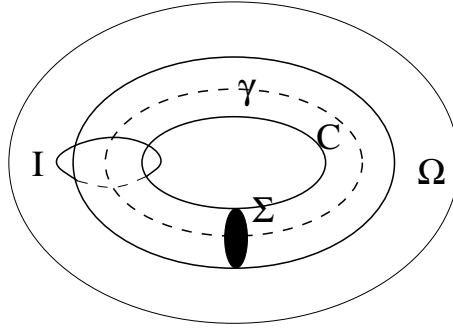


Figure 2.4: Domaine d'étude contenant un conducteur C de forme toroïdale.

Cependant, d'après le théorème d'Ampère, cette circulation doit être égale au courant I . En un point de C , il y a une infinité de valeurs du potentiel, leurs différences deux à deux étant multiples de I . On parle de potentiel multivoque [30, 81, 82]. Une solution consiste à définir une coupure Σ dans le tore tel que tout champ à rotationnel nul est un gradient à l'extérieur de $C \cup \Sigma$ et à imposer sur cette coupure une discontinuité du potentiel scalaire égale au courant I [54]. Comme le montre la Figure 8.8 dans [34], si une partie d'un conducteur C est nouée, il peut arriver que le complément de $C \cup \Sigma$ dans le domaine d'étude ou dans tout l'espace ne soit pas simplement connexe même si la coupure Σ a éliminée la possibilité d'avoir des potentiels multivoques dans la région extérieure.

Potentiel partiel – Lorsque des sources de courant sont présentes dans le domaine d'étude Ω , il n'est pas possible d'utiliser un potentiel scalaire défini par (2.25) partout.

Il est toutefois possible de conserver une formulation en potentiel scalaire. Décomposons donc le champ magnétique en deux parties \mathbf{H}_s et \mathbf{H}_r , c'est-à-dire

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_r \quad (2.28)$$

où le champ \mathbf{H}_s est choisi tel que

$$\text{rot } \mathbf{H}_s = \mathbf{J}. \quad (2.29)$$

Par conséquent, le champ complémentaire \mathbf{H}_r est irrotationnel, i.e.

$$\text{rot } \mathbf{H}_r = \mathbf{0}, \quad (2.30)$$

et peut donc, localement si le domaine n'est pas contractile, dériver d'un potentiel scalaire Φ , c'est-à-dire

$$\mathbf{H}_r = - \text{grad } \Phi. \quad (2.31)$$

Ce potentiel est appelé potentiel scalaire partiel. Le champ total \mathbf{H} est donc défini par

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s - \text{grad } \Phi. \quad (2.32)$$

Portant alors (2.24) et (2.32) dans la (2.22), nous obtenons l'équation

$$\text{div } (\mu(\text{grad } \Phi - \mathbf{H}_s)) = 0. \quad (2.33)$$

Par la relation (2.31), la continuité de la composante tangentielle du champ \mathbf{H}_r est assurée si le potentiel scalaire partiel est également continu. L'équation (2.33) entraîne la continuité de la composante normale de l'induction associée au champ total. Nous considérerons qu'une "transformation" du domaine d'étude à l'aide de coupures a été réalisée de façon à pouvoir définir la relation (2.31) dans tous les cas.

Une source de courant intérieure au domaine d'étude, s'il en existe, peut être prise en compte par \mathbf{H}_s . Le champ \mathbf{H}_s peut être choisi comme créé par les seules sources de courant en l'absence de tout matériau magnétique (i.e. $\mu = \mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H/m partout). Il est dans ce cas donné par la loi de Biot-Savart, qui est la solution intégrale du problème de la magnétostatique dans le vide, i.e.

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{y}) \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\mathbf{y}. \quad (2.34)$$

Le support du champ \mathbf{J} se réduit aux domaines conducteurs de Ω . Ce champ \mathbf{H}_s est appelé champ source et le champ \mathbf{H}_r est alors appelé champ de réaction, puisqu'il est engendré par le phénomène d'aimantation dans les matériaux magnétiques. Le potentiel partiel Φ , associé à \mathbf{H}_r , est aussi appelé potentiel de réaction.

Pour un inducteur ayant une géométrie régulière et avec une répartition du courant constante, \mathbf{H}_s peut être déterminé sous forme analytique. Dans le cas général, l'équation (2.29), munie d'une condition au bord sur la composante tangentielle de \mathbf{H}_s pour avoir l'unicité, sera résolue numériquement dans Ω . Une condition simple, mais beaucoup utilisée dans la pratique, est $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_s = \mathbf{0}$ sur le bord $\partial\Omega$.

L'avantage de la formulation en potentiel scalaire est le nombre réduit d'inconnues car elles sont associées aux nœuds du maillage dans une approche par éléments finis. Le problème de cette formulation est la singularité du champ dans les coins des matériaux où la gradient du potentiel est singulier. Cela se traduit numériquement par des valeurs du champ très élevées dans les coins des matériaux et conduit à un mauvais comportement de convergence dans le cas d'un problème non linéaire.

Couplage des potentiels partiel et total – Un potentiel partiel peut être défini dans certaines régions, dont les régions conductrices, et un potentiel total peut être défini dans les régions à forte perméabilité (voir [4]). Il s'agit du couplage explicite des potentiels partiel et total. Des conditions de transmission appropriées doivent alors être établies aux interfaces entre ces deux groupes de régions. Notons ψ le potentiel total défini par (2.25) et Φ le potentiel partiel défini par (2.31). Si ces deux potentiels sont définis d'une part et d'autre d'une surface Γ , et sur Γ elle-même par prolongement, alors la continuité de la composante tangentielle du champ \mathbf{H} est assurée si la relation

$$\psi|_{\Gamma} = \Phi|_{\Gamma} - \int_{\gamma} \mathbf{H}_s \cdot \boldsymbol{\tau} d\gamma \quad (2.35)$$

a lieu en tout point Q de Γ ; γ est un chemin sur Γ , ayant vecteur tangent $\boldsymbol{\tau}$ et reliant un point P fixé quelconque, où l'égalité de Φ et ψ est posée, au point Q .

2.2.2 En potentiel vecteur

Potentiel total – Dans les régions contractiles, grâce au Lemme de Poincaré, l'équation (2.23), i.e. $\text{div } \mathbf{B} = 0$, permet de dériver \mathbf{B} d'un potentiel vecteur magnétique \mathbf{a} [126, 4], c'est-à-dire

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{a}. \quad (2.36)$$

Ce potentiel vecteur est cependant déterminé au gradient d'une fonction scalaire arbitraire près, et n'est donc pas unique. En effet, si $\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \text{grad } f$, alors $\text{rot } \mathbf{a} = \text{rot } \mathbf{a}'$. Portant (2.24) et (2.36) dans (2.22), nous obtenons l'équation

$$\text{rot } (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{a}) = \mathbf{J} \quad (2.37)$$

qui constitue une formulation magnétostatique en potentiel vecteur. Notons que, par la relation (2.36), la continuité de la composante normale de \mathbf{B} est assurée si la composante

tangentielle de \mathbf{a} est continue. La condition de continuité de la composante tangentielle de \mathbf{H} est implicite dans l'équation (2.37). Notons également que, par la relation (2.36), le flux de \mathbf{B} à travers une surface Γ est égal à la circulation de \mathbf{a} le long de son contour γ , i.e.

$$\int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\gamma} \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} d\gamma \quad (2.38)$$

où $\boldsymbol{\tau}$ est le vecteur tangent à γ . Par rapport aux formulations en potentiel scalaire, dans cette formulation l'inconnue a un caractère vectoriel qui peut conduire à une résolution numérique plus "lourde". De plus, elle nécessite d'imposer des conditions supplémentaires, dites de jauge, pour assurer l'unicité de la solution. Un exemple d'application de cette formulation est donné dans la Section 7.3.

Potentiel partiel – Il est possible de définir un potentiel vecteur partiel d'une façon similaire à la définition d'un potentiel scalaire partiel. Décomposons pour cela le potentiel vecteur \mathbf{a} en deux parties \mathbf{a}_s et \mathbf{a}_r , c'est-à-dire

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_s, \quad (2.39)$$

où le potentiel \mathbf{a}_s est choisi tel que

$$\text{rot } \mathbf{a}_s = \mathbf{B}_s, \quad \mathbf{B}_s = \mu_0 \mathbf{H}_s, \quad \text{rot } \mathbf{H}_s = \mathbf{J}. \quad (2.40)$$

Les relations (2.40) entraînent que

$$\text{rot } (\mu_0^{-1} \text{rot } \mathbf{a}_r) = \text{rot } ((\mu_0^{-1} - \mu^{-1}) \text{rot } \mathbf{a}_s). \quad (2.41)$$

Le potentiel \mathbf{a}_s peut être choisi comme associé au champ magnétique créé par les seules sources de courant, en absence de tout matériau magnétique, c'est-à-dire qu'il peut être défini par

$$\mathbf{a}_s(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y}. \quad (2.42)$$

On peut vérifier que le rotationnel de (2.41) donne bien (2.34), au facteur μ_0 près. Le potentiel \mathbf{a}_s ainsi défini est appelé potentiel vecteur source et le potentiel complémentaire \mathbf{a}_r est appelé potentiel vecteur de réaction, puisqu'il est associé au phénomène d'aimantation dans les matériaux magnétiques.

Le potentiel \mathbf{a}_s défini par (2.42) est à divergence nulle. Rien n'empêche cependant, comme pour le champ source dans la formulation en potentiel scalaire, de choisir d'autres formes pour \mathbf{a}_s , qui vérifient toutefois (2.40). C'est la non unicité du potentiel vecteur qui rend cela possible.

La formulation en potentiel vecteur est largement utilisée pour la résolution des problèmes magnéostatiques grâce à sa robustesse. Néanmoins, deux problèmes relatifs à cette formulation sont à résoudre. Le premier est problème de la compatibilité car le second membre de l'équation (2.37) doit être à divergence nulle. Le second est le problème de l'unicité.

Condition de jauge – L'équation (2.37) (resp. (2.41)) n'a pas une solution unique \mathbf{a} (resp. \mathbf{a}_r). En effet, si \mathbf{a} est solution de (2.37), alors tout champ du type $\mathbf{a} + \text{grad } f$, où f est une fonction scalaire quelconque, est également solution de (2.37). Dans l'ensemble des potentiels vecteurs \mathbf{a} , la relation $\text{rot } \mathbf{a}_1 = \text{rot } \mathbf{a}_2$ est une relation de équivalence dont les classes sont en correspondance biunivoque avec les champs \mathbf{B} . La “classe” de équivalence représente “un” seul objet qui est le champ induction magnetique \mathbf{B} et au niveau numérique, pour exemple, travailler avec la classe ou bien avec le champ \mathbf{B} est la même chose. Cependant, l'approche classique porte à choisir un rapresentant parmi les éléments de la classe: la condition sur laquelle on base le choix d'un représentant dans la classe s'appelle “condition de jauge”.

Une condition possible est la jauge de Coulomb [20], c'est-à-dire

$$\text{div } \mathbf{a} = 0. \quad (2.43)$$

Notons que cette jauge entraîne la continuité de la composante normale du potentiel vecteur \mathbf{a} . Elle est généralement imposée par la technique de pénalité [52] qui introduit $\text{div } \mathbf{a}$ dans l'équation avec un coefficient de pénalisation. Du point de vue numérique, dans le cadre d'une discrétisation par éléments finis, la condition (2.43) peut être imposée par la méthode qui consiste à enlever les degrés de liberté redondants [58, 98].

Une autre jauge très utilisée est la condition

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (2.44)$$

où \mathbf{w} est un champ de vecteur dont les lignes de champ ne sont pas fermées et sont telles qu'elles peuvent relier toute paire de points quelconque du domaine d'étude [4]. En particulier, si \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 sont tels que $\text{rot } \mathbf{a}_1 = \text{rot } \mathbf{a}_2$, alors $\text{rot } \delta \mathbf{a} = \text{rot } (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) = \mathbf{0}$. Si de plus, ils vérifient la condition (2.44), i.e. $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{w} = 0$ et $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{w} = 0$, alors $\delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = 0$ et

$$0 = \int_{\gamma} \delta \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} d\gamma = \int_{\gamma} \text{grad } f \cdot \boldsymbol{\tau} d\gamma = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) \quad , \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega,$$

où γ est un chemin qui lie \mathbf{x} à \mathbf{y} et de vecteur tangent $\boldsymbol{\tau} \parallel \mathbf{w}$. Il en résulte que la fonction f est constante et donc que $\delta \mathbf{a} = \text{grad } f = \mathbf{0}$, c'est-à-dire que \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 sont identiques. La condition (2.44) est donc bien une condition de jauge. Dans le cas d'une approximation par éléments d'arêtes, cette technique semble bien adaptée. Comme le

champ de vecteur \mathbf{w} peut être déterminé par un arbre constitué d'une suite d'arêtes dans le maillage, cette jauge est appelée parfois la jauge d'arbre. Théoriquement, le choix est arbitraire. Pourtant, les expériences numériques montrent que la précision du calcul ainsi que la vitesse de convergence du système à résoudre dépendent du choix de l'arbre [104].

Notons finalement que l'application explicite d'une condition de jauge n'est pas indispensable si on arrive à trouver une solution du potentiel de sorte que son rotationnel (l'induction \mathbf{B}) soit unique. Lors de la résolution du système final par une méthode itérative (méthode de gradient conjugué par exemple), la condition de jauge est implicitement imposée par la récurrence de l'algorithme [118], si le système est compatible (i.e. le second membre du système matriciel, obtenu après la discrétisation de l'équation (2.37), est à divergence discrète nulle). Afin d'avoir la divergence nulle de \mathbf{J} , nous pouvons exprimer \mathbf{J} par le rotationnel d'un champ source \mathbf{T} . Nous avons donc à résoudre le problème

$$\operatorname{rot} \mathbf{T} = \mathbf{J} \quad \text{dans} \quad C \quad \text{et} \quad \mathbf{n} \times \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \partial C,$$

étant C le domaine conducteur. Le vecteur \mathbf{T} peut être calculé soit analytiquement dans le cas de géométries simples des conducteurs (voir encore dans la Section 7.3 pour une application directe), soit numériquement dans le cas général. Trouver \mathbf{a} tel que $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{a}$ apparaît être de la même complexité que trouver \mathbf{T} tel que $\mathbf{J} = \operatorname{rot} \mathbf{T}$. En réalité, il faut observer que $C \subset \Omega$ (donc moins d'inconnues au niveau numérique) et que \mathbf{T} n'est pas influencé par les sauts de la perméabilité μ .

Comparaison des formulations en potentiels scalaire et vecteur – Le problème de la magnétostatique demande la résolution des équations (2.22), (2.23) et (2.24), et l'introduction de la notion de potentiel magnétique apparaît être un outil pratique pour cette résolution. Les formulations qui en résultent peuvent alors être classées en deux familles: celle des formulations construites à partir de l'équation (2.22), $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$, et celle des formulations construites à partir de l'équation (2.23), $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. La première famille est directement basée sur le champ magnétique alors que la seconde est directement basée sur l'induction magnétique. Nous parlons respectivement de la famille de formulations en \mathbf{H} et de la famille de formulations en \mathbf{B} . Nous verrons une généralisation de ces familles pour le problème de la magnétodynamique.

On se demande laquelle de ces formulations est préférable pour un problème donné. Les problèmes qui admettent une solution analytique seront de préférence résolus à l'aide de la formulation qui apparaît la mieux adaptée, en ce qui concerne les outils mathématiques à mettre en œuvre, sans influencer la qualité de la solution finale. Par contre, au niveau discret, les propriétés d'une solution numérique dépendent en général du type de formulation utilisé. Une solution numérique d'un problème donné n'est en effet qu'une approximation de la solution exacte de ce problème et cette approximation est directement liée à la formulation mise en œuvre.

Le potentiel scalaire présente l'avantage, par rapport au potentiel vecteur, de réduire considérablement la dimension du problème à résoudre. Il peut cependant être multiforme, et nécessiter alors un traitement spécifique (définition de coupures, imposition de discontinuité de potentiel). Le potentiel vecteur n'entraîne pas ce genre de problèmes mais nécessite par contre la définition d'une condition de jauge afin d'assurer son unicité. Il apparaît donc que les difficultés ou inconvénients propres au potentiel scalaire n'ont pas lieu pour le potentiel vecteur et vice versa.

Les problèmes qui présentent une invariance de leur solution dans une certaine direction (c'est alors le cas lorsqu'il y a une symétrie de translation ou de révolution), appelés problèmes bidimensionnels, peuvent être posés en terme d'un potentiel vecteur dont la direction peut être fixée a priori et dont la composante selon cette direction constitue la seule inconnue. Ce choix permet de fixer l'unicité du potentiel vecteur, grâce à la définition implicite correspondante d'une condition de jauge. De tels problèmes peuvent donc être résolus plus facilement avec un potentiel vecteur qu'avec un potentiel scalaire. C'est ainsi que la formulation en potentiel vecteur est souvent utilisée dans les problèmes bidimensionnels, en priorité sur la formulation en potentiel scalaire. Toutefois, cette dernière formulation est préférable pour des problèmes tridimensionnels sans symétries.

2.3 Formulations magnétodynamiques

La magnétodynamique consiste en l'étude des phénomènes magnétiques et électriques en régime dynamique, en négligeant toutefois les courants de déplacement ($\partial_t \mathbf{D}$), c'est-à-dire sous l'hypothèse de l'électrotechnique. Les champs électromagnétiques sont alors variables, soit par variation de courants d'excitation, soit par mouvement d'une partie de la géométrie. La Figure 2.5 montre un problème de courants induits: il s'agit de calculer, sous l'excitation du courant \mathbf{J}_s variable dans le temps, la distribution du champ magnétique \mathbf{H} (ou \mathbf{B}) en tout point du domaine d'étude Ω et de la densité de courant \mathbf{J} dans le domaine conducteur C pour tout temps supérieur au temps initial.

Les équations à considérer dérivent des équations de Maxwell (2.1-2.4). Elles sont

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (2.45)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad (2.46)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (2.47)$$

avec la loi de comportement magnétique (2.5) ainsi que la loi d'Ohm (2.8), i.e.

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (2.48)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_s, \quad (2.49)$$

où $\mu = \mu(\mathbf{H})$ pour les matériaux non linéaires.

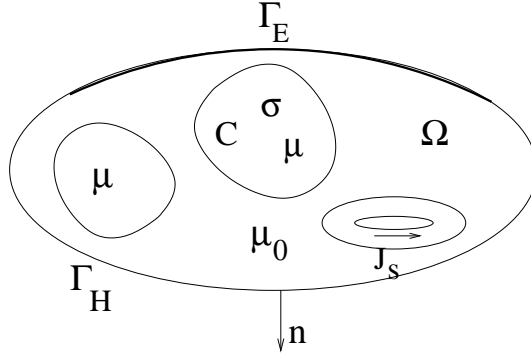


Figure 2.5: Problème de courants induits.

Il s'agit également de fixer des conditions aux limites adéquates sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine d'étude. Elles sont relatives soit à la composante tangentielle de \mathbf{H} , sur la partie Γ_H de $\partial\Omega$, soit à la composante tangentielle de \mathbf{E} , sur la partie $\Gamma_E = \partial\Omega \setminus \Gamma_H$, de façon à assurer l'unicité de la solution. Notons qu'elles sont également respectivement associées à la composante normale de \mathbf{B} sur Γ_E et à la composante normale de \mathbf{J} sur Γ_H .

Les équations (2.45) et (2.46) sont respectivement l'équation d'Ampère et l'équation de Faraday. Notons, comme nous l'avons déjà fait remarquer, que l'équation (2.47) n'est pas tout à fait indépendante de l'équation (2.46): si elle est vérifiée à l'instant initial, elle le reste à tout instant suivant.

Les équations du problème des courants induits suffisent à déterminer les champs \mathbf{H} , \mathbf{B} et \mathbf{J} partout dans le domaine d'étude. Par contre, elles ne permettent pas de déterminer de façon unique le champ électrique \mathbf{E} dans les régions non conductrices. En effet, on peut toujours lui ajouter le champ $\text{grad } \psi$, avec ψ constant dans les régions conductrices, sans affecter les autres champs. La détermination de \mathbf{E} est toutefois possible à condition de connaître la charge électrique q comme on le verra dans la suite.

Les champs \mathbf{H} , \mathbf{B} , \mathbf{E} et \mathbf{J} sont suffisants pour caractériser un état électromagnétique dans l'espace. Des formulations peuvent directement s'exprimer en fonction de ces champs. Néanmoins, tout comme en magnétostatique, l'introduction de la notation de potentiel est intéressante et différents potentiels peuvent être définis pour conduire à d'autres formulations.

2.3.1 En champ magnétique

Dans une région conductrice sans sources ($\sigma \neq 0$ et $\mathbf{J}_s = \mathbf{0}$), portant (2.49) et (2.48), i.e. $\mathbf{E} = \sigma^{-1}\mathbf{J}$ et $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, puis (2.45), i.e. $\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{H}$, dans (2.46), nous obtenons l'équation

$$\text{rot } (\sigma^{-1} \text{rot } \mathbf{H}) + \partial_t(\mu\mathbf{H}) = \mathbf{0}. \quad (2.50)$$

Cette équation s'exprime uniquement en fonction du champ magnétique \mathbf{H} et est appelée formulation en \mathbf{H} du problème des courants induits [5, 26, 27] (voir les Sections 6.1 et 6.2 pour un exemple d'application). Elle admet une solution unique si elle est accompagnée de conditions aux limites adéquates.

Dans les régions non conductrices ($\sigma = 0$) l'équation (2.46) peut être abandonnée à condition d'être remplacée par l'équation (2.47). De plus, dans ces régions sans sources \mathbf{J}_s , le champ magnétique est irrotationnel, et peut donc, comme en magnétostatique, dériver, au moins localement, d'un potentiel scalaire magnétique Φ , i.e.

$$\mathbf{H} = - \text{grad } \Phi. \quad (2.51)$$

Un champ source \mathbf{H}_s peut être aussi défini afin de permettre la prise en compte des régions à courant imposé. Ainsi,

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s - \text{grad } \Phi, \quad (2.52)$$

avec

$$\text{rot } \mathbf{H}_s = \mathbf{J}_s. \quad (2.53)$$

Portant (2.48) et (2.52) dans (2.47), nous obtenons l'équation

$$\text{div } (\mu (\text{grad } \Phi - \mathbf{H}_s)) = 0 \quad (2.54)$$

qui est équivalente à l'équation (2.33) de la magnétostatique et qui ne s'applique qu'aux régions non conductrices.

La formulation en champ magnétique, caractérisée par les équations (2.50) et (2.54), est appelée formulation \mathbf{H} - Φ . Elle permet de prendre en compte de façon automatique les discontinuités de la conductivité à la frontière de la partie conductrice ou à l'intérieur de cette partie même. La continuité de la composante tangentielle de \mathbf{H} implique la continuité de $\text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}$ à travers des surfaces de discontinuité. Au contraire, la continuité de $\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}$ doit être imposée de façon explicite là où μ est discontinu. En vue de la simulation numérique que l'on veut faire après, cette formulation peut donc être appliquée à des domaines conducteurs non magnétiques; en présence de discontinuités magnétiques dans les régions conductrices, vont apparaître des difficultés dues au fait que la composante normale de \mathbf{H} est discontinue. Pour résoudre ce problème, on a deux solutions: la première s'appuie sur le choix d'un bon espace d'approximation pour \mathbf{H} , qui devra permettre la continuité de sa composante tangentielle et devra laisser libre sa composante normale. Il s'agit d'une contrainte liée au caractère physique de cette inconnue. Au niveau discret, un certain choix des espaces fonctionnels d'approximation de \mathbf{H} et Φ permet d'exprimer aisément ces conditions. L'autre solution consiste à introduire un potentiel vecteur électrique \mathbf{t} [48] défini par la relation $\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{t}$ de façon à transférer la discontinuité de $\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}$ sur celle de la dérivée normale du potentiel scalaire (voir Section 2.3.3). Les champ \mathbf{H} et Φ peuvent être

choisis continus dans les régions conductrices [5]. Afin de coupler les régions conductrices et non conductrices, il faut définir des conditions de transmission cohérentes portant sur \mathbf{H} et Φ aux interfaces entre ces régions.

2.3.2 En champ électrique

La formulation en champ électrique [5, 29] a l'avantage par rapport à celle en champ magnétique de donner le champ électrique hors des régions conductrices, i.e. là où $\sigma = 0$. Portant l'équation (2.49) dans (2.45) et dérivant (2.45) par rapport au temps, nous obtenons

$$\text{rot } \partial_t \mathbf{H} = \sigma \partial_t \mathbf{E}. \quad (2.55)$$

Calculons le rotationnel de l'équation (2.46), c'est-à-dire

$$\text{rot } (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{E}) = -\text{rot } \partial_t \mathbf{H} \quad (2.56)$$

et portant (2.55) dans (2.56), nous obtenons

$$\sigma \partial_t \mathbf{E} + \text{rot } (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{E}) = \mathbf{0}. \quad (2.57)$$

Cette équation s'exprime uniquement en fonction du champ électrique \mathbf{E} et est appelée formulation en \mathbf{E} du problème des courants induits (voir la Section 7.1 pour un exemple d'application). Dans une région conductrice C ($\sigma \neq 0$), elle admet une solution unique si elle est accompagnée de conditions aux limites adéquates relative à la composante tangentielle de \mathbf{E} . Dans une région non conductrice (dans $R^3 \setminus C$, par exemple), un problème de non-unicité apparaît. Comme on a dit dans la section précédente, quand $\sigma = 0$, l'équation (2.57) ne détermine le champ électrique qu'à un gradient près.

Du point de vue physique, c'est naturel, puisque rien n'a été dit sur la présence de charges électriques. Si $\text{rot } \mathbf{E}$ est connu, donc \mathbf{B} , donc \mathbf{H} , donc \mathbf{J} , le champ \mathbf{E} est connu là où la loi d'Ohm s'applique, c'est-à-dire là où $\sigma > 0$ et on peut calculer la charge par la relation $q = \text{div } (\epsilon_0 \mathbf{E})$. Mais là où $\sigma = 0$, l'équation $q = \text{div } (\epsilon_0 \mathbf{E})$ devient nécessaire pour compléter la détermination de \mathbf{E} . La charge q apparaît comme une autre source du champ, qui superpose ses effets à ceux du courant imposé (venu par exemple d'un générateur). En détail, hors de C , on peut calculer le champ électrique en résolvant

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B} && \text{dans } R^3 \setminus C, \\ \text{div } \mathbf{E} &= q && \text{dans } R^3 \setminus C, \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n} &= \sigma^{-1} \mathbf{J} \times \mathbf{n} && \text{sur } \partial C. \end{aligned} \quad (2.58)$$

La charge q est nulle hors des conducteurs, et aussi dans les conducteurs lorsque σ est constant (car $\text{div } \mathbf{J} = 0$, donc $\text{div } \sigma \mathbf{E} = \sigma \text{div } \mathbf{E} = 0$). Mais il y a d'autres charges:

celles qui apparaissent à la surface des conducteurs. En effet, la composante normale de \mathbf{E} , qui est nulle du côté de l'intérieur d'un conducteur, tout comme celle de \mathbf{J} , n'a pas de raison d'être nulle du côté de l'extérieur. La différence, ou saut de la composante normale, $\sigma^{-1}\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n}$, est la charge de surface.

2.3.3 En potentiel vecteur électrique

Un potentiel vecteur électrique \mathbf{t} [5, 6, 48, 117] peut être défini par

$$\text{rot } \mathbf{t} = \mathbf{J}, \quad (2.59)$$

de sorte que l'équation de conservation du courant, $\text{div } \mathbf{J} = 0$, est vérifiée. De (2.45) et (2.59), on déduit que

$$\text{rot } \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{t},$$

et donc,

$$\mathbf{H} = \mathbf{t} - \text{grad } \Psi \quad (2.60)$$

où Ψ est un potentiel scalaire magnétique défini dans le domaine d'étude. Notons qu'un potentiel vecteur magnétique source \mathbf{t}_s pourrait également être défini, i.e.

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_s + \mathbf{t}_r, \quad (2.61)$$

avec

$$\text{rot } \mathbf{t}_s = \mathbf{J}_s. \quad (2.62)$$

Dans une région conductrice sans sources ($\sigma \neq 0$ et $\mathbf{J}_s = \mathbf{0}$), portant (2.49) et (2.48), i.e. $\mathbf{E} = \sigma^{-1}\mathbf{J}$ et $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, puis (2.59) et (2.60), dans (2.46), nous obtenons l'équation

$$\text{rot } (\sigma^{-1} \text{rot } \mathbf{t}) + \partial_t(\mu(\mathbf{t} - \text{grad } \Psi)) = \mathbf{0}. \quad (2.63)$$

Dans une région non conductrice, portant (2.48) et (2.60) dans (2.47), nous obtenons l'équation

$$\text{div } (\mu(\mathbf{t} - \text{grad } \Psi)) = 0. \quad (2.64)$$

On pose en général $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ (ou bien $\mathbf{t}_r = \mathbf{0}$, si on a défini \mathbf{t}_s) dans une telle région, et donc

$$- \text{div } (\mu \text{grad } \Psi) = 0 \quad (2.65)$$

La formulation en potentiel vecteur électrique, caractérisée par les équations (2.63) et (2.64), est appelée formulation \mathbf{t} - Ψ . La continuité de la composante tangentielle de \mathbf{H} est assurée si à la fois Ψ et la composante tangentielle de \mathbf{t} sont continues. Il en résulte que le passage de (2.64) à (2.65) nécessite l'annulation de la composante tangentielle de \mathbf{t} aux

interfaces entre les régions conductrices et non conductrices. Une telle condition entraîne alors l'annulation de la composante normale de \mathbf{J} sur ces interfaces. La continuité de la composante normale de \mathbf{B} est implicite dans (2.64) et (2.65).

La formulation en \mathbf{H} ($\mathbf{H}-\Phi$) apparaît être un cas particulier de la formulation en potentiel vecteur électrique ($\mathbf{t}-\Psi$). En effet, en annulant Ψ , on a $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$, dont on peut redéfinir un potentiel scalaire Φ dans certaines régions.

Dans le cas général, il s'agit d'imposer une condition de jauge sur le potentiel vecteur électrique [43]. On peut définir des conditions similaires à celles utilisées pour le potentiel vecteur magnétique du problème de la magnétostatique, i.e. (2.43) ou (2.44). Il s'agit également de définir des conditions aux limites adéquates, relatives au potentiel vecteur \mathbf{t} , sur la frontière du domaine d'étude.

2.3.4 En potentiel vecteur magnétique

Un potentiel vecteur magnétique \mathbf{a} peut être défini par

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{a} \quad (2.66)$$

et, par conséquent, l'équation (2.47) est vérifiée. Portant (2.66) dans (2.46), nous obtenons

$$\text{rot } (\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{a}) = \mathbf{0},$$

et il en résulte que

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{a} - \text{grad } V, \quad (2.67)$$

où V est un potentiel scalaire électrique. Portant alors (2.48) et (2.49), i.e. $\mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B}$ et $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, puis (2.66) et (2.67), dans (2.45), nous obtenons l'équation

$$\text{rot } (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{a}) + \sigma (\partial_t \mathbf{a} + \text{grad } V) = \mathbf{0}, \quad (2.68)$$

qui constitue une formulation magnétodynamique en potentiel vecteur, aussi appelée formulation $\mathbf{a}-V$ [5, 75, 117]. Avec cette formulation, on ne peut calculer \mathbf{E} que dans les régions conductrices ($\sigma \neq 0$): le potentiel scalaire électrique n'a donc besoin d'être défini que dans ces mêmes régions.

La relation (2.66) entraîne que la continuité de la composante normale de \mathbf{B} est assurée si la composante tangentielle de \mathbf{a} est continue. La continuité de la composante tangentielle du champ magnétique est implicite dans l'équation (2.68). Il en est de même de la continuité de la composante normale de la densité de courant.

Tout comme pour la formulation magnétostatique en potentiel vecteur, il s'agit de définir une condition de jauge, associée au potentiel vecteur, afin d'assurer l'unicité de la solution de l'équation (2.68). Encore une fois, les conditions (2.43) ou (2.44) constituent des jauges possibles. Il s'agit également de définir des conditions aux limites adéquates, relatives au potentiel vecteur \mathbf{a} , sur la frontière du domaine d'étude [20].

2.3.5 En potentiel vecteur magnétique modifié

Définissons un potentiel vecteur magnétique \mathbf{a}^* , dit modifié [48, 76], tel que

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{a}^*, \quad (2.69)$$

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{a}^*. \quad (2.70)$$

Cette dernière relation est un cas particulier de (2.67), où le potentiel scalaire électrique est annulé ($V = 0$). La loi de Faraday (2.46) est par conséquent également vérifiée dans ce cas. Par la relation (2.70), le potentiel vecteur \mathbf{a}^* peut être considéré comme une primitive temporelle du champ électrique \mathbf{E} , i.e.

$$\mathbf{a}^*(t) = - \int_0^t \mathbf{E}(t') dt'. \quad (2.71)$$

Portant (2.48) et (2.49), i.e. $\mathbf{H} = \mu^{-1}\mathbf{B}$ et $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, puis (2.69) et (2.70), dans (2.45), nous obtenons l'équation

$$\text{rot } (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{a}^*) + \sigma \partial_t \mathbf{a}^* = \mathbf{0}, \quad (2.72)$$

qui constitue une formulation magnétodynamique en potentiel vecteur modifié ou formulation en \mathbf{a}^* (voir les Sections 6.1 et 6.3 pour des exemples d'application). Il s'agit bien entendu d'un cas particulier de la formulation (2.68). Il est intéressant de remarquer, en prenant la divergence de l'équation (2.72), que l'on obtient

$$\partial_t \text{div } (\sigma \mathbf{a}^*) = 0,$$

et donc que, si $\mathbf{a}^* = \mathbf{0}$ en $t = 0$,

$$\text{div } (\sigma \mathbf{a}^*) = 0. \quad (2.73)$$

Il s'agit d'une condition de jauge implicite dans (2.72) qui n'apparaît cependant que dans les régions conductrices ($\sigma \neq 0$). Dans les régions non conductrices, une condition de jauge doit alors être imposée explicitement. On définira par exemple (2.43) ou (2.44). Notons que la relation (2.73) entraîne la continuité du produit de la conductivité par la composante normale du potentiel vecteur modifié, i.e. $\sigma \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{n}$. Par conséquent, à la surface de séparation entre deux matériaux de conductivité différente, la composante normale de \mathbf{a}^* est discontinue. Sa composante tangentielle doit, pas contre, d'après la relation (2.69), être continue afin d'assurer la continuité de la composante normale de \mathbf{B} . Le potentiel vecteur \mathbf{a} , de la formulation \mathbf{a} - V , peut être entièrement continu; c'est le cas lorsque la jauge de Coulomb est adoptée. C'est la composante normale du champ $\text{grad } V$, de l'expression (2.67), qui peut subir une discontinuité, pour assurer la discontinuité de la composante normale du champ électrique.

La formulation en champ électrique ainsi que la formulation en potentiel vecteur magnétique, modifié et non, font partie de la famille des formulations en \mathbf{E} . Les formulations en champ magnétique et en potentiel vecteur électrique, appartiennent à la famille des formulations en \mathbf{H} . Notons qu'il apparaît une certaine similitude entre la formulation en champ magnétique (2.50) et la formulation en potentiel vecteur magnétique modifié (2.72), ainsi qu'entre la formulation en potentiel vecteur électrique (2.63) et la formulation en potentiel vecteur magnétique (2.68). Il apparaît d'une part une dualité entre \mathbf{H} et \mathbf{a}^* , et d'autre part une dualité entre $\mathbf{t}-\Psi$ et $\mathbf{a}-V$. Dans les deux cas, les rôles de la conductivité σ et de la perméabilité μ sont interchangés mais il y a une différence essentielle: σ peut s'annuler alors que μ est toujours supérieur ou égal à μ_0 .

Chapitre 3

Les éléments de Whitney

Les équations de Maxwell décrivent le comportement électromagnétique de tout système. En présence des structures complexes, leur résolution analytique n'est pas concevable. Il est alors nécessaire de recourir à des méthodes de résolution numériques, qui font appel à des techniques de discrétisation. Ces méthodes transforment les équations aux dérivées partielles en systèmes d'équations algébriques dont la solution fournit une approximation des champs électromagnétiques.

La méthode numérique que nous allons considérer dans cette thèse pour la discrétisation spatiale des équations est la méthode des éléments finis [49, 55, 85]. Elle s'adapte aisément à des géométries complexes, contrairement à la méthode des différences finies, et permet le traitement des matériaux à caractéristiques non linéaires à la différence de la méthode des éléments de frontière. Elle est basée sur une double discrétisation: celle du domaine géométrique étudié à l'aide d'un "maillage" ou réunion d'éléments géométriques de formes simples et celle des espaces fonctionnels où on cherche les champs scalaires et vectoriels inconnus à l'aide d'espaces fonctionnels "discrets". Ces espaces sont, dans le cas général d'une approximation conforme, des sous-ensembles de dimension finie des espaces continus et sont construits de façon que leurs éléments soient définis par morceaux, à l'aide d'un ensemble de fonctions à support petit. Ces deux types de discrétisation apparaissent être intimement liés. La précision de la solution obtenue est directement liée à la "finesse" de la discrétisation.

Dans les premiers modèles d'éléments finis, les variables de travail les plus couramment utilisées sont les potentiels scalaires ou vectoriels et les fonctions d'interpolation sont en général des polynômes par morceaux sur les nœuds du maillage. Dans le cas d'une formulation en potentiel vecteur magnétique, par exemple, les trois composantes du potentiel sont interpolées à travers des fonctions polynômiales et continues aux nœuds du maillage. Ce type d'approximation nous permet de résoudre correctement, sous l'imposition d'une condition de jauge pour avoir l'unicité, le problème magnétostatique mais présente des

inconvenients pour le problème des courants induits. La propriété de continuité des trois composantes du champ impose une continuité non physique aux interfaces du domaine où la conductivité change de valeur: ce type d'approximation ne permet pas la discontinuité de la composante normale du champ électrique. Pour surmonter cette difficulté, nous pouvons utiliser la formulation en termes de potentiels combinés [48]: l'addition d'un potentiel scalaire au potentiel vecteur permet de corriger cet excès de continuité aux interfaces du domaine. Les conditions de transmission aux interfaces restent toujours difficiles à imposer.

En 1957, Whitney a inventé une famille d'objets géométriques [135]: il s'agit des "formes de Whitney", des formes différentielles linéaire par morceaux sur un complexe simplicial en dimension d quelconque. Ces objets, introduits à une époque où il n'était guère question d'éléments finis, forment une structure très riche, qui s'avère être le cadre idéal pour comprendre les concepts modernes de formulations variationnelles "à deux champs" et d'éléments finis "mixtes"¹. On les appelle ici "éléments de Whitney" pour cette raison.

Les éléments de Whitney ont été redécouverts par les numériciens à partir de 1975 en relation avec la recherche d'éléments finis mixtes. En 1977, Raviart et Thomas [113] ont introduit les éléments mixtes pour résoudre problèmes elliptiques en deux dimensions. En 1980, Nédélec [100] a généralisé ces éléments en trois dimensions et proposé deux familles d'éléments mixtes: une famille conforme en $H(\text{rot})$ et l'autre en $H(\text{div})$. Avec ces éléments, les degrés de liberté ne peuvent pas être assignés aux nœuds mais seulement aux arêtes, faces et volumes du maillage. Les premières applications des éléments mixtes d'arête au problème des courants induits sont faites par Bossavit et Vérité [23]. En 1985, Mur et de Hoop [99] ont introduit des éléments d'arête \mathbb{P}_1 -complets, c'est-à-dire qui fournissent, contrairement aux éléments d'arête du premier ordre, une approximation linéaire pour chaque composante du champ le long de chaque direction cartésienne. Dans [101], Nédélec a présenté une discussion très générale sur les éléments de ce type. En 1987, à partir du complexe de Whitney, Bossavit [24, 25, 33] a introduit une série d'éléments basés sur la notion de forme différentielle (éléments nodaux, d'arête, de face et de volume) qui sont les éléments de Whitney. Les éléments nodaux font partie des éléments finis de type lagrangien [49] et les éléments d'arête et de face ainsi définis appartiennent aux éléments mixtes de Nédélec [100, 101]. Par rapport aux fonctions de forme, une représentation comme celle qu'on verra avec le complexe de Whitney, a l'avantage de donner explicitement une base des espaces de discrétisation et montre clairement l'inclusion d'un élément dans l'autre. Il faut toutefois noter que la description par fonctions de formes semble convenir mieux aux éléments vectoriels de degré polynômial supérieur à 1 (cf. [101]), et que leur description dans le style de Whitney, à l'aide de fonctions de base clairement

¹Les éléments *mixtes* sont des éléments finis à valeurs vectorielles à continuité "partielle" au passage des frontières entre éléments (continuité de la partie tangentielle ou de la partie normale).

associées à des éléments géométriques du complexe simplicial, est encore un problème ouvert.

A travers les nombreuses applications qui ont été faites depuis 1980, on a pu constater l'adéquation des éléments de Whitney à la résolution numérique des problèmes d'électromagnétisme. C'est en effet dans le langage des formes différentielles que les équations de Maxwell s'expriment le plus naturellement. De plus, l'association entre les formes différentielles et les éléments finis nous guide dans le choix de la formulation, des variables de travail et des éléments finis à utiliser [117]. Le développement de ce point de vue demande des connaissances en géométrie différentielle. Pour une présentation général des éléments de Whitney et de leur "mariage" avec les formes différentielles, voir les Chapitres 3 et 9 dans l'ouvrage [24].

Dans ce chapitre, nous présentons en bref le complexe de Whitney associé à des simplexes (triangles en deux dimensions et tétraèdre en trois dimensions), en mettant l'accent sur les éléments finis nodaux, d'arête, de facette et de volume, qui sont des éléments mixtes, associés à des assemblages d'éléments géométriques différents. Les fonctions de base des espaces d'approximation relatifs à ces éléments finis sont définies et leurs propriétés sont établies. Voir la Section A.1 de l'Annexe pour quelques détails sur les logiciels à éléments finis qu'on a développé.

3.1 Outils de base

Dans le chapitre précédent, on a introduit les équations de Maxwell et les différents modèles magnétostatiques et magnétodynamiques. On a vu intervenir les opérateurs différentiels linéaires qui sont le gradient (grad), le rotationnel (rot) et la divergence (div). Dans cette section, nous rappelons la définition de ces opérateurs et des espaces de Sobolev intervenant ensuite soit dans la définition du complexe de Whitney, soit dans la formulation variationnelle des problèmes aux dérivées partielles que l'on envisage de résoudre numériquement à l'aide de la méthode des éléments finis. Pour une théorie générale des espaces de Sobolev classiques et des formulations variationnelles, voir [41]; pour la définition des opérateurs grad, rot, div, et des espaces de Sobolev associés, en particulier $H(\text{rot}, \Omega)$ et $H(\text{div}, \Omega)$, voir [67].

Espaces fonctionnels – Soit Ω un ensemble ouvert et borné de \mathbb{R}^d avec frontière Γ Lipschitzienne continue². Dans la suite, on note par u une fonction scalaire définie en Ω à

²Un sous-ensemble ouvert Ω de \mathbb{R}^d est à frontière Γ *Lipschitzienne continue* si, pour tout $\mathbf{x} \in \Gamma$, il existe un voisinage \mathcal{V} de \mathbf{x} dans \mathbb{R}^d et un nouveau système de coordonnées $\mathbf{y} = (\mathbf{y}', y_d)$ avec $\mathbf{y}' = (y_1, \dots, y_{d-1})$, tels que:

- dans les nouvelles coordonnées, $\mathcal{V} = \{\mathbf{y} \mid -a_i < y_i < a_i, a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq d\}$;

valeurs dans \mathbb{R} , \mathbf{x} un point de \mathbb{R}^d et par \mathbf{u} une fonction vectorielle définie en Ω à valeurs dans \mathbb{R}^d . En particulier, $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ pour $d = 2$ et $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ pour $d = 3$.

On définit $L^2(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables, de carré sommable sur Ω . Nous lui associons le produit interne, ou produit scalaire, de deux des ses éléments, u et v , noté $(u, v)_{0,\Omega}$ et défini par

$$(u, v)_{0,\Omega} = \int_{\Omega} u v \, d\Omega \quad , \quad u, v \in L^2(\Omega) .$$

La norme correspondante d'un élément $u \in L^2(\Omega)$ est définie par $\|u\|_{0,\Omega} = (u, u)_{0,\Omega}^{1/2}$. Nous considérons également $\mathbf{L}^2(\Omega)$ qui est l'espace des champs de vecteurs $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ dont les composantes sont mesurables et le carré de la norme euclidienne (dans \mathbb{R}^d) est sommable sur Ω . Nous lui associons le produit scalaire de deux des ses éléments \mathbf{u} et \mathbf{v} , noté $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{0,\Omega}$ et défini par

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{0,\Omega} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad , \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) .$$

La norme d'une fonction $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ est $\|\mathbf{u}\|_{0,\Omega} = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{0,\Omega}^{1/2}$. Les espaces $L^2(\Omega)$ et $\mathbf{L}^2(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert et ils peuvent accueillir des champs physiques, caractérisés par une énergie finie. Similairement, on peut définir $L^p(\Omega)$ et $\mathbf{L}^p(\Omega)$ pour tout réel $1 \leq p \leq \infty$, avec quelque différence pour le cas $p = \infty$.

On note par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions infiniment différentiables à support compact dans Ω et par $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = \{\phi|_{\Omega}, \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\}$. Soit $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, appelé aussi l'espace des distributions sur Ω et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit de dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$. On remarque que une fonction u localement intégrable peut s'identifier avec une distribution par

$$\langle u, \phi \rangle = \int_{\Omega} u \phi \, d\Omega \quad , \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) .$$

-
- défini l'ensemble $\mathcal{V}' = \{\mathbf{y}' \mid -a_i < y'_i < a_i, a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq d-1\}$, il existe une fonction Lipschitzienne continue $\phi : \mathcal{V}' \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$|\phi(y_d)| \leq a_d/2, \forall \mathbf{y}' \in \mathcal{V}' ; \quad \Omega \cup \mathcal{V} = \{\mathbf{y} \mid y_d < \phi(\mathbf{y}')\} ; \quad \Gamma \cup \mathcal{V} = \{\mathbf{y} \mid y_d = \phi(\mathbf{y}')\} .$$

Cette définition exprime le fait que Ω peut être défini comme étant la région sous le graphe d'une fonction ϕ , que Γ est représentée par le graphe de cette fonction ϕ et la régularité de Γ est déterminée par celle de ϕ . Il faut remarquer que, avec cette définition, un domaine avec une frontière continue n'est jamais, en tout point de Γ , simultanément des deux côtés de Γ . Tout domaine avec cuspidés ne satisfait pas la définition mais tout domaine avec des coins est acceptable. Un exemple de domaine à frontière Lipschitzienne continue est un polyèdre borné de \mathbb{R}^d .

On peut dire que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une extension du produit interne de $L^2(\Omega)$. Pour définir la dérivée d'une distribution, on introduit le vecteur $\alpha \in \mathbb{N}^d$ comme

$$\begin{aligned} d = 2, \quad \alpha &= (\alpha_x, \alpha_y), \quad |\alpha| = \alpha_x + \alpha_y; \\ d = 3, \quad \alpha &= (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z), \quad |\alpha| = \alpha_x + \alpha_y + \alpha_z. \end{aligned}$$

Pour $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on définit $\partial^\alpha u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par

$$\langle \partial^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Quand u est α fois différentiable, $\partial^\alpha u$ est égal à la dérivée classique

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^{\alpha_x} \partial y^{\alpha_y}} \text{ pour } d = 2 \text{ et } \partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^{\alpha_x} \partial y^{\alpha_y} \partial z^{\alpha_z}} \text{ pour } d = 3.$$

Nous considérons $\partial^\alpha u = u$ pour $|\alpha| = 0$.

Pour tout entier $m \geq 0$ et pour tout réel $1 \leq p \leq \infty$, on introduit l'espace de Sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}.$$

C'est un espace de Banach pour la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_{m,p,\Omega} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u|^p d\Omega \right)^{1/p}, \quad p < \infty; \\ \|u\|_{m,\infty,\Omega} &= \max_{|\alpha| \leq m} (\sup \text{ess} |\partial^\alpha u(\mathbf{x})|, \mathbf{x} \in \Omega), \quad p = \infty. \end{aligned}$$

On utilisera aussi la seminorme

$$\begin{aligned} |u|_{m,p,\Omega} &= \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u|^p d\Omega \right)^{1/p}, \quad p < \infty; \\ |u|_{m,\infty,\Omega} &= \max_{|\alpha|=m} (\sup \text{ess} |\partial^\alpha u(\mathbf{x})|, \mathbf{x} \in \Omega), \quad p = \infty. \end{aligned}$$

Pour $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ est noté $H^m(\Omega)$, avec la norme et la seminorme définies comme avant.

Etant donné que $\mathcal{D}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$, nous définissons $W_0^{m,p}(\Omega)$ comme la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$. Pour tous $1 \leq p \leq \infty$, nous notons $W^{-m,p'}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$ de norme

$$\|u\|_{-m,p',\Omega} = \sup \left\{ \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|_{m,p,\Omega}}, v \in W_0^{m,p}(\Omega), v \neq 0 \right\}$$

avec p' tel que $1/p + 1/p' = 1$.

Enfin, nous rappelons la définition des espaces de Sobolev fractionnaires. Sont donnés un entier $m \geq 0$ et deux réels s et p tels que $1 \leq p < \infty$ et $s = m + \delta$ où $\delta \in \mathbb{R}$ et $0 < \delta < 1$. On introduit l'espace

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m,p}, \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\partial^{\alpha} u(\mathbf{x}) - \partial^{\alpha} u(\mathbf{y})|^p}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\delta p}} d\mathbf{x} d\mathbf{y} < +\infty, \forall |\alpha| = m \right\}.$$

Similairement on définit $W^{s,\infty}(\Omega)$. On peut montrer que $W^{s,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{s,p,\Omega} = \left\{ \|u\|_{m,p,\Omega}^p + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\partial^{\alpha} u(\mathbf{x}) - \partial^{\alpha} u(\mathbf{y})|^p}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\delta p}} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \right\}^{1/p},$$

avec les usuelles modifications pour $p = \infty$. Pour $s > 0$, on définit $W_0^{s,p}(\Omega)$ comme la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{s,p}(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{s,p,\Omega}$; on note par $W^{-s,p'}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{s,p}(\Omega)$ avec p et p' tels que $1/p + 1/p' = 1$.

Il est possible de définir l'équivalent vectoriel des espaces fonctionnels ainsi introduit en faisant des changements évidents, comme il y a eu pour passer de $L^2(\Omega)$ à $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Opérateurs différentiels et domaine d'application – Nous allons maintenant rappeler les définitions des opérateurs grad, rot et div et leur domaines d'application. Pour tout $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathbf{u} \in (\mathcal{D}'(\Omega))^d$, si $d = 2$, on a

$$\text{grad } u = (\partial_x u, \partial_y u); \quad (3.1)$$

$$\text{rot } u = (\partial_y u, -\partial_x u); \quad (3.2)$$

$$\text{rot } \mathbf{u} = \partial_x u_y - \partial_y u_x; \quad (3.3)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = \partial_x u_x + \partial_y u_y; \quad (3.4)$$

et, pour $d = 3$, nous avons

$$\text{grad } u = (\partial_x u, \partial_y u, \partial_z u); \quad (3.5)$$

$$\text{rot } \mathbf{u} = (\partial_y u_z - \partial_z u_y, \partial_z u_x - \partial_x u_z, \partial_x u_y - \partial_y u_x); \quad (3.6)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = \partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z. \quad (3.7)$$

A travers une procédure comme celle décrite dans [34] (Chapitre 5), nous pouvons généraliser ces opérateurs qui sont définis pour des champs scalaires ou vectoriels différentiables en sens classique, à des opérateurs en sens faible. Une fonction aura le gradient en sens faible

même si elle n'est pas différentiable en sens classique. Dans la suite, grad, rot et div sont à considérer en sens faible.

Les espaces qui correspondent aux domaines des opérateurs grad, rot et div sont les suivants (pour le domaine de l'opérateur rot scalaire ou vectoriel, on gardera la même notation):

$$\begin{aligned}
H(\text{grad}, \Omega) &= \{u \in L^2(\Omega), \text{grad } u \in \mathbf{L}^2(\Omega)\} = H^1(\Omega), & \text{pour (3.1) et (3.5)} \\
H(\text{rot}, \Omega) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \text{rot } \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}, & \text{pour (3.6)} \\
H(\text{rot}, \Omega) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \text{rot } \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\}, & \text{pour (3.3)} \\
H(\text{rot}, \Omega) &= \{u \in L^2(\Omega), \text{rot } u \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}, & \text{pour (3.2)} \\
H(\text{div}, \Omega) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \text{div } \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\}, & \text{pour (3.4) et (3.7)}.
\end{aligned}$$

Les espaces $H^1(\Omega)$, $H(\text{rot}, \Omega)$ et $H(\text{div}, \Omega)$ sont des sous-ensembles denses de $L^2(\Omega)$ et $\mathbf{L}^2(\Omega)$ mais ils ne sont pas complets par rapport aux produits scalaires de $L^2(\Omega)$ et $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Pour les rendre complets, et donc des espaces de Hilbert, ils faut y définir des nouveaux produits scalaires.

$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{1, \Omega} = (u, v)_{0, \Omega} + (\text{grad } u, \text{grad } v)_{0, \Omega}, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

La norme correspondante est $\|u\|_{1, \Omega} = (u, u)_{1, \Omega}^{1/2}$; on dénote par $H_0^1(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{1, \Omega}$. $H(\text{rot}, \Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\text{rot}, \Omega} &= (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{0, \Omega} + (\text{rot } \mathbf{u}, \text{rot } \mathbf{v})_{0, \Omega}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \\
(u, v)_{\text{rot}, \Omega} &= (u, v)_{0, \Omega} + (\text{rot } u, \text{rot } v)_{0, \Omega}, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).
\end{aligned}$$

Les normes correspondantes sont $\|\mathbf{u}\|_{\text{rot}, \Omega} = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\text{rot}, \Omega}^{1/2}$ et $\|u\|_{\text{rot}, \Omega} = (u, u)_{\text{rot}, \Omega}^{1/2}$; on dénote par $H_0(\text{rot}, \Omega)$ la fermeture de $(\mathcal{D}(\Omega))^d$, dans le premier cas, de $\mathcal{D}(\Omega)$, dans le second cas, dans $H(\text{rot}, \Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{\text{rot}, \Omega}$ ainsi définie. Enfin, $H(\text{div}, \Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\text{div}, \Omega} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{0, \Omega} + (\text{div } \mathbf{u}, \text{div } \mathbf{v})_{0, \Omega}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega).$$

La norme correspondante est $\|\mathbf{u}\|_{\text{div}, \Omega} = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\text{div}, \Omega}^{1/2}$; on dénote par $H_0(\text{div}, \Omega)$ la fermeture de $(\mathcal{D}(\Omega))^d$ dans $H(\text{div}, \Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{\text{div}, \Omega}$.

Les normes ainsi définies sont généralement appelées les normes du graphique puisqu'elle combinent les normes des deux éléments du graphique des opérateurs: pour exemple, sur l'espace $H^1(\Omega)$, la norme $\|\cdot\|_{1, \Omega}$ fait intervenir les éléments de la couple $\{u, \text{grad } u\}$ qui

est le graphique de l'opérateur grad. On a donc que les domaines $H^1(\Omega)$, $H(\text{rot}, \Omega)$ et $H(\text{div}, \Omega)$ des opérateurs grad, rot et div munis des normes du graphique sont des espaces de Hilbert où les opérateurs grad, rot et div sont continus.

Formules de Green et conditions aux limites – Nous rappelons les formules de Green que l'on va utiliser dans la suite pour passer de la formulation dite forte du problème en considération à sa formulation dite faible, bien adaptée à la discrétisation par la méthode des éléments finis.

Soit \mathbf{n} le vecteur unitaire, extérieur et orthogonal à Γ : ce vecteur est univoquement défini en deux et trois dimensions. Ce n'est pas le cas pour le vecteur unitaire tangent $\boldsymbol{\tau}$. En deux dimensions, si $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$, on a $\boldsymbol{\tau} = (-n_y, n_x)$. En trois dimensions, pour un vecteur unitaire $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ donné, on a les deux vecteurs tangents $\mathbf{n} \times \mathbf{u}$ et $(\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{n}$.

Pour deux fonctions u et v dans $C^1(\overline{\Omega})$, on a:

$$\int_{\Omega} u (\partial_x v) ds + \int_{\Omega} (\partial_x u) v ds = \int_{\Gamma} u|_{\Gamma} v|_{\Gamma} n_x ds \quad (3.8)$$

et de même avec ∂_y et ∂_z . Dans (3.8), les deux termes de gauche sont définis aussi pour des fonctions u et v dans $H^1(\Omega)$. Par conséquent, nous pouvons définir la fonction $u|_{\Gamma}$ pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$. On introduit ainsi l'opérateur **trace sur** Γ , noté γ_0 , comme étant l'application

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) &\rightarrow H^{1/2}(\Gamma) \\ u &\rightarrow u|_{\Gamma}. \end{aligned}$$

En particulier, $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma} = 0\}$. La formule de Green (3.8) peut donc s'écrire pour toute fonction $u, v \in H^1(\Omega)$.

On peut introduire une formule de Green pour l'opérateur Laplacien valable pour tout $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et pour tout $v \in C^1(\overline{\Omega})$:

$$(\text{grad } u, \text{grad } v)_{0,\Omega} + (\Delta u, v)_{0,\Omega} = (\partial_n u, v)_{0,\Gamma} \quad (3.9)$$

où $\partial_n u = \text{grad } u \cdot \mathbf{n}$ et l'opérateur Laplacien Δ est défini par

$$\begin{aligned} d = 2, \quad \Delta u &= \partial_{xx} u + \partial_{yy} u, \\ d = 3, \quad \Delta u &= \partial_{xx} u + \partial_{yy} u + \partial_{zz} u. \end{aligned}$$

Nous rappelons que

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot } u) &= -\Delta u, & d = 2, \\ \text{rot}(\text{rot } \mathbf{u}) &= -\Delta \mathbf{u} + \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}), & d = 2, 3 \end{aligned}$$

où $\Delta \mathbf{u}$ est un vecteur ayant comme composantes les laplaciens des composantes du vecteur \mathbf{u} . Dans (3.9), les deux termes de gauche sont définis pour tout $u \in H^1(\Omega)$ avec Δu dans $L^2(\Omega)$ et pour tout $v \in H^1(\Omega)$. Par conséquent, nous pouvons étendre la définition de $(\partial_n u)|_\Gamma$ à toute fonction $u \in H^1(\Omega)$ avec $\Delta u \in L^2(\Omega)$. On introduit ainsi l'opérateur **trace de la dérivée normale sur Γ** , noté γ_1 , comme étant l'application

$$\begin{aligned} \gamma_1 : H^1(\Omega) &\rightarrow H^{-1/2}(\Gamma) \\ u &\rightarrow (\partial_n u)|_\Gamma. \end{aligned}$$

La formule de Green (3.9) peut donc s'écrire pour toute fonction $u, v \in H^1(\Omega)$ avec $\Delta u \in L^2(\Omega)$ de la façon suivante:

$$(\text{grad } u, \text{grad } v)_{0,\Omega} + (\Delta u, v)_{0,\Omega} = \langle \partial_n u, v \rangle_\Gamma, \quad (3.10)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ est le produit de dualité entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ et $H^{1/2}(\Gamma)$.

Les conditions au bord qui sont en général imposées pour des champs scalaires ou bien pour une des composantes des champs vectoriels sont relatives à la trace de ces fonctions ou de leurs dérivées normales sur Γ .

La formule de Green dite de type grad-div dans Ω est définie pour tout $\mathbf{u} \in (C^1(\overline{\Omega}))^d$ et pour tout $v \in C^1(\overline{\Omega})$ et elle est donnée par

$$(\mathbf{u}, \text{grad } v)_{0,\Omega} + (\text{div } \mathbf{u}, v)_{0,\Omega} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, v)_{0,\Gamma}. \quad (3.11)$$

Dans (3.11), les deux termes de gauche sont définis pour toute fonction $\mathbf{u} \in H(\text{div}, \Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$. Par conséquent, nous pouvons étendre la définition de $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_\Gamma$ à toute fonction $\mathbf{u} \in H(\text{div}, \Omega)$. On introduit ainsi l'opérateur **trace normale sur Γ** , noté $\gamma_{\mathbf{n}}$, comme étant l'application

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbf{n}} : H(\text{div}, \Omega) &\rightarrow H^{-1/2}(\Gamma) \\ \mathbf{u} &\rightarrow (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})|_\Gamma. \end{aligned}$$

En particulier, $H_0(\text{div}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in H(\text{div}, \Omega), (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})|_\Gamma = 0\}$. La formule de Green (3.11) est valable pour des fonctions $\mathbf{u} \in H(\text{div}, \Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$ et a la forme suivante

$$(\mathbf{u}, \text{grad } v)_{0,\Omega} + (\text{div } \mathbf{u}, v)_{0,\Omega} = \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, v \rangle_\Gamma \quad (3.12)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ est le produit de dualité entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ et $H^{1/2}(\Gamma)$.

Assigner la valeur de la trace normale sur Γ correspond à fixer le flux par unité de surface à travers Γ . On trouve cette condition quand on travaille avec les champs inductions ou le vecteur densité de courant.

La formule de Green dite de type rot-rot dans Ω est définie pour tout $\mathbf{u} \in (C^1(\overline{\Omega}))^d$ et

$$d = 2, \quad (\text{rot } \mathbf{u}, v)_{0,\Omega} - (\mathbf{u}, \text{rot } v)_{0,\Omega} = (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}, v)_{0,\Gamma}, \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}), \quad (3.13)$$

$$d = 3, \quad (\text{rot } \mathbf{u}, \mathbf{v})_{0,\Omega} - (\mathbf{u}, \text{rot } \mathbf{v})_{0,\Omega} = (\mathbf{u} \times \mathbf{n}, \mathbf{v})_{0,\Gamma}, \quad \forall \mathbf{v} \in (C^1(\overline{\Omega}))^3. \quad (3.14)$$

Dans (3.13) (resp. (3.14)), le terme de gauche a un sens pour tout $\mathbf{u} \in H(\text{rot}, \Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$ (resp. $\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3$). Par conséquent, on peut définir l'opérateur **trace tangentielle sur Γ** , noté $\gamma_{\boldsymbol{\tau}}$, par l'application

$$\begin{aligned} \gamma_{\boldsymbol{\tau}} : H(\text{rot}, \Omega) &\rightarrow H^{-1/2}(\Gamma) \quad d=2 \quad \text{ou} \quad (H^{-1/2}(\Gamma))^3 \quad d=3 \\ \mathbf{u} &\rightarrow (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau})|_{\Gamma} \quad d=2 \quad \text{ou} \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{n})|_{\Gamma} \quad d=3. \end{aligned}$$

En particulier, $H_0(\text{rot}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in H(\text{rot}, \Omega) \mid \gamma_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$. Les formules de Green (3.13) et (3.14) sont donc valables pour tout $\mathbf{u} \in H(\text{rot}, \Omega)$ et ont la forme suivante:

$$d = 2, \quad (\text{rot } \mathbf{u}, v)_{0,\Omega} - (\mathbf{u}, \text{rot } v)_{0,\Omega} = \langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}, v \rangle_{\Gamma}, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad (3.15)$$

$$d = 3, \quad (\text{rot } \mathbf{u}, \mathbf{v})_{0,\Omega} - (\mathbf{u}, \text{rot } \mathbf{v})_{0,\Omega} = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma}, \quad \forall \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3 \quad (3.16)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ est le produit de dualité entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ et $H^{1/2}(\Gamma)$ pour $d=2$ et entre $(H^{-1/2}(\Gamma))^3$ et $(H^{1/2}(\Gamma))^3$ pour $d=3$.

La condition à la limite consistant à fixer la valeur de la trace tangentielle Γ est en général utilisée quand on travaille avec les champs électrique ou magnétique ou les potentiels vecteurs.

On observe que la composante tangentielle, définie par

$$\mathbf{u}_T = (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{n} = \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$$

est telle que

$$\mathbf{u}_T \times \mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{n}.$$

Par conséquent, un vecteur $\mathbf{u} \in H(\text{rot}, \Omega)$ vérifie $(\mathbf{n} \times \mathbf{u})|_{\Gamma} = \mathbf{0}$ si et seulement si sa composante tangentielle \mathbf{u}_T est nulle sur Γ .

En outre, en deux dimensions, on observe que la fonction $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ appartient à l'espace $H(\text{rot}, \Omega)$ si et seulement si la fonction $\mathbf{v} = (-u_y, u_x)$ appartient à l'espace $H(\text{div}, \Omega)$. En particulier, $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$. Certaines propriétés de l'espace $H(\text{div}, \Omega)$, voir [67] pour les détails, sont donc valables pour l'espace $H(\text{rot}, \Omega)$.

Formulation faible – Considérons un problème aux dérivées partielles de la forme

$$\begin{aligned} Lu &= f && \text{dans } \Omega \\ Bu &= g && \text{sur } \Gamma \end{aligned} \quad (3.17)$$

où L est un opérateur différentiel d'ordre n , B est un opérateur qui définit une condition à la limite, f et g sont des fonctions respectivement définies sur Ω et Γ et u une fonction inconnue d'un espace fonctionnel U sur $\overline{\Omega}$, i.e. $u \in U(\overline{\Omega})$. Le problème (3.17) constitue ce qu'on appelle une **formulation forte**. Une fonction $u \in U(\overline{\Omega})$ qui vérifie ce problème est appelée **solution forte**. En particulier, puisque L est d'ordre n , la fonction u doit être $n - 1$ fois dérivable de façon continue, i.e. $u \in \mathcal{C}^{n-1}(\Omega)$. Pour aboutir à une **formulation faible** du problème (3.17), on commence par multiplier l'équation du problème (3.17) par une fonction test v ; ensuite, on intègre sur le domaine Ω et on applique une des formules de Green précédentes pour baisser l'ordre de dérivation sur la fonction inconnue. La formulation faible du problème (3.17) est définie par: trouver $u \in W(\Omega)$ tel que

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V(\Omega), \quad (3.18)$$

où $a(., .)$ est une forme bilinéaire sur $W \times V$ liée à l'opérateur L par la formule de Green utilisée, $F(.)$ la fonctionnelle linéaire définie sur $V(\Omega)$ par

$$F(v) = (f, v) - \int_{\Gamma} Q_g(v) d\Gamma,$$

et Q_g une forme linéaire en v qui dépend de g . L'espace $W(\Omega)$ est l'ensemble des solutions admissibles et $V(\Omega)$ est un espace de fonctions test; les deux espaces sont de nature telle que toutes les opérations contenues dans (3.18) ont un sens de point de vue mathématique. Dans un grand nombre de cas, nous avons $W(\Omega) \equiv V(\Omega)$. Les espaces $W(\Omega)$ et $V(\Omega)$ sont définis en rapport avec l'opérateur L et en particulier en rapport avec la condition à la limite $Bu = g$ sur $\partial\Omega$. Nous remarquons que la condition à la limite sur la fonction u peut être imposée directement dans l'espace $W(\Omega)$ (on parle de condition essentielle) ou bien être satisfaite à travers le choix de la forme bilinéaire $a(., .)$ définie sur $W(\Omega) \times V(\Omega)$ et de la fonctionnelle $F(.)$ définie sur $V(\Omega)$ (on parle de condition naturelle). Une fonction u qui satisfait l'équation (3.18) pour toute fonction test $v \in V(\Omega)$ est appelée **solution faible**. Des définitions équivalentes des formulations forte et faible sont données dans [41] ou dans [85].

La même formule de Green utilisée pour passer de la formulation forte à la formulation faible, peut s'appliquer dans (3.18) de façon à passer de $a(., .)$ à L , ce qui revient en général à effectuer une intégration par partie. Il est alors possible de retrouver, grâce à un choix particulier des fonctions test, les différents éléments de la forme forte du problème, i.e. l'équation et la condition limite de (3.17). Il est souvent possible de vérifier qu'une solution forte est également une solution faible mais le contraire n'est pas toujours immédiat car la solution faible doit être suffisamment régulière pour être définie au sens classique. Parmi les avantages mathématiques des formulations faibles il y a le fait qu'elles permettent en général de prouver l'existence d'une solution plus aisément que les formulations fortes

(telles solutions peuvent en effet ne pas satisfaire les équations (3.17) de façon ponctuelle) et qu'elles sont bien adaptées à l'application de la méthode à éléments finis qu'on envisage d'utiliser dans la suite.

Les espaces continus $W(\Omega)$ et $V(\Omega)$ sont en général de dimension infinie, i.e. leur éléments sont univoquement décrits par un nombre infini de paramètres. Le principe de base de toute méthode numérique est de discrétiser le problème (3.18) afin d'obtenir un problème discret analogue, caractérisé par un nombre fini d'inconnues que l'on appelle degrés de liberté. Ce processus de discrétisation consiste à remplacer les espaces fonctionnels $W(\Omega)$ et $V(\Omega)$ par des espaces fonctionnels discrets $W_h(\Omega)$ et $V_h(\Omega)$ de dimension finie N_h . Nous parlerons d'approximation conforme du problème (3.18) quand les espaces discrets sont des sous-ensembles des espaces continus $W(\Omega)$ et $V(\Omega)$ et d'approximation non-conforme en cas contraire. Le problème discret à résoudre est le suivant: trouver $u_h \in W_h(\Omega)$ tel que

$$a_h(u_h, v_h) = F_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_h(\Omega) \quad (3.19)$$

où l'application $a_h(.,.)$ est une approximation de $a(.,.)$ (éventuellement $a(.,.)$ elle-même) qui définit une forme bilinéaire sur $W_h(\Omega) \times V_h(\Omega)$ et $F_h(.)$ est une approximation de $F(.)$ (éventuellement $F(.)$ elle-même) qui définit une fonctionnelle linéaire sur $V_h(\Omega)$.

Du point de vue algébrique, on commence par introduire deux bases $\{\psi_i\}_{i=1, N_h}$ et $\{\phi_j\}_{j=1, N_h}$ respectivement des espaces $W_h(\Omega)$ et $V_h(\Omega)$. En écrivant u_h et v_h sur la base de l'espace d'appartenance, le problème discret (3.19) est équivalent à un système algébrique de dimension N_h de la forme suivante

$$A\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (3.20)$$

où les inconnues, i.e. les composantes du vecteur \mathbf{U} , sont les coefficients de la représentation de u_h sur la base choisie. La matrice A , appelée matrice de raideur, a pour éléments $A_{ij} = a_h(\phi_j, \psi_i)$ ($i, j = 1, N_h$) et le vecteur \mathbf{F} a pour composantes $F_i = F_h(\phi_i)$ ($i = 1, N_h$). Le choix de l'algorithme de résolution [50, 70] pour le système (3.20) est le dernier pas de l'approximation numérique de la solution du problème (3.17). Si l'opérateur L contient une dérivation en temps, celle-ci sera discrétisée à l'aide de schémas d'intégration basés sur la méthode des différences finies [88].

Les résultats d'existence et d'unicité de la solution continue u et approchée u_h sont basés sur les propriétés mathématiques des fonctionnelles continues ($a(.,.)$, $F(.)$) et discrètes ($a_h(.,.)$, $F_h(.)$) impliquées et des espaces continus ($W(\Omega)$, $V(\Omega)$) et discrets ($W_h(\Omega)$, $V_h(\Omega)$) où les problèmes (3.18) et (3.19) sont formulés (voir dans l'ouvrage [105], les Chapitres 5 et 6). Ces résultats seront vérifiés ou rappelés pour les problèmes liés à la modélisation des courants de Foucault dans les Chapitres 6,7,8 de cette Thèse.

Nous allons maintenant définir les espaces discrets quand on travaille avec les éléments de Whitney. Pour mieux comprendre le complexe de Whitney, nous visitons d'abord le concept de forme différentielle en électromagnétisme.

3.2 Formes différentielles en électromagnétisme

Dans la Section 2.1.1 nous avons vu que les intégrales des différentes variables scalaires et vectorielles qui représentent des grandeurs physiques, ont des dimensions différentes. Dans l'analyse de la géométrie différentielle, ces différentes variables correspondent à des formes différentielles de degrés différents [25, 47, 117]. Dans un langage simple, une forme différentielle de degré p , ou p -forme, est une expression qui apparaît dans une intégrale sur un domaine de dimension p . Dans un espace à trois dimensions, le degré p des formes varie entre 0 et 3 et il est possible de définir les formes différentielles par les opérations du calcul vectoriel.

Pour introduire les formes différentielles, nous examinons deux champs vecteurs (\mathbf{E} et \mathbf{J} , par exemple) et deux champs scalaires (ρ et v , par exemple). Dans la Section 2.1.1 on a mentionné le fait que le champ électrique est lié à une intégrale de ligne et que la densité de courant de conduction est liée au intégrale de surface. La densité de charge est intégrée sur un volume et le potentiel scalaire est “intégré” en un point. Ces vecteurs et scalaires appartiennent à quatre groupes de formes différentielles de degrés différents. Prenons par exemple le champ électrique: physiquement, il représente la force qui agit sur une charge électrique unitaire au point \mathbf{x} . Sa valeur est mesurée à travers le travail fait pour déplacer la charge le long d'un petit segment $d\mathbf{x}$, i.e.

$$e = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x}.$$

Le travail global le long d'un contour γ , $\int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x}$, représente une force électromotrice. Le champ \mathbf{E} est identifié avec une 1-forme, indiquée par e . Considérons la densité de courant de conduction \mathbf{J} , le courant à travers une petite surface orientée définie par le vecteur $(d\mathbf{x} \times d\mathbf{y})$ au point \mathbf{x} est

$$j = \mathbf{J} \cdot (d\mathbf{x} \times d\mathbf{y}).$$

Le courant global à travers une surface Γ est donné par $\int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot (d\mathbf{x} \times d\mathbf{y})$. Cette expression définit une 2-forme. Si l'on considère maintenant la charge électrique contenue dans un petit volume orienté défini par $(d\mathbf{x} \times d\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{z}$ au point \mathbf{x} , elle est donnée par

$$q = \rho(d\mathbf{x} \times d\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{z}.$$

où ρ représente la densité volumique. L'intégrale sur un volume Ω , $\int_{\Omega} \rho(d\mathbf{x} \times d\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{z}$, donne la charge globale contenue dans Ω et définit une 3-forme. Enfin, le potentiel scalaire v est identifié avec une 0-forme. Il est intégré sur “un domaine de dimension nulle”. L'intégrale de v au point \mathbf{x} , $v = \int_{\mathbf{x}} v$, est la valeur de v en \mathbf{x} . Un avantage des formes différentielles est d'être indépendantes du système métrique et d'avoir pour unité physique la quantité mesurable. Dans [24], les différentes variables en électromagnétisme sont classées suivant leur formes différentielles avec les unités physiques correspondantes.

Deux opérateurs permettent de passer d'une forme d'un degré à l'autre. Le premier est l'opérateur d qui définit la dérivation extérieure et permet de passer d'une forme à une autre de degré supérieur:

$$p\text{-forme} \xrightarrow{d} (p+1)\text{-forme}.$$

En trois dimensions, l'opérateur d représente les opérateurs grad, rot et div. Les formules $\text{rot grad} = 0$ et $\text{div rot} = 0$ sont remplacées par $d \circ d = 0$, i.e. l'opérateur d appliqué deux fois donne zéro. Le second opérateur, appelé transformation de Hodge et dénoté par $*$, transforme une p -forme dans une $(n-p)$ -forme, où n est la dimension de l'espace:

$$p\text{-forme} \xrightarrow{*} (n-p)\text{-forme}.$$

Les deux opérateurs ainsi définis portent à construire un diagramme à quatre niveaux et deux colonnes (Figure 3.1). Dans ce diagramme, à chaque niveau est associé une p -forme et à chaque colonne un système d'équations. Les deux niveaux successifs d'une colonne sont liés par l'opération de dérivation d (div, grad ou rot) et les deux formes du même niveau sont liées par la transformation de Hodge $*$ (loi de comportement). Les équations de Maxwell peuvent être représentées par le diagramme de Tonti (voir Chapitre 9 dans [24]).

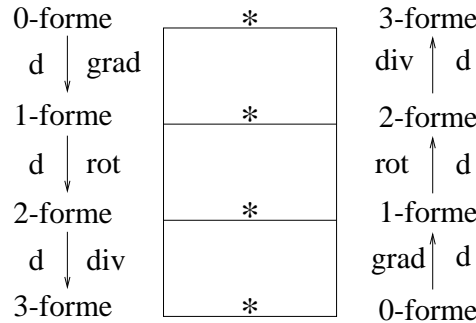


Figure 3.1: Diagramme de Tonti.

La Figure 3.2 montre, par exemple, le diagramme de Tonti pour le problème de courants induits (la charge électrique et le courant de déplacement sont négligés) où les différents vecteurs et scalaires sont positionnés en fonction de leur formes, des opérateurs d et $*$. Afin de tenir compte de la dérivation temporelle, le diagramme est constitué par deux plans parallèles et il est présenté en trois dimensions. Dans le diagramme de Tonti, les deux opérateurs au même niveau horizontal sont adjoints. Les séquences de gauche et droite du diagramme correspondent à deux systèmes duaux: celle de gauche décrit les lois

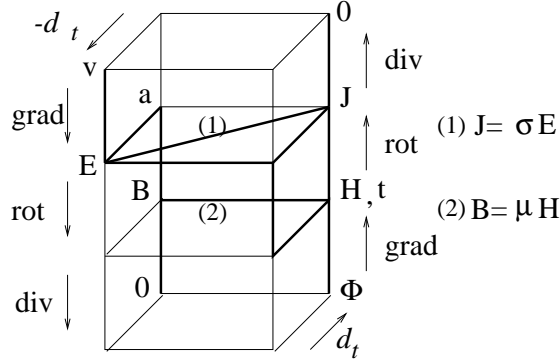


Figure 3.2: Diagramme de Tonti pour le problème des courants induits.

de Faraday et de conservation de flux, celle de droite décrit les lois d'Ampère et de Gauss. Les deux systèmes sont reliés par les lois de comportement (transformation de Hodge).

La structure ainsi définie peut être résumée à l'aide du tableau suivant:

degré	opérateur	domaine
0	grad	$H^1(\Omega) = F^0$
1	rot	$H(\text{rot}, \Omega) = F^1$
2	div	$H(\text{div}, \Omega) = F^2$

Les domaines des opérateurs ont été construits de façon à satisfaire les relations

$$\text{grad}(F^0) \subset F^1 \quad , \quad \text{rot}(F^1) \subset F^2 \quad (3.21)$$

c'est-à-dire $\text{image}(\text{grad}) \subset \text{dom}(\text{rot})$ et $\text{image}(\text{rot}) \subset \text{dom}(\text{div})$. Les opérateurs définissent des applications de $F^p \rightarrow F^{p+1}$ ($p = 0, 1, 2$); de ce fait, ils "lient" les espaces fonctionnels entre eux de façon à former une suite

$$F^0 \xrightarrow{\text{grad}} F^1 \xrightarrow{\text{rot}} F^2 \xrightarrow{\text{div}} F^3 .$$

En général on a les inclusions suivantes:

$$\begin{aligned} \text{grad}(F^0) &\subset \ker(\text{rot}) \quad \text{étant donné que} \quad \text{rot}(\text{grad}) = 0 , \\ \text{rot}(F^1) &\subset \ker(\text{div}) \quad \text{étant donné que} \quad \text{div}(\text{rot}) = 0 . \end{aligned}$$

Le point le plus important contenu dans le Lemme de Poincaré est le fait suivant: dans le cas où Ω est un domaine contractile, ces inclusions deviennent des égalités et la suite est dite exacte, i.e.

$$\text{grad}(F^0) = \ker(\text{rot}) \quad , \quad \text{rot}(F^1) = \ker(\text{div}) .$$

En particulier, la suite est exacte au niveau 1 (première égalité) et au niveau 2 (deuxième égalité). Pour les opérateurs duaux, indiqués dans la colonne de droite sur le diagramme de Tonti en Figure 3.1, nous avons des relations similaires à celle de la structure de base. Nous retrouverons cette structure au niveau discret avec le complexe de Whitney [27].

Quand la suite n'est pas exacte, c'est-à-dire quand les espaces quotients

$$\ker(\text{rot}, F^1)/\text{grad}(F^0) \text{ , } \ker(\text{div}, F^2)/\text{rot}(F^1)$$

ont une dimension non nulle, on peut supposer que le domaine Ω présente des “circuits” ou des “trous”. La dimension du premier espace quotient est appelée *nombre de Betti de dimension 1* (noté b_1): elle est égale à l'ordre du groupe de homotopie du domaine d'étude. La dimension du deuxième espace quotient est dite *nombre de Betti de dimension 2* (noté b_2): elle est égale au nombre de composantes connexes de la frontière du domaine d'étude moins un. En général, les nombres de Betti b_p ($p = 0, 1, 2, 3$) sont définis par la relation $b_p = \dim(\ker(d, F^p)/d(F^{p-1}))$ où d représente un des opérateurs grad, rot, div. Ces nombres caractérisent tout domaine homeomorphe à Ω (i.e. ils sont des invariants topologiques). L'entier $\chi = b_0 - b_1 + b_2 - b_3$ est connu sous le nom de *caractéristique de Euler-Poincaré* du domaine Ω (voir le Chapitre 6 de l'ouvrage [66], à partir de la page 198). La constante $\chi(\Omega)$ est égale à 0 ou 1 ou 2; pour les régions contractiles, elle vaut 1. La suite précédente est un exemple de “objet” dont on s'occupe en topologie algébrique (voir pour exemple [80, 71]), secteur de la mathématique dans lequel on fait le lien entre des objets algébriques (invariants par homeomorphisme) et les espaces topologiques, afin d'étudier la topologie à travers des méthodes algébriques.

3.3 Complexe de Whitney

La construction d'espaces d'éléments finis nécessite avant tout une discrétisation spatiale, ou maillage, du domaine étudié. Ensuite, des fonctions ou champs de vecteurs associés aux différentes entités géométriques du maillage (nœuds, arêtes, facettes, volumes) sont définis. Ceux-ci constituent des bases pour des espaces d'approximation W^i , $i = 0, 3$. Il y a une famille de formes différentielles associée au maillage, appelées formes de Whitney. Ce sont des fonctions polynômiales de premier ordre définies sur les tétraèdres et satisfaisant une certaine condition de continuité aux interfaces des éléments. Une forme de Whitney d'ordre p ($p = 0, 1, 2, 3$) est définie par son intégrale sur un p -simplexe (avec 0-simplexe: nœud, 1-simplexe: arête, 2-simplexe: facette, 3-simplexe: volume). Les éléments correspondant aux formes de Whitney sont appelés éléments de Whitney.

Un d -simplexe K de \mathbb{R}^d est l'enveloppe convexe de $d + 1$ points \mathbf{x}_i ($1 \leq i \leq d + 1$), appelés sommets de K , qui ne sont pas dans un même hyperplan de \mathbb{R}^d . Par exemple,

les 2-simplexes sont des triangles non dégénérés et les 3-simplexes sont des tétraèdres non dégénérés. Pour chaque d -simplexe K ($d \geq 2$), on définit deux quantités: le diamètre de K , noté h_K et le diamètre de la boule sphérique inscrite dans K , noté ρ_K (voir Figure 3.3). La régularité de K est mesurée par le rapport $\delta_K = h_K/\rho_K$.

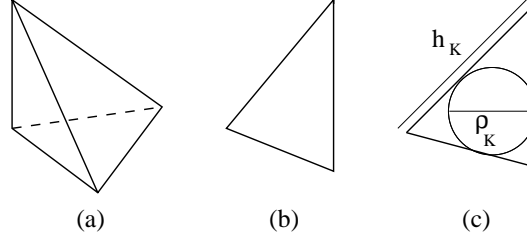


Figure 3.3: Exemple de 3-simplexe (a), de 2-simplexe (b) et définition des quantités ρ_K et h_K pour un 2-simplexe.

Supposons que, associée au domaine d'étude Ω , soit donné un ensemble fini \mathcal{T}_h de d -simplexes K non dégénérés, avec $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ et

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K \quad , \quad K_m^\circ \cap K_n^\circ = \emptyset \quad , \quad \forall K_m, K_n \in \mathcal{T}_h .$$

On suppose de plus que pour chaque triangle de \mathcal{T}_h , deux éléments géométriques quelconques ont en commun, soit une facette, ou une arête, ou un nœud, ou bien sont disjoints, c'est-à-dire

$$\partial K_m \cap \partial K_n = \begin{cases} \text{soit une face } f \text{ entière de } K_m \text{ et } K_n \text{ (} d = 3 \text{),} \\ \text{soit une arête } a \text{ entière de } K_m \text{ et } K_n \text{ (} d \leq 3 \text{),} \\ \text{soit un sommet } \mathbf{x} \text{ de } K_m \text{ et } K_n \text{ (} d \leq 3 \text{),} \\ \text{soit } \emptyset . \end{cases}$$

Une telle décomposition du domaine est appelée **maillage** ou **triangulation** de $\overline{\Omega}$ (voir Figure 3.4). Les éléments de \mathcal{T}_h sont appelés volumes et leurs sommets constituent les nœuds du maillage.

Une triangulation \mathcal{T}_h de $\overline{\Omega}$ est dite **régulière**, pour $h \rightarrow 0$, s'il existe une constante $\delta > 0$ indépendante de h et de K telle que

$$\delta_K \leq \delta \quad , \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$$

et elle est dite **quasi-uniforme** pour $h \rightarrow 0$, si, en plus, il existe une autre constante $\tau > 0$ tel que

$$\tau h \leq h_K \leq \delta \rho_K \quad , \quad \forall K \in \mathcal{T}_h .$$

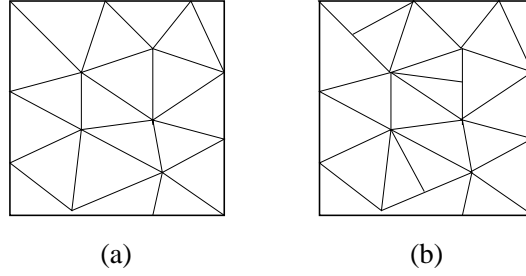


Figure 3.4: Exemple de triangulation admissible (a) et non admissible (b) dans un carré.

On note par \mathcal{N} , \mathcal{A} , \mathcal{F} , \mathcal{V} respectivement les ensembles des nœuds, des arêtes, des facettes, des volumes; ils ont dimension N , A , F , V . Nous désignons le i ème nœud du maillage par \mathbf{x}_i ou bien par i . Les arêtes et facettes peuvent être définies par des ensembles ordonnés de nœuds. Nous désignons une arête $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$ par $a = \{i, j\}$, une facette triangulaire $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k \rangle$ par $f = \{i, j, k\}$ et un volume $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l \rangle$ par $K = \{i, j, k, l\}$ ($i, j, k, l \in \mathbb{N}$), dont un exemple est donné en Figure 3.5.

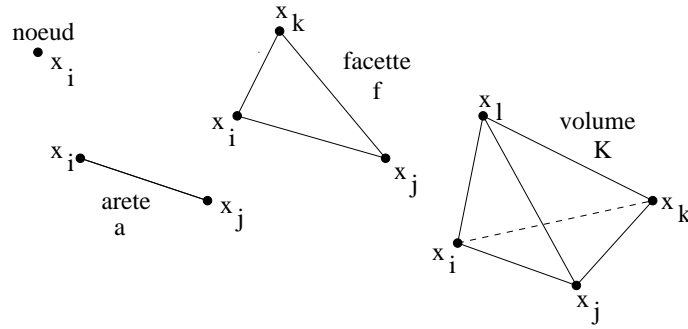


Figure 3.5: Simplexes de dimension 0 (nœud), 1 (arête), 2 (facette) et 3 (volume).

Un élément fini est défini par le triplet (K, P_K, Σ_K) où:

- K sous-ensemble de \mathbb{R}^d ($d = 2$ ou 3), compact, avec $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$;
- P_K est un espace fonctionnel de dimension finie n_K , défini sur K ;
- Σ_K est un ensemble de n_K degrés de liberté représentés par n_K fonctionnelles linéaires α , définies sur l'espace P_K à valeurs dans \mathbb{R} ;
- de plus, il faut qu'une fonction quelconque $u \in P_K$ puisse être déterminée de façon unique grâce aux degrés de liberté de Σ_K , i.e.

$$\forall p \in P_K, \alpha(p) = 0, \forall \alpha \in \Sigma_K \Rightarrow p = 0.$$

Le rôle d'un élément fini est d'interpoler un champ dans un espace fonctionnel de dimension finie, localement, dans un élément géométrique de l'espace de topologie simple.

Pour les éléments finis les plus couramment utilisés, les degrés de liberté sont associés aux nœuds de K et les fonctionnelles α se réduisent à des fonctions des coordonnées dans K ; il s'agit des éléments finis nodaux. La définition que nous présentons ici est plus générale grâce à la liberté laissée dans le choix des fonctionnelles. Elles pourront être, en plus de valeurs nodales, des intégrales le long de segments, sur des surfaces, sur des volumes; ces formes peuvent être bien adaptées à différents types de champs à interpoler. Nous introduisons d'abord les éléments de Whitney en trois dimensions et ensuite les mêmes éléments en deux dimensions.

Considérons la fonction $\lambda_i(\mathbf{x})$ coordonnée barycentrique du point \mathbf{x} relative au nœud \mathbf{x}_i , qui prend la valeur 1 en ce nœud, qui est continue, affine par morceaux dans les éléments géométriques ayant ce nœud en commun, et qui s'annule dans les autres éléments sans subir de discontinuité. Cette fonction n'est autre que la fonction de base, associée au nœud \mathbf{x}_i de l'espace fonctionnel des éléments finis nodaux, construits sur les éléments géométriques considérés.

A un **nœud** \mathbf{x}_i , nous associons la fonction

$$w_i(\mathbf{x}) = \lambda_i(\mathbf{x}), \quad (3.22)$$

qui définit l'élément de Whitney d'ordre 0 au nœud \mathbf{x}_i . L'ordre de l'élément de Whitney n'est pas lié à l'ordre des fonctions de base vues comme des polynômes mais à la dimension du simplexe auquel il est associé (en ce cas, un nœud). Nous appelons W^0 l'espace de dimension finie engendré par les fonctions w_i , $\forall \mathbf{x}_i \in \mathcal{N}$. L'élément fini associé est défini par le triplet (K, P_K, Σ_K) où K est un tétraèdre, $P_K = \mathcal{P}_1(K)$ avec $\mathcal{P}_1(K)$ l'espace des polynômes sur K en x, y, z , de degré inférieur ou égal à 1 et³

$$\Sigma_K = \{ \alpha_i : P_K \rightarrow \mathbb{R}, \alpha_i(u) = u(\mathbf{x}_i), \forall \mathbf{x}_i \text{ sommet de } K \}.$$

On peut montrer que $W^0 \subset H^1(\Omega)$. L'interpolation d'une fonction u est donnée par l'expression

$$I(u) = \sum_{\mathbf{x}_i \in \mathcal{N}} u_i w_i \quad (3.23)$$

dont les coefficients $u_i = \alpha_i(u)$, appelés degrés de liberté, sont les valeurs nodales (0-formes) de u aux nœuds du maillage.

³On notera par $(\mathcal{P}_1(K))^d$ ($d = 2$ ou 3) l'espace des fonctions vectorielles définies sur K à valeurs dans \mathbb{R}^d et telles que chaque composante est un élément de $\mathcal{P}_1(K)$; nous introduisons aussi le sous-ensemble $\tilde{\mathcal{P}}_1(K)$ de $\mathcal{P}_1(K)$ formé de tous les polynômes homogènes de degré unitaire et l'espace $(\tilde{\mathcal{P}}_1(K))^d$ défini de façon similaire.

Considérons maintenant une **arête** $a = \{i, j\}$ (orientée du nœud \mathbf{x}_i au nœud \mathbf{x}_j). Nous lui associons le champ de vecteurs

$$\mathbf{w}_a(\mathbf{x}) = \lambda_i(\mathbf{x}) \text{grad } \lambda_j(\mathbf{x}) - \lambda_j(\mathbf{x}) \text{grad } \lambda_i(\mathbf{x}), \quad (3.24)$$

qui définit l'élément de Whitney d'ordre 1 au arête a . Nous appelons W^1 l'espace de dimension finie engendré par le fonctions \mathbf{w}_a , $\forall a \in \mathcal{A}$. Puisque $\text{grad } \lambda_i$ est un vecteur orthogonal à la facette $\{j, k, l\}$ de K et $\text{grad } \lambda_j$ est un vecteur orthogonal à la facette $\{i, l, k\}$, on peut voir que \mathbf{w}_a est un champ qui tourne au tour de l'arête $\{l, k\}$ et que son amplitude est proportionnel à la distance à cette arête. Ce champ est non nul dans les tétraèdres ayant l'arête a en commun; il a circulation égale à 1 le long l'arête a et 0 le long les autres arêtes. Sur une facette commune à deux tétraèdres adjacents, la composante normale de \mathbf{w}_a est discontinue et sa composante tangentielle est continue. L'élément fini associé à K est donné par le triplet (K, P_K, Σ_K) où $P_K = W^1_K$ et

$$\Sigma_K = \{\alpha_a : P_K \rightarrow \mathbb{R}, \alpha_a(\mathbf{u}) = \int_a \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_a da, \forall a \text{ arête de } K\}$$

avec \mathbf{t}_a le vecteur unitaire tangent à l'arête a . On peut également définir $|a|(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_a)(\mathbf{x}_a^M)$ comme degré de liberté associé à l'arête a , où \mathbf{x}_a^M et $|a|$ sont, respectivement, le point de milieu et la longueur de l'arête a . L'interpolation d'une fonction \mathbf{u} par les éléments d'arêtes est donnée par l'expression

$$I(\mathbf{u}) = \sum_{a \in \mathcal{A}} u_a \mathbf{w}_a \quad (3.25)$$

dont le coefficients $u_a = \alpha_a(\mathbf{u})$ sont les circulations (1-formes) de \mathbf{u} le long des arêtes. Les éléments ainsi définis sont dits également rot-conformes et on a que $W^1 \subset H(\text{rot}, \Omega)$.

A une **facette** $f = \{i, j, k\}$, nous associons le champ de vecteurs

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_f(\mathbf{x}) = 2(& \lambda_i(\mathbf{x}) \text{grad } \lambda_j(\mathbf{x}) \times \text{grad } \lambda_k(\mathbf{x}) + \lambda_j(\mathbf{x}) \text{grad } \lambda_k(\mathbf{x}) \times \text{grad } \lambda_i(\mathbf{x}) + \\ & \lambda_k(\mathbf{x}) \text{grad } \lambda_i(\mathbf{x}) \times \text{grad } \lambda_j(\mathbf{x})), \end{aligned} \quad (3.26)$$

qui définit l'élément de Whitney d'ordre 2 sur la facette f . Nous appelons W^2 l'espace de dimension finie engendré par le fonctions \mathbf{w}_f , $\forall f \in \mathcal{F}$. On peut remarquer que le produit vectoriel $\text{grad } \lambda_i(\mathbf{x}) \times \text{grad } \lambda_j(\mathbf{x})$ est un vecteur parallèle à l'arête $\{k, l\}$. Il émerge du nœud \mathbf{x}_l et croît linéairement vers la facette opposée $\{i, j, k\}$. Les éléments ainsi définis préservent la continuité normale à travers une facette commune à deux tétraèdres adjacents mais n'ont pas la continuité tangentielle. Leur composante normale sur la facette f est donnée par

$$\mathbf{w}_f \cdot \mathbf{n} = |f|^{-1}$$

où $|f|$ est la mesure de la surface de la facette f et \mathbf{n} la normale extérieure (selon la règle de la main droite) à la facette. Le flux de \mathbf{w}_f est égal à 1 à travers la facette f et 0 à travers les autres facettes. L'élément fini associé à K est donné par le triplet (K, P_K, Σ_K) où $P_K = W_{|K}^2$ et

$$\Sigma_K = \{ \alpha_f : P_K \rightarrow \mathbb{R}, \alpha_f(\mathbf{u}) = \int_f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} df, \forall f \text{ facette de } K \}.$$

L'interpolation d'une fonction \mathbf{u} par les éléments de facettes est donnée par l'expression

$$I(\mathbf{u}) = \sum_{f \in \mathcal{F}} u_f \mathbf{w}_f \quad (3.27)$$

dont les coefficients $u_f = \alpha_f(\mathbf{u})$ sont les flux (2-formes) de \mathbf{u} à travers les facettes. Les éléments de facettes sont div-conformes et on a que $W^2 \subset H(\text{div}, \Omega)$.

Enfin, à un **volume** $K = \{i, j, k, l\}$ de mesure $|K|$, nous associons la fonction

$$\begin{aligned} w_K(\mathbf{x}) = & 6 (\lambda_i(\mathbf{x}) \text{grad } \lambda_j(\mathbf{x}) \times \text{grad } \lambda_k(\mathbf{x}) \cdot \text{grad } \lambda_l(\mathbf{x}) + \\ & \lambda_j(\mathbf{x}) \text{grad } \lambda_k(\mathbf{x}) \times \text{grad } \lambda_l(\mathbf{x}) \cdot \text{grad } \lambda_i(\mathbf{x}) + \\ & \lambda_k(\mathbf{x}) \text{grad } \lambda_l(\mathbf{x}) \times \text{grad } \lambda_i(\mathbf{x}) \cdot \text{grad } \lambda_j(\mathbf{x}) + \\ & \lambda_l(\mathbf{x}) \text{grad } \lambda_i(\mathbf{x}) \times \text{grad } \lambda_j(\mathbf{x}) \cdot \text{grad } \lambda_k(\mathbf{x})) = |K|^{-1}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

qui définit l'élément de Whitney d'ordre 3 sur le volume K . Nous appelons W^3 l'espace de dimension finie engendré par les fonctions, constantes par morceaux, $w_K, \forall K \in \mathcal{V}$. Les éléments de volumes sont les éléments classiques \mathbb{P}_0 . L'intégrale de w_K dans son élément (3-forme) est égale à 1 et à 0 dans les autres éléments. L'élément fini associé à K est donc donné par le triplet (K, P_K, Σ_K) où $P_K = \mathbb{P}_0(K)$ et

$$\Sigma_K = \{ \alpha_K : P_K \rightarrow \mathbb{R}, \alpha_K(u) = \int_K u dK \}.$$

Dans l'approximation de la fonction ρ par les éléments de volume donnée par

$$I(\rho) = \sum_{K \in \mathcal{V}} \rho_K w_K, \quad (3.29)$$

les coefficients $\rho_K = \alpha_K(\rho)$ sont les charges contenues dans les tétraèdres. Les fonctions w_K sont discontinues et on a que $W^3 \subset L^2(\Omega)$.

Les propriétés de continuité des fonctions ainsi introduites, définissent ce que l'on appelle la conformité. Elles permettent la prise en compte exacte des conditions d'interface

de différentes grandeurs utilisées dans la modélisation de problèmes physiques. Par exemple, dans les problèmes électromagnétiques, les champs de W^1 peuvent représenter des champs de vecteurs comme le champ magnétique \mathbf{H} ou le champ électrique \mathbf{E} dont les composantes tangentielles sont continues au travers des interfaces entre matériaux. Les champs de vecteurs de W^2 peuvent représenter des champs comme le champ d'induction magnétique \mathbf{B} ou le champ de densité de courant de conduction \mathbf{J} , dont les composantes normales sont continues au travers des interfaces. Les champs scalaires de W^0 peuvent représenter des potentiels scalaires et ceux de W^3 des densités de charge volumiques.

Pour mieux montrer l'enchaînement des éléments de Whitney, il faut introduire la notion d'incidence. L'incidence d'un nœud n dans une arête a , notée $i(n, a)$, vaut 1 si n est l'extrémité de a , -1 si n est l'origine de a , et 0 si n n'appartient pas à a . Par exemple,

$$i(n, \{m, n\}) = 1 \quad , \quad i(m, \{m, n\}) = -1 \quad , \quad i(q, \{m, n\}) = 0.$$

De même, l'incidence d'une arête a dans une facette f , notée par $i(a, f)$, vaut 1 ou -1 suivant que, a appartenant à f , la liste ordonnée des nœuds de a apparaît comme une sous-liste directe ou inverse dans la liste circulaire des nœuds de f , et vaut 0 si f ne contient pas a . Par exemple,

$$i(\{m, n\}, \{m, n, o\}) = 1 \quad , \quad i(\{o, m\}, \{m, n, o\}) = 1,$$

$$i(\{o, n\}, \{m, n, o\}) = -1 \quad , \quad i(\{p, q\}, \{m, n, o\}) = 0.$$

Enfin, l'incidence d'une facette f dans un volume K , notée par $i(f, K)$, vaut 1 ou -1 suivant que, f appartenant à K , la normale à f définie grâce à la liste circulaire de ses nœuds (règle de la main droite) est extérieure ou intérieure à K , et vaut 0 si f n'appartient pas à K . Par exemple,

$$i(\{j, k, l\}, \{i, j, k, l\}) = 1 \quad , \quad i(\{k, l, j\}, \{i, j, k, l\}) = 1,$$

$$i(\{j, l, k\}, \{i, j, k, l\}) = -1 \quad , \quad i(\{j, k, q\}, \{i, j, k, l\}) = 0.$$

Des matrices rectangulaires G , R , D , dont les éléments sont définis par

$$G_{an} = i(n, a), \quad \forall n \in \mathcal{N}, \quad \forall a \in \mathcal{A}, \quad (3.30)$$

$$R_{fa} = i(a, f), \quad \forall a \in \mathcal{A}, \quad \forall f \in \mathcal{F}, \quad (3.31)$$

$$D_{Kf} = i(f, K), \quad \forall f \in \mathcal{F}, \quad \forall K \in \mathcal{V}, \quad (3.32)$$

sont appelées matrices d'incidence et ont, respectivement, dimension $A \times N$, $F \times A$, $V \times F$. Les relations suivantes, dans lesquelles intervient la notion d'incidence, peuvent être

démontrées:

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} i(n, a) \mathbf{w}_a = \text{grad } w_n, \quad (3.33)$$

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} i(a, f) \mathbf{w}_f = \text{rot } \mathbf{w}_a, \quad (3.34)$$

$$\sum_{K \in \mathcal{V}} i(f, K) w_K = \text{div } \mathbf{w}_f. \quad (3.35)$$

Les relations (3.33), (3.34) et (3.35) entraînent les inclusions

$$\text{grad}(W^0) \subset W^1, \quad \text{rot}(W^1) \subset W^2, \quad \text{div}(W^2) \subset W^3. \quad (3.36)$$

En particulier, si nous considérons $\mathbf{H} = \text{grad } \Phi$ avec $\Phi \in W^0$ de la forme $\Phi = \sum_{n \in \mathcal{N}} \phi_n w_n$, grâce à la relation (3.33), nous avons que

$$\mathbf{H} = \text{grad } \Phi = \sum_{n \in \mathcal{N}} \phi_n \text{grad } w_n = \sum_{n \in \mathcal{N}} \phi_n \sum_{a \in \mathcal{A}} i(n, a) \mathbf{w}_a = \sum_{a \in \mathcal{A}} \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} i(n, a) \phi_n \right) \mathbf{w}_a.$$

Le champ \mathbf{H} a la forme $\sum_{a \in \mathcal{A}} h_a \mathbf{w}_a$ et donc est un élément de W^1 . Son degré de liberté h_a est la différence de valeurs nodales de Φ aux extrémités de l'arête $a = \{n, m\}$, i.e. $h_a = \phi_m - \phi_n$. Si $\boldsymbol{\phi}$ est le vecteur des degrés de liberté nodales de Φ , alors le vecteur \mathbf{h} des degrés de liberté d'arêtes de $\mathbf{H} = \text{grad } \Phi$, est donné par la formule matricielle

$$\mathbf{h} = G\boldsymbol{\phi}.$$

La matrice G apparaît ainsi comme l'équivalent discret du gradient.

De même, grâce à la relation (3.34), le rotationnel d'un champ vectoriel \mathbf{H} de W^1 de la forme $\sum_{a \in \mathcal{A}} h_a \mathbf{w}_a$, définit le champ vectoriel

$$\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{H} = \sum_{f \in \mathcal{F}} \left(\sum_{a \in \mathcal{A}} i(a, f) h_a \right) \mathbf{w}_f,$$

qui appartient à l'espace W^2 , puisqu'il est de la forme $\sum_{f \in \mathcal{F}} j_f \mathbf{w}_f$. Son degré de liberté j_f est le flux à travers la facette f et il est reconstruit à partir des circulations de \mathbf{H} le long des arêtes appartenants à f . Le vecteur \mathbf{j} des degrés de liberté de facettes de $\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{H}$ peut être obtenu à partir du vecteur \mathbf{h} des degrés de liberté d'arêtes de \mathbf{H} grâce à la formule matricielle

$$\mathbf{j} = R\mathbf{h}.$$

La matrice R apparaît alors comme l'équivalent discret du rotationnel. En particulier, la relation $RG = 0$ est la version discrète de la relation vectorielle $\text{rot}(\text{grad } \cdot) = 0$.

Enfin, grâce à la relation (3.35), la divergence d'un champ vectoriel \mathbf{B} de W^2 de la forme $\sum_{f \in \mathcal{F}} b_f \mathbf{w}_f$, définit le champ scalaire

$$\Psi = \text{div } \mathbf{B} = \sum_{K \in \mathcal{V}} \left(\sum_{f \in \mathcal{F}} i(f, K) b_f \right) w_K ,$$

qui appartient à l'espace W^3 , puisqu'il est de la forme $\sum_{K \in \mathcal{V}} \psi_K w_K$. Son degré de liberté ψ_K est reconstruit à partir des flux de \mathbf{B} à travers les facettes du volume K . Le vecteur $\boldsymbol{\psi}$ des degrés de liberté de volumes $\Psi = \text{div } \mathbf{B}$ peut être obtenu à partir du vecteur \mathbf{b} des degrés de liberté de facettes de \mathbf{B} grâce à la formule matricielle

$$\boldsymbol{\psi} = D\mathbf{b}.$$

La matrice D apparaît alors comme l'équivalent discret de la divergence. En particulier, la relation $DR = 0$ est la version discrète de la relation vectorielle $\text{div}(\text{rot } \cdot) = 0$.

Si on indique par \mathbf{W}^p , ($p = 0, 1, 2, 3$), les espaces $\mathbb{R}^{\mathcal{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$, $\mathbb{R}^{\mathcal{F}}$, $\mathbb{R}^{\mathcal{V}}$ isomorphes aux produits cartésiens $\mathbb{R}^{\mathcal{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$, $\mathbb{R}^{\mathcal{F}}$, $\mathbb{R}^{\mathcal{V}}$, nous pouvons décrire la structure des espaces d'éléments de Whitney par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} W^0 & \xrightarrow{\text{grad}} & W^1 & \xrightarrow{\text{rot}} & W^2 & \xrightarrow{\text{div}} & W^3 \\ | & & | & & | & & | \\ \mathbf{W}^0 & \xrightarrow{G} & \mathbf{W}^1 & \xrightarrow{R} & \mathbf{W}^2 & \xrightarrow{D} & \mathbf{W}^3 \end{array} \quad (3.37)$$

où les lignes verticales représentent des isomorphismes. La propriété d'exactitude des suites en haut ou en bas dans (3.37) dépend de la topologie du domaine d'étude Ω . Si l'union de tous les tétraèdres de la triangulation de Ω est contractile, alors on peut montrer que

$$W^1 \cap \ker(\text{rot}) = \text{grad}(W^0) , \quad W^2 \cap \ker(\text{div}) = \text{rot}(W^1) . \quad (3.38)$$

Si une des propriétés dans (3.38) n'est pas valable, on peut en déduire des informations sur la topologie de Ω . En gros, l'existence de champs à rotationnels nuls mais qui ne sont pas des gradients indique la présence d'une ou plus "circuits" dans Ω (comme pour le tore). L'existence de champs à divergence nulle mais qui ne sont pas des rotationnels signale la présence d'un "trou" dans Ω (comme le domaine inclut entre deux sphères de même centre). Les suites précédentes constituent donc des objets algébriques parmi lesquels on peut explorer la topologie du domaine d'étude (et sur lesquels Whitney a travaillé dans [135]).

En pratique, on peut être amené à choisir dans W^1 un champ \mathbf{H} à rotationnel nul ou dans W^2 un champ \mathbf{B} à divergence nulle. Au niveau discret, ça revient, respectivement, à choisir le vecteur \mathbf{h} des degrés de liberté de \mathbf{H} dans W^1 tel que $R\mathbf{h} = \mathbf{0}$ et le vecteur \mathbf{b} des degrés de liberté de \mathbf{B} dans W^2 tel que $D\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Si on veut donné une représentation explicite du vecteur \mathbf{h} , il faut définir une *base* pour l'espace $\ker(R) = \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^A \mid R\mathbf{h} = \mathbf{0}\}$, c'est-à-dire une famille finie de vecteurs libres $\{\mathbf{h}^1, \dots, \mathbf{h}^{d_1}\}$ (avec $d_1 \leq N-1$ et $d_1 = N-1$ dans le cas où le domaine d'étude est contractile), générateurs de l'espace $\ker(R)$. De même, si on veut donné une représentation explicite du vecteur \mathbf{a} tel que $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{a}$, il faut définir une base de vecteurs libres de W^1 , $\{\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^{d_2}\}$ (avec $d_2 \leq A - N + 1$ et $d_2 = A - N + 1$ dans le cas où le domaine d'étude est contractile), générateurs de l'espace RW^1 (qui coïncide avec l'espace $\ker(D)$ dans le cas où le domaine d'étude est contractile). Ce problème fait intervenir la notion de *arbre* et *co-arbre* [4, 34, 66, 116]. Dans le cas où le domaine d'étude est contractile, un arbre (maximal), construit sur les arêtes d'un maillage du domaine d'étude, est un ensemble d'arêtes qui relient tous les noeuds du maillage entre eux sans former de chemin fermé; les arêtes qui ne sont pas dans l'arbre, constituent le co-arbre associé. Au niveau algébrique, extraire un arbre maximal correspond à sélectionner une sous-matrice carrée, dans la matrice R (ou G , ou D), qui est régulière. De plus, l'ordre de cette sous-matrice, égal au nombre d'arêtes de l'arbre, est aussi égal au rang de R . Les autres lignes de R , qui correspondent aux arêtes du co-arbre, peuvent donc être exprimées comme combinaison linéaire des lignes précédentes et constituent une base pour $\ker(R^T)$ [104].

Dans beaucoup d'applications, nous avons besoin de travailler en deux dimensions, sur une surface Γ . Les éléments de Whitney pour les triangles sont obtenus comme restrictions des éléments de Whitney pour les tétraèdres. Leurs définitions sont données comme suit.

- Éléments d'ordre 0 (éléments nodaux):

$$w_i(\mathbf{x}) = \lambda_i(\mathbf{x}) \quad (3.39)$$

où $\lambda_i(\mathbf{x})$ est la coordonnée barycentrique du point \mathbf{x} relative au nœud \mathbf{x}_i . w_i préserve la continuité d'une fonction sur la surface Γ . L'ensemble des w_i , noté W_Γ^0 , est un sous-ensemble de W^0 et peut aussi être obtenu comme projection normale de W^1 sur la surface Γ . Ces éléments permettent alors d'interpoler les potentiels scalaires ainsi que les potentiels vecteurs ou des champs normaux à la surface.

- Éléments d'ordre 1 (éléments d'arêtes rot-conformes):

$$\mathbf{w}_a^r(\mathbf{x}) = \lambda_i(\mathbf{x}) \text{grad}_\Gamma \lambda_j(\mathbf{x}) - \lambda_j(\mathbf{x}) \text{grad}_\Gamma \lambda_i(\mathbf{x}) \quad (3.40)$$

où grad_Γ est l'opérateur grad sur la surface Γ considérée. w_a^r dénote un vecteur qui tourne autour du troisième point \mathbf{x}_k du triangle K . L'ensemble des w_a^r , noté W_Γ^1 ,

est un sous-ensemble de W^1 , tangent à la surface en considération. Ces éléments permettent l'interpolation des potentiels vecteurs et des champs tangents à la surface. La continuité tangentielle d'un vecteur sur l'arête commune à deux éléments adjacents est garantie (ces éléments sont dits rot-conformes, d'où la notation r).

- Éléments d'ordre 2 (éléments d'arêtes div-conformes):

$$\mathbf{w}_a^d(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_\Gamma \times (\lambda_i(\mathbf{x}) \operatorname{grad}_\Gamma \lambda_j(\mathbf{x}) - \lambda_j(\mathbf{x}) \operatorname{grad}_\Gamma \lambda_i(\mathbf{x})) \quad (3.41)$$

où \mathbf{n}_Γ est le vecteur normal sortant du triangle considéré. w_a^d dénote un vecteur qui émerge du troisième point \mathbf{x}_k du triangle K . L'ensemble des w_a^d , noté W_Γ^2 , est un sous-ensemble de W^2 , tangent à la surface en considération. Ces éléments sont adaptés pour interpoler les densités de flux tangential à la surface et préservent la continuité normale (sur la surface) d'un vecteur au travers d'une arête commune de deux éléments adjacents (ces éléments sont dits div-conforme, d'où la notation d).

- Éléments d'ordre 3 (éléments de facettes):

$$w_f(\mathbf{x}) = |f|^{-1} \quad (3.42)$$

où $|f|$ est la mesure de la surface du triangle f . L'ensemble des w_f , noté W_Γ^3 , est un sous-ensemble de W^3 qui s'obtient également par projection normale de W^2 sur la surface. Il permet d'interpoler les densités de charges ainsi que les densités de flux normal à la surface Γ .

Etant donné que les éléments de Whitney en deux dimensions de différents degrés sont des sous-ensembles des espaces éléments de Whitney en trois dimensions, on peut coupler de façon naturelle éléments finis de volume avec éléments finis de surface.

En trois dimensions, l'interpolation linéaire d'un vecteur nécessite de 12 degrés de liberté. Les interpolations d'un vecteur dans un tétraèdre K par des éléments d'arêtes et de facettes de Whitney sont définies à partir, respectivement, de 6 et 4 degrés de liberté. Pour subvenir à ce manque, Mur et de Hoop [99] ont introduit une variante des éléments d'arêtes à 12 degrés de liberté, qui appartient à une nouvelle famille d'éléments mixtes étudiée dans la suite par Nédélec [101]. En particulier, les éléments d'arêtes à 12 degrés de liberté sont définis comme suit:

$$\mathbf{w}'_a(\mathbf{x}) = \lambda_i(\mathbf{x}) \operatorname{grad} \lambda_j(\mathbf{x}). \quad (3.43)$$

Si on considère la différence des deux fonctions $\mathbf{w}'_{\{i,j\}}$ et $\mathbf{w}'_{\{j,i\}}$ définies en (3.43), nous trouvons les éléments d'arêtes à 6 degrés de liberté définis en (3.24). L'élément fini associé à K est donné par la triplet (K, P_K, Σ_K) où $P_K = (\mathcal{P}_1(K))^3$ et

$$\begin{aligned} \Sigma_K &= \{ \alpha_a : P_K \rightarrow \mathbb{R}, \alpha_a(\mathbf{u}) = \int_a \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_a ds, \forall a \text{ arête de } K \} \\ &\cup \{ \alpha_a : P_K \rightarrow \mathbb{R}, \alpha_a(\mathbf{u}) = \int_a \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_a s ds, \forall a \text{ arête de } K \} \end{aligned}$$

où s est l'abscisse curviligne sur l'arête a . On peut également considérer comme degrés de liberté sur l'arête a , de longueur $|a|$, les valeurs $|a|(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_a)(\mathbf{x}_i)$ et $|a|(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_a)(\mathbf{x}_j)$. On notera par $W^{1'}$ l'espace de dimension finie engendré par les fonctions \mathbf{w}'_a , $\forall a \in \mathcal{A}$ et on a que $W^{1'} \subset H(\text{rot}, \Omega)$. Il faut noter que cet ajout de degrés de liberté, au prix du doublement du nombre d'inconnues, permet d'améliorer l'approximation d'un champ de vecteurs dans un tétraèdre.

Les résultats que nous allons présenter dans la suite de cette thèse, sont obtenus par la méthode des joints couplée, en deux dimensions, avec les éléments finis nodaux et d'arêtes à 3 degrés de liberté par triangle, et en trois dimensions, avec les éléments finis d'arêtes à 6 et 12 degrés de liberté par tétraèdre.

Notion d'élément de référence – Soit \hat{K} le d -simplexe unité, aussi dit **élément de référence**, dans l'espace $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_d)$, de sommets $\hat{\mathbf{x}}_i = (\delta_{i,j})_{1 \leq j \leq d}$ ($1 \leq i \leq d$) et $\hat{\mathbf{x}}_0$ égal au vecteur nul. Si K est un d -simplexe de sommets \mathbf{x}_i ($1 \leq i \leq d+1$), il existe une et une seule transformation affine de \mathbb{R}^d , de la forme

$$F_K(\hat{\mathbf{x}}) = B_K \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_K \quad , \quad B_K \in \mathbb{R}^{d \times d} \quad , \quad \det B_K \neq 0 \quad , \quad \mathbf{b}_K \in \mathbb{R}^d$$

qui transforme bijectivement \hat{K} dans K et telle que $F_K(\hat{\mathbf{x}}_i) = \mathbf{x}_i$ ($1 \leq i \leq d+1$).

Cette notion est très utilisée dans la théorie, soit pour simplifier la présentation d'un sujet ou concept, soit dans la démonstration d'un résultat de convergence que, en général, on vérifie d'abord être valable sur \hat{K} et ensuite pour tous $K \in \mathcal{T}_K$.

Dans le cadre des applications, la notion d'élément de référence est aussi très exploitée. Pour donner un exemple, nous avons défini l'orientation de toutes les arêtes $a \in A$ ou faces $f \in F$ des maillages considérés à partir d'une orientation fixée des arêtes \hat{a} et des faces \hat{f} de l'élément de référence \hat{K} .

Toujours dans le cadre des éléments finis, nous observons que les fonctions de base sont d'abord définies sur l'élément de référence \hat{K} et sont portées ensuite sur l'élément réel K à travers soit le changement de variable défini par F_K si on travaille avec des fonctions scalaires (de l'espace W^0 , par exemple), soit par le produit avec la matrice B_K^{-T} ou B_K si on travaille avec fonctions vectorielles (respectivement de l'espace W^1 ou W^2). Cela nous évite de mémoriser les coefficients des fonctions de base de chaque élément, tout en gagnant en temps de calcul et en quantité de mémoire utilisée.

Avec la même philosophie, toutes les intégrales sur K ou sur des sous-ensembles de K (i.e., une face, une arête) qui représentent les éléments des matrices intervenant dans la formulation matricielle du problème discret, sont d'abord écrits, à l'aide du changement de variable donné par F_K , comme intégrales sur \hat{K} ou sur le sous-ensemble de \hat{K} qui se correspond dans la transformation F_K avec le sous-ensemble initial de K . Les intégrales sur \hat{K} ou sur un sous-ensemble de \hat{K} ainsi obtenues sont calculés à l'aide d'une formule de quadrature définie sur \hat{K} , en évitant ainsi de définir et mémoriser les nœuds et les

poids des formules d'intégration sur un volume, une face, une ligne pour chaque élément $K \in \mathcal{T}_K$.

Imposition des conditions aux limites – Les conditions aux limites qui peuvent être définies dans les espaces $H^1(\Omega)$, $H(\text{rot}, \Omega)$ et $H(\text{div}, \Omega)$, s'introduisent de façon naturelle dans les espaces correspondants W^i , $i = 0, 1, 2$. Ces conditions peuvent en effet être imposées par l'intermédiaire des degrés de liberté qui sont associés aux entités géométriques de la surface correspondante: valeur pour un nœud, circulation pour une arête, flux pour une facette. Par exemple, un champ \mathbf{H} de l'espace fonctionnel $W^1(\Omega)$ peut s'exprimer sous la forme (3.25),

$$\mathbf{H} = \sum_{a \in \mathcal{A}} H_a \mathbf{w}_a \quad \text{avec} \quad H_a = \int_a \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.44)$$

où \mathcal{A} est l'ensemble des arêtes du domaine global Ω , \mathbf{w}_a est la fonction vectorielle de base associée à l'arête a et H_a est la circulation de \mathbf{H} le long de l'arête a . Les fonctions de base d'arête \mathbf{w}_a , $a \in \mathcal{A}$, sont linéairement indépendantes et sont en nombre égal à la dimension de W^1 , donnée par le nombre A d'arêtes de Ω . Une condition à la limite essentielle, sur une portion $\partial\Omega_D$ de la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω , du type

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{H})|_{\partial\Omega_D} = \mathbf{H}_D,$$

où \mathbf{H}_D est une fonction vectorielle donnée sur $\partial\Omega_D$, définit un sous-espace de W^1 dont les fonctions de base ne sont plus associées qu'aux arêtes qui ne sont pas situées sur $\partial\Omega_D$.

Chapitre 4

Méthodes classiques pour la prise en compte du mouvement

Les courants induits sont créés dans les matériaux conducteurs par variations temporelles du champ magnétique. Ces variations peuvent être générées soit dans des géométries fixes en présence de sources de courants variables dans le temps, soit dans des géométries mobiles en présence de sources de courants constantes dans le temps. Dans la suite de cette Thèse on s'intéressera au second cas en présentant une méthode numérique qui permet une modélisation efficace du mouvement en deux et trois dimensions. Cette méthode numérique sera combinée avec les éléments finis du complexe de Whitney.

Les dispositifs électrotechniques et notamment les convertisseurs électromécaniques (machines et actionneurs électriques) peuvent comporter des parties en mouvement. La modélisation numérique de tels systèmes nécessite donc le développement des techniques permettant la prise en compte du mouvement, que ce soit de rotation, pour les machines électriques, ou de translation, pour les électroaimants et en particulier, comme on le verra plus avant, le raccordement de maillages non-conformes aux interfaces du domaine. Dans ce chapitre nous allons présenter les méthodes les plus utilisées pour la prise en compte du mouvement et le raccordement de maillages non-conformes. Ces méthodes peuvent être classées en deux catégories, l'une basée sur l'utilisation d'un seul référentiel indépendant de la position de la partie mobile, i.e. approche *eulérienne*, et l'autre basée sur l'utilisation de deux référentiels, l'un lié à la partie mobile et l'autre à la partie fixe, i.e. approche *lagrangienne*. Parmi ces dernières on peut énumérer les méthodes de remaillage local, le macro-élément, le couplage avec intégrales de frontière, la technique du "lock-step", la méthode de "overlapping elements", la connexion par interpolation et les méthodes basées sur l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange. En passant en revue ces techniques classiques, nous montrerons les aspects plus importants de chaque méthode pour mieux comprendre les avantages qu'on a en utilisant la méthode des joints, présentée dans le

chapitre suivant. Dans la suite, le domaine d'étude est considéré comme étant composé de deux parties: une qui reste fixe et qu'on appelle *stator* et l'autre qui peut bouger rigidement et qu'on appelle *rotor*. Les mouvements considérés ici pour la partie mobile sont la rotation autour d'un axe et la translation selon une direction, dans l'hypothèse non relativiste. Les deux parties peuvent glisser l'une sur l'autre ou bien être séparées par un entrefer qui généralement contient de l'air. Dans le deuxième cas, ces deux parties sont séparées par une "surface Γ de glissement" cylindrique ou plane, que l'on place en général dans l'entrefer (Figure 4.1(b)).

4.1 Description du repère

Pour la prise en compte du mouvement, se pose le problème de choisir le repère. Nous distinguons ainsi deux formulations. La première est la formulation eulerienne exprimée dans le repère fixé au laboratoire. La seconde est la formulation lagrangienne où le repère est lié à la matière en mouvement.

Un objet Ω en mouvement est toujours constitué par les mêmes points matériels ou *particules* mais sa configuration peut changer au cours du temps. Pour décrire son mouvement, il est nécessaire de définir une application bijective qui lie la position initiale \mathbf{x} au temps s d'un point matériel avec sa position \mathbf{X} au temps $t \in (s, T)$, $T > s$. Si \mathbf{v} décrit la vitesse de Ω , la ligne caractéristique ("stream line") associée au couple (\mathbf{x}, s) de condition initiale et au vecteur \mathbf{v} est définie comme solution d'un problème de Cauchy

$$\begin{cases} d_t \mathbf{X}(t; s, \mathbf{x}) = \mathbf{v}(t, \mathbf{X}(t; s, \mathbf{x})) & , \quad t \in (s, T) \\ \mathbf{X}(s; s, \mathbf{x}) = \mathbf{x} . \end{cases} \quad (4.1)$$

On a l'existence et l'unicité des lignes caractéristiques pour chaque choix de s et \mathbf{x} sous certaines hypothèses sur la vitesse \mathbf{v} . Par exemple, on demande que \mathbf{v} soit continue (en \mathbf{x} et t) dans $[s, T] \times \overline{\Omega}$ et Lipschitz continue (en \mathbf{x}) dans $\overline{\Omega}$, uniformément par rapport à $t \in [s, T]$.

Du point de vue géométrique, $\mathbf{X}(t; s, \mathbf{x})$ représente la position au temps t de la particule qui a été portée par le champ \mathbf{v} et qui se trouve dans la position \mathbf{x} au temps s (Figure 4.1(a)). Le résultat d'unicité donne en particulier que

$$\mathbf{X}(t; r, \mathbf{X}(r; s, \mathbf{x})) = \mathbf{X}(t; s, \mathbf{x}) \quad , \quad \forall t, r \in [s, T], \mathbf{x} \in \overline{\Omega}.$$

Donc,

$$\mathbf{X}(s; t, \mathbf{X}(t; s, \mathbf{x})) = \mathbf{X}(s; s, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

i.e. pour chaque t fixé, l'application inverse de $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{X}(t; s, \mathbf{x})$ est donnée par l'application $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{X}(s; t, \mathbf{y})$.

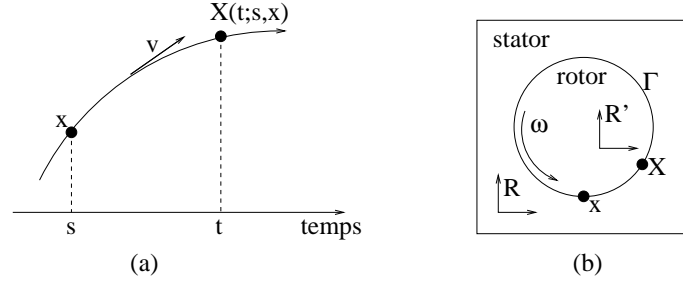


Figure 4.1: Ligne caractéristique associée au vecteur \mathbf{v} et passant par le point (\mathbf{x}, s) (a); système d'étude dans lequel les parties stator et rotor sont séparées par une interface de glissement Γ cylindrique (b).

On suppose que la forme de l'objet ne change pas au cours du mouvement, i.e. on considère un corps rigide, en mouvement de translation (avec vitesse \mathbf{v}_t , qui est la vitesse du barycentre de l'objet) et/ou de rotation autour d'un axe passant par le barycentre (avec vitesse $\boldsymbol{\omega}$), par rapport à un système de référence fixe: on a donc que le vecteur vitesse (totale) \mathbf{v} a une forme simple $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) + \mathbf{v}_t$, où \mathbf{r} et \mathbf{r}_G sont les positions respectivement de la particule matérielle et du barycentre de l'objet dans le système de référence.

Comme on l'a vu dans le Chapitre 2, une des équations de Maxwell à prendre en compte dans le modèle des courants induits est la loi de Faraday, qui lie la dérivée temporelle de \mathbf{B} au rotationnel de \mathbf{E} . Dans un domaine d'étude composé de deux parties dont une bouge par rapport à l'autre (voir Figure 4.1(b)), il se pose le problème de choisir le repère pour exprimer la dérivée en temps de \mathbf{B} [51].

Supposons de vouloir écrire la dérivée en temps de \mathbf{B} dans le *rotor* (qui est mobile, en rotation avec vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ autour de l'axe du cylindre et $\mathbf{v}_t = \mathbf{0}$). Si on choisit le repère R lié au stator (fixe), à partir du système (4.1) on obtient

$$\begin{aligned} d_t u(\mathbf{X}(t; s, \mathbf{x}), t) &= \partial_t u(\mathbf{X}(t; s, \mathbf{x}), t) + \sum_{i=1}^d d_i u(\mathbf{X}(t; s, \mathbf{x}), t) d_t X_i(t; s, \mathbf{x}) \\ d_t u(\mathbf{X}(t; s, \mathbf{x}), t) &= (\partial_t u + \mathbf{v} \cdot \text{grad } u)(\mathbf{X}(t; s, \mathbf{x}), t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

où d est le nombre de dimensions; par rapport à cet repère, \mathbf{x} , t sont les variables indépendantes (\mathbf{X} dépend de t). Si le repère bouge à la même vitesse que la particule, c'est-à-dire on choisit le repère R' co-mobile avec le rotor, nous avons que

$$d_t u(\mathbf{X}(t; s, \mathbf{x}), t) = \partial_t u(\mathbf{X}(t; s, \mathbf{x}), t).$$

Les variables \mathbf{X} , t , sont cette fois, indépendantes.

De façon symétrique, la dérivée en temps de \mathbf{B} dans le *stator* présentera un terme de convection dans le cas où elle est écrite par rapport à R' (co-mobile avec le rotor).

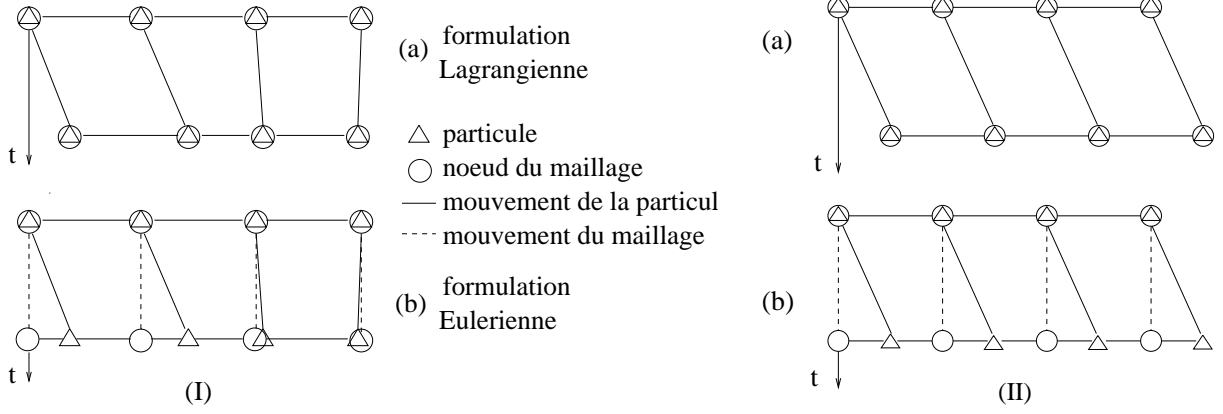


Figure 4.2: Exemple 1D du mouvement de déformation (I) ou rigide (II) de maillage et des particules matérielles en formulation lagrangienne (a) et eulerienne (b).

4.1.1 Formulation eulerienne

Dans le cas de la formulation eulerienne, les coordonnées de l'espace et du temps dans la partie mobile sont dépendantes. Pour prendre en compte l'effet dû au mouvement, dans la loi de Faraday, nous devons considérer la dérivée totale, qui est liée à la dérivée partielle par la relation (4.2):

$$d_t \mathbf{B} = \partial_t \mathbf{B} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{B},$$

où grad est l'opérateur gradient de dimension d et tel que $(\text{grad} \mathbf{B})_{i,j} = \partial_j B_i$, $i, j = 1, d$. Dans cette relation, la dérivée totale $d_t \mathbf{B}$ est connue sous le nom de dérivée convective. Le second terme du second membre est la dérivée de Lie en écriture vectorielle. Elle peut se décomposer en:

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{B} = \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{B} - \text{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Considérant la loi de la conservation du flux (2.3), i.e. $\text{div } \mathbf{B} = 0$, la dérivée de convection s'écrit:

$$d_t \mathbf{B} = \partial_t \mathbf{B} - \text{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Enfin, remplaçons $\partial_t \mathbf{B}$ par $d_t \mathbf{B}$, la loi de Faraday dans la formulation eulerienne s'écrit:

$$\text{rot} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -d_t \mathbf{B}.$$

Il faut noter que dans cette égalité le champ \mathbf{E} ne contient que la partie due à la variation dans le temps de \mathbf{B} . On constate que le champ électrique dû au mouvement est donné

par $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Le mouvement est alors pris en compte explicitement par l'introduction du terme $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Avec cette méthode, on peut travailler avec un maillage fixe à chaque pas de temps du calcul (Figure 4.2 (b)) si le mouvement n'est pas accompagné d'un changement de la structure magnétique.

Le principal inconvénient de cette méthode est que la discrétisation du terme $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ dans les différentes formulations conduit à un système non symétrique. On est alors privé des nombreuses méthodes d'inversion valables uniquement pour les systèmes symétriques. De plus, l'utilisation d'une application de passage entre la position initiale et la position courante de la particule, nécessaire pour suivre le mouvement des interfaces mobiles, porte à commettre des imprécisions. Le traitement de matériaux non linéaires est difficile puisque les nœuds du maillage et les points d'intégration spatiale coïncident, à des instants différents, avec différentes particules matérielles.

Un autre problème qui peut se rencontrer dans la formulation eulerienne est le problème de la stabilité. Il apparaît des instabilités numériques lorsque la taille des éléments dans la direction du mouvement dépasse une certaine limite [120]. On constate alors que plus la vitesse augmente plus le maillage doit être raffiné. Ceci demande un temps de calcul considérable dans le cas de la grande vitesse. Pour pallier cette difficulté, on peut introduire la technique de recentrage ("upwinding") utilisée en mécanique des fluides.

Formellement, un problème peut-être plus difficile arrive, puisque des dérivées autres que le rotationnel portent sur \mathbf{H} (en rappelant que $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$) qui doit donc être discrétisé par des éléments Lagrangiens et non plus rot-conformes uniquement.

4.1.2 Formulation lagrangienne

Dans la formulation lagrangienne, les équations de Maxwell gardent leur forme originale (2.1-2.4). Du fait que le champ en un point de la matière (aussi dit particule) est seulement fonction du temps, le champ électrique est entièrement déterminé par la variation dans le temps du champ magnétique. Dans la loi de Faraday, la dérivée partielle de l'induction par rapport au temps est égale à la dérivée totale, car:

$$d_t \mathbf{B} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{B}(\mathbf{x}, t + \delta t) - \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\delta t} = \partial_t \mathbf{B}$$

Les méthodes qui traitent le mouvement et sont basées sur la formulation lagrangienne, prennent alors en compte le champ induit par la variation dans le temps du champ magnétique et du champ engendré par le mouvement. Dans ces méthodes, les nœuds du maillage sont liés à la matière et suivent son mouvement (Figure 4.2 (a)). Les calculs numériques sont simplifiés puisqu'aucun effet convectif n'apparaît. De plus, on a une définition précise des frontières et interfaces mobiles. Dans une approche par éléments finis, les caractéristiques matérielles sont en général associées aux éléments et, dans le cas

lagrangien, chaque élément contient toujours les mêmes particules matérielles. Cette caractéristique de la formulation lagrangienne est très importante quand on est en présence de matériaux non linéaires, qui possèdent une “mémoire”: les points d’intégration numérique sont constamment liés aux mêmes particules matérielles.

A l’interface où se rencontrent le maillage de la partie (stator) fixe et celui de la partie (rotor) mobile, on doit assurer la continuité physique des champs (continuité de la composante tangentielle du champ électrique, par exemple, si c’est par rapport à cette variable qu’on va résoudre le problème en considération). Dans la suite de cet chapitre, on va décrire, à grandes lignes, les différentes techniques pour réstorer cette continuité dans le cas où les maillages des deux côtes de l’interface de glissement ne sont plus conformes.

4.2 Remaillage

La méthode la plus utilisée pour la prise en compte du mouvement est le remaillage d’une partie du domaine. Ce remaillage peut se faire à chaque nouvelle position de la partie en mouvement ou quand la qualité de la discrétisation est trop abîmée du fait du mouvement. Le remaillage peut être assez cher au niveau de temps de calcul même si il est pris en charge par un outil automatique de génération de maillage. De plus, pendant un intégration en temps il est difficile d’utiliser la solution au pas de temps précédent puisque le maillage a changé. Il faut donc interpoler la solution au temps précédent sur le maillage courant: la localisation d’un maillage sur un autre coûte en temps de calcul et l’opération d’interpolation peut ajouter des erreurs numériques qui dégradent la précision du calcul. D’autre part, dans la région intéressée par le remaillage, la grille est cassée et successivement reconstruite: la matrice de connectivité des éléments change à chaque re-génération. Par conséquent, la structure des matrices change (i.e. coefficients non nuls devenant nuls et vice versa) et cela peut perturber la solution numérique. La technique de la bande de roulement est basée sur le remaillage de l’entrefer à chaque déplacement du maillage rotorique [56, 124, 131].

4.3 Macro-élément

Cette méthode proposée dans [64, 114, 97], est basée sur l’expression analytique du champ dans l’entrefer. L’entrefer n’est pas maillé mais il est vu comme un unique élément fini, possédant des nœuds sur la partie fixe et la partie mobile. L’entrefer est un milieu linéaire et sans source: les fonctions de forme associées aux nœuds du macro-élément sont solutions de l’équation de Laplace et peuvent être déterminées de façon analytique pour des géométries de forme simple. Différents choix des fonctions associées aux nœuds du macro-élément conduisent à différentes méthodes qui font toutes parties de l’ensemble de

techniques basées sur les séries de Fourier. La méthode du macro-élément a été appliquée avec succès en deux dimensions; elle présente des avantages soit au niveau de la qualité de la solution dans l'entrefer soit au niveau de la réalisation du maillage (l'entrefer n'est plus maillé). Cependant la matrice du système final perd son caractère creux du fait que les degrés de liberté du macro-élément sont interconnectés et la largeur de bande est localement augmentée. Cette augmentation est encore acceptable en deux dimensions mais devient difficilement acceptable en trois dimensions [103]. De plus, elle n'est pas applicable pour le raccordement des maillages en absence d'entrefer.

4.4 Eléments de frontière

La méthode qui combine éléments finis et éléments de frontière est beaucoup utilisée pour la prise en compte du mouvement [36, 37, 83, 102]. L'idée de base est celle d'approcher les champs inconnus dans les corps conducteurs ou avec une perméabilité à l'aide de la méthode des éléments finis et de traiter l'espace qui entoure les corps avec les éléments de frontière. Aucun maillage n'est requis entre les corps et ces corps peuvent éventuellement bouger librement. Cette méthode présente des avantages tels que la qualité de la solution dans l'entrefer, comme pour la technique du macro-élément, et la possibilité d'application à des formes quelconques. Par contre, ses deux inconvénients majeurs sont: dans un système avec entrefer, quand l'épaisseur de ce dernier est trop faible, les intégrales sont difficiles à calculer et la fonction à intégrer peut devenir singulière. Deuxièmement, aux blocs de nœuds sur les frontières des corps sont associées des matrices pleines qu'il faut reconstruire à chaque nouvelle configuration du système. L'augmentation considérable de la largeur de bande rend la méthode difficilement applicable en trois dimensions. Une amélioration de cette méthode est proposée dans [127].

4.5 Technique du “lock-step”

La méthode du “lock-step” [60] est la technique qui permet le plus facilement de prendre en compte le mouvement. Le pas de discrétisation sur l'interface glissante n'est pas arbitraire mais dépend de l'angle de rotation ($h = r\Delta\theta$ où r est la distance entre l'interface et l'axe de rotation) ou de la longueur de déplacement linéaire ($h = \Delta L$) dans l'intervalle de temps élémentaire. Le pas de temps est fixé en fonction de h et de la vitesse v : en mouvement avec vitesse constante, $\Delta t = h/v$. De cette manière, les maillages de la partie fixe et de la partie mobile coïncident sur l'interface à chaque position de la partie mobile.

Cette méthode est applicable aisément quand la partie mobile bouge avec une vitesse uniforme donnée; d'autre part, pour un grand nombre de systèmes réels, une étude complète des phénomènes nécessite de prendre en compte régimes à vitesse variable

(comme par exemple pour les freins électromagnétiques qui équipent les poids lourds). On s’aperçoit que la méthode du “lock-step” manque de flexibilité: nous ne pouvons pas prendre en compte une rotation ou une translation qui varie dans le temps comme nous avons pu le faire dans le cas d’un système couplé magnéto-mécanique sans modifier le pas de temps (voir la Section 6.3).

4.6 Technique de “overlapping”

Dans la technique avec recouvrement appelée “overlapping element method” [129, 35], on ne considère pas une interface commune (surface en trois dimensions ou ligne en deux dimensions) comme dans les cas précédents, mais un volume en trois dimensions ou bien une surface en deux dimensions Ω_{SR} entre la partie fixe et la partie mobile de la structure étudiée. L’idée principale de la méthode consiste à superposer les éléments au niveau de l’interface mobile de la structure. On génère dans Ω_{SR} des éléments volumiques ou surfaciques fictifs ayant la même propriété que les éléments finis classiques afin de restaurer la continuité du champs inconnus. Les éléments fictifs sont composés des nœuds principaux (issus du maillage) et des nœuds fictifs qui sont la projection (radiale ou orthogonale) des nœuds principaux de Ω_{SR} sur la surface qui leur est opposée. Après discrétisation, on montre que l’inconnue aux nœuds fictifs $\{u_j\}$ s’exprime facilement en fonction des inconnues aux nœuds principaux $\{u_i\}$ par une relation matricielle simple du type $\{u_j\} = [\alpha]\{u_i\}$, où $[\alpha]$ est une matrice de coefficients à déterminer en fonction du déplacement relatif du rotor. Dans le cas d’un maillage en hexaèdres en mouvement à vitesse constante, la matrice $[\alpha]$ est facile à calculer mais pour des maillages et des mouvements quelconques, l’intersection du maillage devient compliquée. Par ailleurs, à notre connaissance, aucune analyse numérique n’existe pour cette approche qui permette de donner un cadre rigoureux à sa utilisation.

4.7 Connexion par interpolation

D’autres méthodes s’appuient sur l’interpolation de maillage (voir par exemple [103] pour une interpolation nodale et [68] pour une interpolation entre éléments mixtes).

La géométrie est divisée en deux maillages distincts, le maillage fixe, correspondant aux parties statiques, et le maillage mobile (en mouvement rigide), qui regroupe le rotor et l’entrefer. La zone de connexion est l’interface entre le maillage mobile et le maillage fixe. Pour chaque nœud \mathbf{x}_j ou arête a_j de l’interface de couplage du côté mobile on détecte la position dans l’élément volumique K_i^j appartenant au maillage fixe. Utilisant les fonctions d’interpolation ϕ_i^j de l’élément volumique fixe trouvé, l’inconnue u_j associée au nœud \mathbf{x}_j ou arête a_j mobile est donnée par la combinaison linéaire $u_j = \sum_{i=1}^m u_i^j \phi_i^j$

où u_i^j ($i = 1, m$) sont les degrés de liberté dans l'élément volumique fixe K_i^j . L'inconnue u_j va être substituée dans le système matriciel par la combinaison linéaire. Parmi les avantages de cette méthode nous avons: la matrice du système final est symétrique, de plus, sa bande n'est pas augmentée localement et le conditionnement n'est pas détérioré. La structure du système varie de façon continue en fonction de l'angle de rotation. Dans [19] est présentée une interpolation nodale qui se base sur l'utilisation de fonctions de formes incomplètes. Une méthode similaire en éléments mixtes qui fait intervenir une troisième maillage régulier est présentée dans [78]. Le problème est que cette approche est démontrée non optimale dans le cadre des éléments Lagrangiens et sa convergence est douteuse en éléments d'arête.

4.8 Multiplicateurs de Lagrange

Une autre façon de rétablir la continuité des composantes (tangentielles ou normales) des champs à l'interface entre deux maillages est d'utiliser des multiplicateurs de Lagrange. Si on travaille avec une machine tournante, par exemple, on choisit une interface circulaire positionnée dans l'entrefer. La partie fixe et mobile de la machine sont discrétisées indépendamment l'une de l'autre. Les deux maillages ne changent pas au cours de la simulation: les seules quantités qui changent sont les termes de couplage des deux maillages qui doivent être recalculés à chaque pas de temps. Le terme de couplage correspond à une nouvelle fonctionnelle qui est rajoutée à la fonctionnelle d'énergie correspondant au phénomène physique. Le processus de minimisation de la fonctionnelle totale permet l'identification des multiplicateurs de Lagrange; ensuite, soit les multiplicateurs sont éliminés de la fonctionnelle ou remplacés par leur expression, soit ils sont considérés comme inconnues du système et interpolés séparément.

Le choix de remplacer les multiplicateurs de Lagrange par leur expression a été fait dans [96, 95, 69] et a porté à travailler avec une matrice du système final qui n'est pas définie. Nous ne pouvons pas résoudre le système avec algorithmes classiques tels que le Gradient Conjugué et la factorisation du système à l'aide des méthodes directes est très coûteuse en termes d'espace mémoire. Dans le cas d'une approximation nodale, les auteurs ont proposé une renumérotation des nœuds des éléments qui sont en contact avec l'interface: les inconnues qui leur sont associées sont placées en premier dans le système final. Ce bloc de matrice est en suite factorisé cependant que les autres blocs (définis) sont traités avec le Gradient Conjugué préconditionné par un Cholesky incomplet. D'autres expériences avec les multiplicateurs de Lagrange sont réalisées dans [121].

4.9 Vers la méthode des joints

Nous avons vu que dans le cadre de la magnétodynamique, les méthodes pour la prise en compte du mouvement basées sur une formulation lagrangienne du problème des courants induits prennent en compte le champ induit par la variation dans le temps du champ magnétique et du champ engendré par le mouvement. Etant donné que dans une approche lagrangienne les nœuds du maillage sont liés à la matière, les techniques précédentes donnent des “recettes” pour que le mouvement ou la déformation de la structure n’entraîne pas de distorsion du maillage et n’ait pas de conséquence sur la précision du calcul.

Dans le chapitre suivant nous allons présenter la méthode des joints. C’est une méthode de décomposition du domaine faisant intervenir des multiplicateurs de Lagrange mais le choix de ces derniers conduit à une matrice du système final qui est globalement creuse et définie. Aucune procédure de remaillage ou d’interpolation n’est plus nécessaire, non plus que des algorithmes compliqués d’intersection de maillage. De plus, aucune dépendance n’existe entre le pas de temps et le pas de discrétisation sur l’interface, ce qui permet de modéliser aisément des systèmes couplés magnéto-mécaniques à régime de vitesse variable. Elle a été appliquée dans le cadre de cette Thèse pour la prise en compte du mouvement: en particulier pour le traitement des maillages non-conformes à l’interface entre partie fixe et partie mobile. Nous soulignons que, grâce à ses caractéristiques, la même méthode peut être utilisée pour traiter d’autres types de non-conformités que celles géométriques. Avant de la présenter, il convient aussi de dire que si les multiplicateurs de Lagrange sont éliminés, la méthode est proche de la méthode avec interpolation puisque les valeurs aux nœuds du maillage mobile (par exemple) sont déduites des valeurs du côté fixe. L’opérateur de passage est de même complexité que l’opérateur d’interpolation mais cette fois l’approximation est optimale. Le lecteur est donc invité à passer aux chapitres suivants pour en savoir plus.

Chapitre 5

La méthode des joints

La méthode des joints est une méthode non-conforme de décomposition de domaine sans recouvrement, développée pour coupler des approximations variationnelles différentes dans les sous-domaines différents. Elle permet de combiner les discrétisations de façon optimale, c'est-à-dire que l'erreur globale est bornée par la somme des erreurs d'approximation locales dans les sous-domaines, sans aucune contrainte de cohérence géométrique sur le choix des différentes discrétisations. Considérons, par exemple, un volume Ω divisé en deux parties Ω_1 et Ω_2 séparées par une interface Γ . Considérons aussi deux méthodes variationnelles M1, M2 (éléments finis et méthodes spectrales, par exemple), deux ordres différents d1, d2 (linéaire et quadratiques), et deux discrétisations m1 et m2 de Ω_1 et Ω_2 . On peut donc considérer les trois situations illustrées dans la Figure 5.1 ou bien une de leurs combinaisons:

situation	maillage	méthode	ordre de la méthode
I	m1 , m2 non-conformes sur Γ	M1 , M1	d1 , d1
II	m1 , m2 conformes sur Γ	M1 , M2	d1 , d2
III	m1 , m1 conformes sur Γ	M1 , M1	d1 , d2

L'idée est de réaliser le couplage à l'interface Γ entre Ω_1 et Ω_2 (entre partie mobile et partie fixe) par l'intermédiaire d'un opérateur de projection (couplage faible) plutôt que d'interpolation point par point (couplage forte). On peut ainsi bénéficier des avantages des différentes méthodes, par exemple, utiliser les éléments finis pour résoudre numériquement le problème dans les régions avec une géométrie complexe ou en présence de matériaux non linéaires et appliquer les méthodes spectrales dans le reste du domaine tout en gagnant en précision et en dimension des systèmes algébriques à inverser. La partition même du domaine peut être géométriquement non-conforme, i.e. l'intersection de la fermeture de deux sous-domaines adjacents peut coïncider avec seulement une partie de certains bords de ces sous-domaines. La méthode d'approximation et la " finesse " de la discrétisation

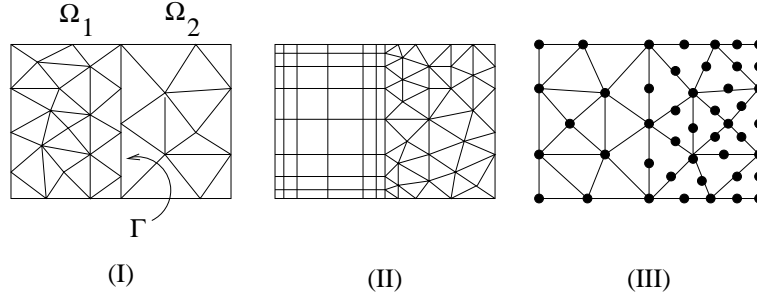


Figure 5.1: Illustration de trois situations que l'on peut traiter avec la méthode des joints.

dans chaque sous-domaine (définie, au niveau fonctionnel, par le degré des polynômes utilisés et, au niveau géométrique, par le diamètre des éléments du maillage) peuvent donc être choisies de façon à s'adapter le mieux possible aux caractéristiques locales du sous-problème et du champ physique inconnu. Il en résulte que la méthode des joints est aussi bien adaptée pour le parallélisme, pas seulement pour ses caractéristiques de méthode de décomposition de domaine mais pour le type “faible” de contraintes imposées aux interfaces entre les différents sous-domaines, qui fait diminuer considérablement, par rapport à une méthode de décomposition de domaine à contraintes “ponctuelles”, le nombre de communications entre les processeurs et, par conséquent, le coût des simulations.

Le méthode des joints a été introduite dans [17] dans le cadre des approximations par éléments finis du type lagrangien et spectrales des équations différentielles aux dérivées partielles elliptiques en 2D et étudiée ensuite par de nombreux auteurs. Parmi les travaux successifs, nous rappelons l'analyse de la méthode en formulation primale hybride dans [11], l'extension en 3D pour les éléments finis lagrangiens dans [1, 12, 13], pour problèmes de type Stokes dans [8, 10], la définition de la méthode pour l'approximation avec ondelettes [18]. Plusieurs études ont été faites dans le cadre du préconditionnement (voir [2, 3, 7]), des techniques multigrille (voir [3, 40]) et de l'adaptation des maillages (voir [16, 136]). Dans le cadre des éléments de Whitney pour les équations de Maxwell, nous rappelons la définition de la méthode pour l'approximation avec les deux familles d'éléments d'arêtes $H(\text{rot})$ conformes avec fonctions de base définies en (3.24) , (3.43), en 2D dans [9] et en 3D dans [14]. Nous rappelons aussi la définition d'une autre méthode non-conforme de décomposition de domaine pour l'approximation des équations de Maxwell avec éléments d'arêtes $H(\text{rot})$ conformes dans [73].

La méthode des joints qu'on présentera dans ce chapitre, dont différentes applications sont décrites dans les chapitres suivants, est basée sur l'approximation par éléments de Whitney des équations de la magnétodynamique sans termes convectives et permet de travailler avec des maillages non-conformes à l'interface entre la partie fixe et la partie mobile. Le maillage mobile ne subira donc aucune déformation liée au mouvement et la

précision ne sera pas inférieure à celle de la méthode utilisée dans chaque partie.

5.1 Considérations préliminaires

Les considérations que nous allons faire dans cette section sont présentées, sans entrer trop dans les détails, pour un problème différentiel du second ordre de Laplace mais ont un caractère général. Elles seront détaillées dans la suite du chapitre pour les problèmes magnétodynamiques qu'on envisage de résoudre.

Le premier pas dans l'application d'une méthode de décomposition du domaine sans recouvrement est la division du domaine d'étude Ω en un nombre fini \mathcal{K} de sous-domaines Ω_k ($1 \leq k \leq \mathcal{K}$) avec parties internes deux-à-deux disjointes. Les méthodes basées sur une décomposition du domaine en sous-domaines sans recouvrement peuvent être divisées en deux classes: celle des méthodes liées à la formulation forte du problème et celle des méthodes liées à la formulation faible du problème. Ces deux classes diffèrent par le type de conditions de transmission que la solution numérique doit satisfaire aux interfaces entre les sous-domaines. Pour le problème différentiel du laplacien, la première classe de méthodes demande que la solution soit une fonction de $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ et la seconde demande que la solution soit une fonction de $H^1(\Omega)$ (et donc seulement $\mathcal{C}^0(\Omega)$ lorsque l'on a discrétisé).

Pour les méthodes liées à la formulation forte du problème, on commence par reformuler, dans chaque sous-domaine Ω_k , le problème aux dérivées partielles qu'on veut résoudre dans Ω : ces reformulations constituent des sous-problèmes du problème de départ. La méthode de décomposition consiste donc à chercher la solution u du problème initial comme une famille finie $\{u_k\}_{1 \leq k \leq \mathcal{K}}$ de fonctions où chaque u_k est la restriction de la fonction u au sous-domaine Ω_k . Résoudre le problème dans Ω est équivalent à chercher la solution $u = (u_1, \dots, u_{\mathcal{K}})$ des sous-problèmes satisfaisant en plus des **conditions de transmission** aux interfaces entre les sous-domaines. Pour le problème du laplacien, les conditions de transmission sont données par

$$u_k = u_l \quad \text{sur } \Gamma^{kl} \quad (5.1)$$

$$\partial_{\mathbf{n}_{kl}} u_k = \partial_{\mathbf{n}_{kl}} u_l \quad \text{sur } \Gamma^{kl} \quad (5.2)$$

pour tous $k \neq l$, $1 \leq k, l \leq \mathcal{K}$, où Γ^{kl} représente l'interface entre les sous-domaines Ω_k et Ω_l et \mathbf{n}_{kl} est le vecteur unitaire normal à Γ^{kl} allant de Ω_k à Ω_l . Les méthodes de décomposition de domaine liées à la formulation forte approximent les différents sous-problèmes et les deux types de conditions de transmission (5.1) et (5.2).

Pour la seconde classe de méthodes, il faut d'abord écrire la formulation faible du problème étudié. Les intégrales seront écrites comme sommes d'intégrales sur les sous-domaines. Dans cette formulation, la solution est toujours pensée comme une famille finie $\{u_k\}_{1 \leq k \leq \mathcal{K}}$ de fonctions et seules les conditions de transmission de type (5.1) sont

explicitement imposées sur la solution et aussi sur les fonctions test. Ces conditions de type \mathcal{C}^0 , dites aussi essentielles, sont donc imposées et les conditions de type (5.2), dites aussi naturelles, sont inclus dans la formulation faible du problème et peuvent être récupérées par intégration par partie.

Les méthodes de décomposition de domaine proposent donc de chercher un \mathcal{K} -uple de fonctions solutions des problèmes locaux donnés par

- soit le problème fort avec les conditions de couplage (5.1) et (5.2),
- soit le problème faible sur des fonctions test vérifiant seulement (5.1).

La discrétisation proposée à la suite de ces méthodes en sous-domaines va vérifier, de façon discrète, les conditions (5.1) et (5.2) ou bien la condition (5.1).

Si les maillages aux interfaces coïncident, les égalités précédentes peuvent être satisfaites exactement et l'on parle alors de méthodes d'approximation conforme. Par contre, si les maillages ne coïncident pas, l'égalité ne peut pas être parfaite et l'on parle alors de non-conformité.

Ayant en vue l'utilisation de méthodes du type éléments finis, nous choisissons l'optique de la seconde famille de méthodes de décomposition de domaine, plus compatible avec l'approximation de Galerkin à la base de la méthode des éléments finis.

La **non-conformité** augmente la flexibilité de la méthode. Nous distinguons deux types de non-conformité, géométrique et fonctionnelle, que l'on détaillera dans la suite. On parle de conformité géométrique (un exemple est donné en Figure 5.2(a)) quand la division du domaine d'études Ω a été faite à l'aide d'un nombre fini de sous-domaines Ω_k de forme polygonale ou polyédrique courbe tels que, pour tous $1 \leq k, l \leq \mathcal{K}$, on ait

$$\overline{\Omega_k} \cap \overline{\Omega_l} = \begin{cases} \text{soit toute une face entière de } \Omega_k \text{ et } \Omega_l, \\ \text{soit tout un côté entier de } \Omega_k \text{ et } \Omega_l, \\ \text{soit un coin de } \Omega_k \text{ et } \Omega_l, \\ \text{soit } \emptyset, \end{cases}$$

et de non-conformité géométrique dans le cas contraire (voir Figure 5.2(b)).

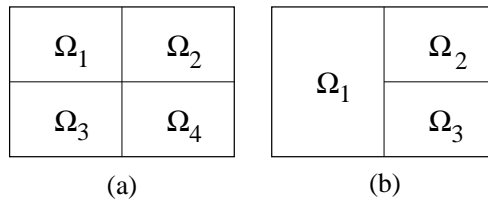


Figure 5.2: Exemples de décomposition géométriquement conforme (a) et non-conforme (b) d'un domaine rectangulaire $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

La même distinction peut se faire au niveau discret: les maillages \mathcal{T}_h^k et \mathcal{T}_h^l dans deux

sous-domaines adjacents Ω_k et Ω_l seront dits conformes si

$$(\mathcal{T}_h^k)_{|\Gamma^{kl}} \equiv (\mathcal{T}_h^l)_{|\Gamma^{kl}}, \quad (5.3)$$

où Γ^{kl} est l'interface commune aux deux sous-domaines, et non-conformes dans le cas contraire. La conformité des maillages aux interfaces entre les sous-domaines est une condition trop contraignante si on veut améliorer l'efficacité des méthodes d'éléments finis à travers, par exemple, l'utilisation des algorithmes automatiques de génération de maillage ou bien l'adaptation du diamètre d'éléments aux caractéristiques physiques du milieu et de la solution dans chaque sous-domaine ou bien le raffinement local du maillage autour des éventuelles singularités de la géométrie. De plus, la non-conformité des maillages est très importante si on travaille avec une formulation lagrangienne du problème initial dans des géométries non stationnaires comme nous allons le faire dans le cadre des problèmes magnétodynamiques.

On parle de non-conformité fonctionnelle quand les fonctions discrètes ne satisfont pas une condition de type (5.1). En général, quand on parle de méthodes non-conformes d'éléments finis, on fait implicitement référence à la non-conformité fonctionnelle. La non-conformité “fonctionnelle” est en général liée au fait que l'on travaille avec des espaces d'approximation qui ne sont pas des sous-ensembles des espaces continus où on cherche la solution. Par conséquent, dans l'estimation de l'erreur, à côté du terme de meilleure approximation usuel, on voit apparaître une erreur dite de consistance due au “crime variationnel” commis en travaillant avec ce type d'espace d'approximation.

La méthode des joints est une méthode non-conforme de décomposition de domaine sans recouvrement liée à la formulation faible du problème en considération. L'idée de base de la méthode des joints est d'imposer faiblement les conditions de transmission de type (5.1) à l'aide des multiplicateurs de Lagrange. La clé de la méthode est la construction d'un “bon” espace discret de multiplicateurs de Lagrange afin d'assurer la stabilité du problème discret. Ensuite, si on choisit de garder les multiplicateurs de Lagrange parmi les inconnues propres du problème, nous résoudrons un problème mixte. Si nous les éliminons en travaillant dans un espace contraint, nous résoudrons un problème de taille réduite par rapport à la taille du problème global avec conditions de Neumann aux interfaces entre sous-domaines. La forme matricielle finale du problème à résoudre est caractérisée par le fait d'avoir une matrice symétrique et définie positive, qu'on pourra donc aisément inverser soit par la méthode directe de factorisation de Cholesky, soit par la méthode itérative du Gradient Conjugué. Le caractère “creux” qui caractérise les matrices des systèmes dérivant d'une discrétisation par éléments finis du problème différentiel initial, est gardé pour les blocs relatifs aux inconnues qui sont internes aux sous-domaines. Les blocs relatifs aux inconnues sur les interfaces sont pleins, du fait du couplage de l'information pour des sous-domaines adjacents mais de petite taille (voir dans le Chapitre 8 pour plus de détails).

5.2 Décomposition du domaine

Nous considérons, comme on l'a fait dans les chapitres précédents, un ensemble ouvert et borné Ω de \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$) avec frontière $\partial\Omega$ Lipschitzienne continue. On introduit un ensemble d'indices $\mathcal{I} = \{k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq \mathcal{K}\}$. On découpe Ω en un nombre fini de sous-ensembles Ω_k ($k \in \mathcal{I}$) sans recouvrement, i.e.

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{\mathcal{K}} \overline{\Omega_k}$$

avec

$$\Omega_k \subseteq \Omega \quad \forall k \in \mathcal{I} \quad \text{et} \quad \Omega_k \cap \Omega_l = \emptyset \quad \forall k, l \in \mathcal{I}, k \neq l.$$

Dans la suite, nous considérerons une décomposition géométriquement non-conforme de Ω et la seule hypothèse que nous ferons sur cette décomposition est que, $\forall k \in \mathcal{I}$,

$$\overline{\Omega_k} \cap \partial\Omega = \begin{cases} \text{soit une face entière de } \Omega_k \text{ (} d = 3 \text{)}, \\ \text{soit un côté entier de } \Omega_k \text{ (} d \leq 3 \text{)}, \\ \text{soit un coin de } \Omega_k \text{ (} d \leq 3 \text{)}, \\ \text{soit } \emptyset. \end{cases}$$

Pour tout $k \in \mathcal{I}$, on note par \mathbf{n}_k le vecteur unitaire normal extérieur à Ω_k et par $\{\Gamma^{k,i}\}_{1 \leq i \leq f(k)}$ l'ensemble des surfaces (pour $d = 3$) et lignes (pour $d = 2$) constituant les “côtés” de Ω_k . Nous définissons le **squelette** \mathcal{S} comme étant l'union des tous les côtés qui ne sont pas sur $\partial\Omega$ de tous les sous-domaines, i.e.

$$\mathcal{S} = \left(\bigcup_{k=1}^{\mathcal{K}} \partial\Omega_k \right) \setminus \partial\Omega = \left(\bigcup_{k=1}^{\mathcal{K}} \bigcup_{i=1}^{f(k)} \Gamma^{k,i} \right) \setminus \partial\Omega.$$

Puisque le squelette est couvert deux fois par l'union de tous les côtés qui ne sont pas sur $\partial\Omega$, on choisit un sous-ensemble de ces côtés de façon à définir \mathcal{S} comme union disjointe des éléments appartenant à ce sous-ensemble particulier. Plus précisément, on choisit un ensemble fini \mathcal{I}_M d'indices formés par couples d'entiers $m = (k, i)$, $k \in \mathcal{I}$ et $1 \leq i \leq f(k)$ tel que, notant par Γ^m le côté $\Gamma^{k,i}$ avec $(k, i) = m \in \mathcal{I}_M$, on ait

$$\mathcal{S} = \bigcup_{m \in \mathcal{I}_M} \overline{\Gamma^m} \quad \text{et} \quad \Gamma^m \cap \Gamma^n = \emptyset \quad \forall m, n \in \mathcal{I}_M, m \neq n.$$

Les éléments Γ^m , $m \in \mathcal{I}_M$, sont appelés **non-joints** ou **côtés esclaves** et tous les autres côtés des sous-domaines qui ne sont pas sur $\partial\Omega$, seront appelés **joints** ou **côtés maîtres**.

Nous remarquons que le choix des côtés joints et non-joints est arbitraire et que l'ensemble des joints donne une représentation “duale” du squelette, c'est-à-dire

$$\mathcal{S} = \bigcup_{(k,i) \notin \mathcal{I}_M} \overline{\Gamma^{k,i}}.$$

Pour $k, l \in \mathcal{I}$, $k \neq l$, nous définissons

$$\overline{\gamma^{k,l}} = \overline{\Omega^k} \cap \overline{\Omega^l}.$$

Dans la Figure 5.3 nous montrons deux décompositions du squelette \mathcal{S} : celle en (a) est acceptable mais celle en (b) n'est pas acceptable puisque la ligne verticale en trait noir foncé ne coïncide pas avec un des côtés des sous-domaines.

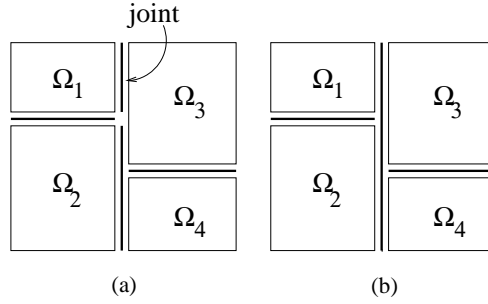


Figure 5.3: Exemples d'une représentation acceptable (a) et non acceptable (b) du squelette \mathcal{S} comme union disjointe des côtés des sous-domaines. Les lignes de la figure (a) en trait noir foncé sont les joints.

5.3 Espaces fonctionnels

Soit X un espace de fonctions définies sur Ω . En particulier, nous travaillerons avec des fonctions scalaires $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $X \subset H^1(\Omega)$ ou bien avec des fonctions vectorielles $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3 et $X \subset H(\text{rot}, \Omega)$, où $H(\text{rot}, \Omega)$ est défini comme on l'a vu à propos des opérateurs (3.3) et (3.6).

Pour tous $k \in \mathcal{I}$, nous notons par X^k l'espace

$$X^k(\Omega_k) = \{u|_{\Omega_k} \mid u \in X\}$$

et nous supposons qu'il existe un opérateur (trace) T^k tel que

$$u \in X \iff \begin{cases} u_k = u|_{\Omega_k} \in X^k, & k \in \mathcal{I}, \\ T^k u_k|_{\gamma^{kl}} = T^l u_l|_{\gamma^{lk}}, & k, l \in \mathcal{I}, \quad k \neq l. \end{cases} \quad (5.4)$$

En particulier, nous avons (voir Formules de Green et conditions aux limites dans la Section 3.1)

$$\begin{aligned} \text{pour } X^k &\subset H^1(\Omega_k) & , & \quad T^k u_{k|\gamma^{kl}} = u_{k|\gamma^{kl}} \\ \text{pour } X^k &\subset H(\text{rot}, \Omega_k) \text{ et } d = 2 & , & \quad T^k u_{k|\gamma^{kl}} = (\mathbf{u}_k \cdot \boldsymbol{\tau})_{|\gamma^{kl}} \\ \text{pour } X^k &\subset H(\text{rot}, \Omega_k) \text{ et } d = 3 & , & \quad T^k u_{k|\gamma^{kl}} = (\mathbf{n} \times \mathbf{u}_k)_{|\gamma^{kl}} \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\tau}$ et \mathbf{n} sont les vecteurs unitaires respectivement tangent et normale à γ^{kl} . Puisque nous considérons une décomposition géométriquement non-conforme, l'indice l dépend du point $\mathbf{x} \in \gamma^{kl}$ où on considère $T^k u_{k|\gamma^{kl}}$.

Nous allons maintenant considérer la méthode des joints combinée avec les éléments finis. Soit h le paramètre de discrétisation spatiale: pour chaque $k \in \mathcal{I}$, nous introduisons une triangulation $\mathcal{T}_{k,h(k)}$ régulière et quasi-uniforme du sous-domaine Ω_k en d-simplexes (triangles, pour $d = 2$ et tétraèdres pour $d = 3$). Ces triangulations sont créées indépendamment l'une de l'autre et peuvent donc être non-conformes aux interfaces entre sous-domaines adjacents.

Dans de nombreuses applications concernant les courants de Foucault, l'interface entre deux sous-domaines adjacents peut être courbe. Néanmoins, les discrétisations que nous introduisons dans la suite, comme il est classique en isoparamétrique, seront basées sur des triangulations où les d-simplexes ont faces ($d = 3$) et arêtes ($d \leq 3$) droites. Les résultats numériques ne sont pas influencés par ce choix et la mise en œuvre de la méthode est plus simple et moins coûteuse.

Soit \hat{K} le d-simplexe de référence et pour tout $K \in \mathcal{T}_{k,h(k)}$, nous notons par $F_K : \hat{K} \rightarrow K$ l'application bijective qui envoie \hat{K} sur K . Ces applications sont des transformations affines de \mathbb{R}^d de la forme

$$F_K(\hat{\mathbf{x}}) = B_K \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_K ,$$

où $B_K \in \mathbb{R}^{d \times d}$ est une matrice inversible et $\mathbf{b}_K \in \mathbb{R}^d$ un vecteur constant. Pour toute valeur de h , et pour tout $k \in \mathcal{I}$, nous définissons des sous-espaces de dimension finie Y_h^k de $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega_k})$ si $X^k \subset H^1(\Omega_k)$ ou de $H(\text{rot}, \Omega_k)$ si $X^k \subset H(\text{rot}, \Omega_k)$, comme suit

$$Y_h^k = \{u_{k,h} \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega_k}) \mid (u_{k,h})|_K \circ F_K \in \mathcal{P}_{n_k}(\hat{K}), \forall K \in \mathcal{T}_{k,h(k)}\} , \quad (5.5)$$

$$Y_h^k = \{\mathbf{u}_{k,h} \in H(\text{rot}, \Omega_k) \mid B_K^T[(\mathbf{u}_{k,h})|_K \circ F_K] \in \mathcal{ND}_{n_k}(\hat{K}), \forall K \in \mathcal{T}_{k,h(k)}\} , \quad (5.6)$$

où $\mathcal{P}_{n_k}(\hat{K})$ est l'espace de fonctions polynômiales de degré n_k définies sur \hat{K} à valeurs dans \mathbb{R} et $\mathcal{ND}_{n_k}(\hat{K})$ est une famille d'éléments $H(\text{rot})$ conformes de degré n_k définie par exemple dans [25, 100, 101]. Dans la suite, nous ferons des applications de la méthode des joints combinée, en 2D, avec éléments nodaux ($n_k = 1$, $Y_h^k \equiv W^0$) et éléments d'arêtes

($n_k = 1$, $Y_h^k \equiv W^1$) à 3 degrés de liberté par triangle, et en 3D avec les éléments d'arêtes à 6 ($n_k = 1$, $Y_h^k \equiv W^1$) et 12 ($n_k = 1$, $Y_h^k \equiv W^{1'}$) degrés de liberté par tétraèdre. Pour décrire l'espace discret, nous considérons l'opérateur trace T^k de fonctions dans Y_h^k , noté par T_h^k . On note par X_h^k l'espace discret local défini par

$$X_h^k = \{u_{k,h} \in Y_h^k \mid T_h^k u_{k,h}|_{\partial\Omega_D \cap \partial\Omega_k} = u_{k,D}\} \quad (5.7)$$

où $\partial\Omega_D$ est un sous-ensemble de mesure positive de $\partial\Omega$ et $u_{k,D}$ une fonction scalaire ou vectorielle donnée, définie sur $\partial\Omega_D \cap \partial\Omega_k$.

Pour décrire l'espace discret final, nous définissons d'abord l'espace des traces. Pour tout $k \in \mathcal{I}$ et pour tout $1 \leq i \leq f(k)$, on note

$$T_h^{k,i} = \{T_h^k u_{k,h} \mid u_{k,h} \in Y_h^k\}.$$

Pour tout $m = (k, i) \in \mathcal{I}_M$, l'espace $T_h^{k,i}$ est noté par T_h^m . Avant de continuer, nous introduisons une notation qui sera utile dans la suite. Soit Γ^m un côté esclave avec $m = (k, i)$ et u_h une fonction telle que $u_h|_{\Omega_k} = u_{k,h} \in Y_h^k$: pour presque tout $\mathbf{x} \in \Gamma^m$, il existe un indice $l \in \mathcal{I}$, $l \neq k$, tel que $\mathbf{x} \in \Gamma^m \cap \gamma^{k,l}$. Maintenant, au point \mathbf{x} on a deux champs, notés par $u_{k,h}$ et $u_{l,h}$. Puisque la décomposition est non-conforme, l'indice l est fonction du point \mathbf{x} et on notera par \mathcal{I}_m l'ensemble des indices $l \in \mathcal{I}$ tels que $\Gamma^m \cap \gamma^{k,l} \neq \emptyset$. On pose alors

$$u_{-k,h}(\mathbf{x}) = u_{l,h}(\mathbf{x}) \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma^m \cap \gamma^{k,l} \quad , \quad \forall l \in \mathcal{I}_m.$$

La fonction $u_{-k,h}$ est définie pour presque tout $\mathbf{x} \in \Gamma^m$. En général, $u_{-k,h}$ n'est pas la trace sur Γ^m d'un élément de Y_h^k : elle rassemble les traces qui proviennent des différents sous-domaines qui touchât Ω_k à travers le côté Γ^m . Similairement, on notera par T_h^{-k} l'opérateur trace ainsi défini

$$T_h^{-k} u_{-k,h}|_{\gamma^{k,l}} = T_h^l u_{l,h}|_{\gamma^{l,k}} \quad , \quad k, l \in \mathcal{I} \quad , \quad k \neq l.$$

La condition en (5.4) peut donc s'écrire de la façon suivante:

$$T_h^k u_{k,h}|_{\Gamma^m} = T_h^{-k} u_{-k,h}|_{\Gamma^m}. \quad (5.8)$$

Dans la méthode des joints, l'espace M_h des multiplicateurs de Lagrange utilisé pour imposer les conditions (5.8) sous forme faible est un sous-espace de l'espace des traces tangentielles sur les côtés esclaves. En détail, nous définissons M_h par

$$\begin{aligned} M_h &= \{\phi_h \in \mathcal{C}^0(\mathcal{S}), \phi_h|_{\Gamma^m} \in M_h^m\} & \text{si} & \quad X^k \subset H^1(\Omega_k), \\ M_h &= \{\phi_h \in L^2(\mathcal{S}), \phi_h|_{\Gamma^m} \in M_h^m\} & \text{si} & \quad X^k \subset H(\text{rot}, \Omega_k), d = 2, \\ M_h &= \{\phi_h \in \mathbf{L}^2(\mathcal{S}), \phi_h|_{\Gamma^m} \in M_h^m\} & \text{si} & \quad X^k \subset H(\text{rot}, \Omega_k), d = 3, \end{aligned}$$

où $M_h^m \subseteq T_h^m$, que l'on décrira dans la suite. Sauf dans le dernier chapitre, pour les applications en magnétostatique et magnétodynamique, nous avons choisi de travailler avec des espaces contraints plutôt que résoudre des problèmes mixtes. L'espace discret X_h , contenant des fonctions scalaires ou vectorielles de la forme $u_h = (u_{1,h}, \dots, u_{K,h})$, est donc décrit comme suit:

$$X_h = \{u_h \mid u_h|_{\Omega_k} = u_{k,h} \in Y_h^k, \quad \forall m \in \mathcal{I}_M, \\ \int_{\Gamma^m} (T_h^k u_{k,h}|_{\Gamma^m} - T_h^{-k} u_{-k,h}|_{\Gamma^m}) \phi_h d\gamma = 0, \quad \forall \phi_h \in M_h^m\}.$$

Les propriétés numériques de l'espace discret X_h dépendent fortement du choix de l'espace M_h des multiplicateurs de Lagrange.

5.3.1 Définition de M_h dans le cas scalaire pour $d = 2$

Si l'on regarde la Figure 5.3, on peut remarquer que les interfaces entre sous-domaines peuvent posséder un "bord". Ce bord est représenté par les deux points extrémités, qui sont soit internes à Ω soit sur la frontière $\partial\Omega$. Nous distinguons donc deux cas: si Γ^m ($m = (k, j)$) n'a pas de bord (comme dans le cas d'un cercle), alors

$$M_h^m = \{\phi_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Gamma^m}) \mid \forall K \in \mathcal{T}_{k,h(k)}, \phi_h|_{K \cap \overline{\Gamma^m}} \in \mathbb{P}_{n_k}(K \cap \overline{\Gamma^m})\}$$

mais si **a** et **b** sont les extrémités de Γ^m , alors

$$M_h^m = \{\phi_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Gamma^m}) \mid \forall K \in \mathcal{T}_{k,h(k)} \text{ t.q. } \mathbf{a}, \mathbf{b} \notin K, \phi_h|_{K \cap \overline{\Gamma^m}} \in \mathbb{P}_{n_k}(K \cap \overline{\Gamma^m}), \\ \forall K \in \mathcal{T}_{k,h(k)} \text{ t.q. } \mathbf{a} \in K \text{ or } \mathbf{b} \in K, \phi_h|_{K \cap \overline{\Gamma^m}} \in \mathbb{P}_{n_k-1}(K \cap \overline{\Gamma^m})\}.$$

Nous rappelons que si on utilise des éléments finis du type nodal de degré $n_k \geq 1$, parmi les inconnues du problème on a les valeurs des fonctions discrètes aux coins des triangles. Le choix de baisser le degré des multiplicateurs de Lagrange sur les intervalles extrémités de Γ^m est lié au fait suivant. Considérons un point de croisement ("cross-point") P , i.e. un point commun entre plusieurs (≥ 3) sous-domaines, et supposons-le appartenir à deux côtés esclaves adjacents. En ce point, à travers les conditions de couplage de la définition de X_h , nous avons deux valeurs pour le multiplicateur, pas forcément égales, dépendants de ceux des domaines voisins. Dans des configurations de ce type, baisser le degré du multiplicateur de Lagrange sur les intervalles dont P est une extrémité revient à laisser libres ces valeurs et donc résout l'incompatibilité précédente.

5.3.2 Définition de M_h dans le cas scalaire pour $d = 3$

Nous présentons ici la définition de l'espace M_h^m dans le cas d'une approximation par éléments finis nodaux du premier ordre en trois dimensions. La restriction au premier

ordre est liée à la difficulté de définir les multiplicateurs ϕ_h pour une approximation avec polynômes de degré supérieur. Nous reprenons en détail la définition qui a été donnée dans [13] pour une discrétisation du domaine en tétraèdres (pour discrétisations en hexaèdres, voir [11] et [12]).

Soit donc Γ^m discrétisée en triangles: notant \mathbf{x}_p ($1 \leq p \leq N(m)$) les coins des triangles sur Γ^m , nous numérotions en premier les nœuds internes à Γ^m (avec indices $1 \leq p \leq N_0(m)$) et ensuite ceux qui sont sur le bord de Γ^m (avec indices $N_0(m) + 1 \leq p \leq N(m)$). Une fonction $v \in H^1(\Gamma^m)$ peut s'écrire comme suit sur la base des éléments λ_p de Whitney d'ordre 0 associés aux nœuds \mathbf{x}_p :

$$I(v) = \sum_{p=1}^{N(m)} v(\mathbf{x}_p) \lambda_p ,$$

et une fonction $v \in H_0^1(\Gamma^m)$ peut s'écrire sous la forme

$$I(v) = \sum_{p=1}^{N_0(m)} v(\mathbf{x}_p) \lambda_p .$$

Considérons maintenant un nœud \mathbf{x}_p avec $N_0(m) + 1 \leq p \leq N(m)$ et notons \mathbf{x}_q^p ($1 \leq q \leq Q(p)$) les nœuds internes à Γ^m qui sont liés à \mathbf{x}_p par une arête du maillage. Pour chaque indice p ($N_0(m) + 1 \leq p \leq N(m)$), nous choisissons $Q(p)$ nombres réels positifs c_q^p tels que

$$\forall p \quad , \quad N_0(m) + 1 \leq p \leq N(m) \quad , \quad \sum_{q=1}^{Q(p)} c_q^p = 1 .$$

Nous pouvons donc introduire

$$M_h^m = \{ \phi_h \in L^2(\Gamma^m) \mid \phi_h = \sum_{p=1}^{N_0(m)} \phi_h(\mathbf{x}_p) \lambda_p + \sum_{p=N_0(m)+1}^{N(m)} \left[\sum_{q=1}^{Q(p)} c_q^p \phi_h(\mathbf{x}_q^p) \right] \lambda_p \} ,$$

ce qui correspond à prolonger les valeurs de ϕ_h par interpolation.

5.3.3 Définition de M_h dans le cas vectoriel pour $d = 2$

En travaillant avec les éléments d'arête, les inconnues du problème sont les circulations le long des arêtes des triangles du maillage. De plus, la trace d'une fonction vectorielle sur une ligne est représentée par l'ensemble des valeurs de la composante tangentielle aux arêtes de cette ligne. Les quantités sont liées aux arêtes et pas aux nœuds: en deux

dimensions, on ne doit pas distinguer entre le cas où les interfaces Γ^m ($m = (k, j)$) ont un bord et le cas où ces interfaces sont des lignes fermées. Donc, pour tout Γ^m avec $m = (k, j)$,

$$M_h^m = \{\phi_h \in L^2(\Gamma^m) \mid \forall K \in \mathcal{T}_{k,h(k)}, \phi_h|_a \in \mathbb{P}_{n_k-1}(a), \forall a \text{ arête sur } K \cap \overline{\Gamma^m}\},$$

qui est exactement l'espace des traces tangentielles des fonctions appartenant à X_h .

5.3.4 Définition de M_h dans le cas vectoriel pour $d = 3$

Pour arriver à définir l'espace M_h dans le cas vectoriel avec $d = 3$, il faut introduire quelques notations supplémentaires. Nous allons reprendre la présentation de cet espace pour des éléments d'arête tétraédriques de la deuxième famille [101] qui a été faite dans [14]. Nous concentrons l'attention sur un côté esclave Γ^m avec $m = (k, j)$ qui est maillé par un nombre fini de triangles. Nous définissons

$$UK^m := \cup\{K \in (\mathcal{T}_{k,h(k)})_{|\Gamma^m} \mid \overline{K} \cap \partial\Gamma^m = \text{une arête de } K\}$$

$$DK^m := \cup\{K \in (\mathcal{T}_{k,h(k)})_{|\Gamma^m} \mid \overline{K} \cap \partial\Gamma^m = \text{deux arêtes de } K\}.$$

Soit \hat{K} le triangle de référence $\hat{K} = \{\hat{\mathbf{x}} := (\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2, 0 < \hat{x} < 1, 0 < \hat{y} < 1 - \hat{x}\}$, $\hat{\mathbf{n}}_{\hat{K}}$ la normale extérieure et a_1, a_2, a_3 ses trois arêtes. Pour chaque triangle $K \in (\mathcal{T}_{k,h(k)})_{|\Gamma^m}$, il existe une application linéaire et inversible $F_K(\hat{\mathbf{x}}) = B_K \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_K$ avec $B_K \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ et $\mathbf{b}_K \in \mathbb{R}^2$ telle que $K = F_K(\hat{K})$. Nous introduisons d'abord l'espace T_h^m défini comme étant l'ensemble des fonctions $\hat{\mathbf{v}} : \hat{K} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\hat{\mathbf{v}} \in (\mathbb{P}_{n_k}(\hat{K}))^2$, définies par les degrés de liberté

$$\begin{aligned} (a) \quad & \int_a \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\hat{K}} p \, ds \quad \forall p \in \mathbb{P}_{n_k}(a), \quad a = a_1, a_2, a_3, \\ (b) \quad & \int_{\hat{K}} \hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w} \, ds \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{R}_{n_k} := (\mathbb{P}_{n_k-2})^2 \oplus (\tilde{\mathbb{P}}_{n_k-2}) \cdot (-y, x), \end{aligned} \tag{5.9}$$

et qui sont transformées sur le triangle courant K par la transformation $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = B_K \hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}})$ où \mathbf{x} et $\hat{\mathbf{x}}$ se correspondent dans F_K . Dans la définition des degrés de liberté, \mathcal{R}_{n_k} est l'ensemble des éléments conformes en $H(\text{div})$ de Raviart-Thomas, tournés de $\pi/2$ dans le sens direct et $\tilde{\mathbb{P}}_{n_k-2}$ est défini comme étant l'ensemble des polynômes homogènes de \mathbb{R}^2 de degré $n_k - 2$. L'espace T_h^m est conforme en $H(\text{div})$ sur Γ^m et il a été introduit pour la première fois dans [42]. L'espace M_h^m des multiplicateurs de Lagrange est donc défini comme suit (à une rotation près du triangle K comme on va l'expliquer dans la Section 7.3):

$$\begin{aligned} M_h^m &:= \{\phi_h \in T_h^m \mid \\ & B_K^{-1}(\phi_h \circ F_K) \in \mathbb{P}_{n_k}(\hat{K}) \times \mathbb{P}_{n_k}(\hat{K}), \quad \forall K \in (\mathcal{T}_{k,h(k)})_{|\Gamma^m} \setminus (UK^m \cup DK^m), \\ & B_K^{-1}(\phi_h \circ F_K) \in \mathbb{P}_{n_k}(\hat{K}) \times \mathbb{P}_{n_k-1}(\hat{K}), \quad \forall K \in UT^m, \\ & B_K^{-1}(\phi_h \circ F_K) \in \mathbb{P}_{n_k-1}(\hat{K}) \times \mathbb{P}_{n_k-1}(\hat{K}), \quad \forall K \in DT^m \}. \end{aligned}$$

Pour définir un élément de M_h^m nous avons l'ensemble des degrés de liberté du type (5.9)(a) associés aux arêtes internes (à part les arêtes des triangles $K \in DK^m$) et les degrés de liberté du type (5.9)(b) associés aux triangles.

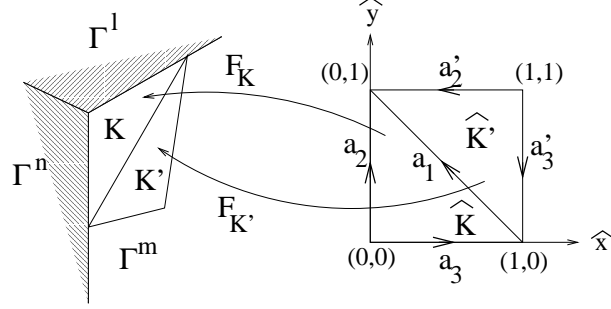


Figure 5.4: Transformation de $\hat{K} \cup \hat{K}'$ dans $K \cup K'$.

Les fonctions ϕ_h sur un triangle $K \in DK^m$ sont définies par des degrés de liberté qui ne dépendent pas seulement du triangle K mais aussi du triangle voisin. Soit donc K un triangle de DK^m et soit $K' \in (\mathcal{T}_{k,h(k)})_{|\Gamma^m}$ le triangle qui lui est adjacent selon la seule arête interne de K (comme dans la Figure 5.4). En faisant intervenir le triangle de référence \hat{K} , nous supposons que les deux arêtes de $\overline{K} \cap \partial\Gamma^m$ correspondent, dans l'application F_K , aux arêtes $a_2 = \{0\} \times]0, 1[$ et $a_3 =]0, 1[\times \{0\}$ de \hat{K} . Nous définissons par \hat{K}' le triangle rectangle qui, pris avec \hat{K} , nous donne le carré unitaire. Le triangle \hat{K}' est obtenu à partir du triangle K' en deux étapes: 1) nous considérons d'abord la transformation qui porte K' dans \hat{K} de façon que l'arête commune à K et K' soit l'hypoténuse de \hat{K} ; (2) ensuite, nous obtenons \hat{K}' comme le symétrique de \hat{K} par rapport à la ligne $\hat{x} + \hat{y} = 1$ (voir Figure 5.4).

Nous avons une fonction $\hat{\mathbf{v}}$ définie sur $\hat{K} \cup \hat{K}'$ et nous cherchons une fonction $\hat{\phi}_h$ définie sur le même domaine telle que la composante normale de $\hat{\phi}_h$ aux deux arêtes internes de \hat{K}' et qui n'appartient pas à \hat{K} , soit égale à la composante normale de $\hat{\mathbf{v}}$ aux mêmes arêtes. En détail, soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les trois coordonnées barycentriques associées au triangle \hat{K} telles que $\lambda_i|_{a_i} = 0$. L'expression des coordonnées barycentriques dans les deux triangles \hat{K} et \hat{K}' est la suivante:

$$\lambda_1 = \begin{cases} 1 - \hat{x} - \hat{y} & \text{dans } \hat{K} \\ \hat{x} + \hat{y} - 1 & \text{dans } \hat{K}' \end{cases}, \quad \lambda_2 = \begin{cases} \hat{x} & \text{dans } \hat{K} \\ 1 - \hat{y} & \text{dans } \hat{K}' \end{cases}, \quad \lambda_3 = \begin{cases} \hat{y} & \text{dans } \hat{K} \\ 1 - \hat{x} & \text{dans } \hat{K}' \end{cases}.$$

En coordonnées barycentriques nous avons

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}|_{\hat{K}} &= \begin{pmatrix} a\lambda_2 \\ b\lambda_3 \end{pmatrix}, & \hat{\mathbf{v}}|_{\hat{K}'} &= \begin{pmatrix} \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 + \gamma\lambda_3 \\ \alpha'\lambda_1 + \beta'\lambda_2 + \gamma'\lambda_3 \end{pmatrix}, \\ \hat{\phi}_h|_{\hat{K}} &= \begin{pmatrix} \bar{a} \sum_{i=1}^3 \lambda_i \\ \bar{b} \sum_{i=1}^3 \lambda_i \end{pmatrix}, & \hat{\phi}_h|_{\hat{K}'} &= \begin{pmatrix} \bar{\alpha}\lambda_1 + \bar{\beta}\lambda_2 + \bar{\gamma}\lambda_3 \\ \bar{\alpha}'\lambda_1 + \bar{\beta}'\lambda_2 + \bar{\gamma}'\lambda_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

où les coefficients qui ne sont pas soulignés sont donnés et ceux qui sont soulignés sont inconnus. En imposant la continuité des composantes normale de $\hat{\mathbf{v}}$ et de $\hat{\phi}_h$ à travers l'arête commune a_1 , nous obtenons, respectivement

$$\begin{aligned} \beta + \beta' &= a & , & \quad \gamma + \gamma' = b, \\ \overline{\beta} + \overline{\beta}' &= \overline{a} + \overline{b} & , & \quad \overline{\gamma} + \overline{\gamma}' = \overline{a} + \overline{b}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Ensuite, en imposant l'égalité entre les composantes normales de $\hat{\mathbf{v}}$ et de $\hat{\phi}_h$ aux arêtes internes de \hat{K}' nous avons

$$\begin{aligned} \text{sur } a_2, \quad \alpha' \lambda_1 + \gamma' \lambda_3 &= \overline{\alpha}' \lambda_1 + \overline{\gamma}' \lambda_3 \implies \alpha' = \overline{\alpha}', \gamma' = \overline{\gamma}', \\ \text{sur } a_3, \quad \alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2 &= \overline{\alpha} \lambda_1 + \overline{\beta} \lambda_2 \implies \alpha = \overline{\alpha}, \beta = \overline{\beta}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Si on choisit $a = \overline{a}$ et $b = \overline{b}$ on peut donc calculer $\overline{\beta}'$ et $\overline{\gamma}$ à l'aide des relations (5.11) et (5.12):

$$\begin{aligned} \overline{\beta}' &\stackrel{(5.11)}{=} \overline{a} + \overline{b} - \overline{\beta} \stackrel{(5.12)}{=} a + b - \beta \stackrel{(5.11)}{=} a + b - (a - \beta') = b + \beta', \\ \overline{\gamma} &\stackrel{(5.11)}{=} \overline{a} + \overline{b} - \overline{\gamma}' \stackrel{(5.12)}{=} a + b - \gamma \stackrel{(5.11)}{=} a + b - (b - \gamma) = a + \gamma. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \overline{\alpha} \lambda_1 + \overline{\beta} \lambda_2 + \overline{\gamma} \lambda_3 \\ \overline{\alpha}' \lambda_1 + \overline{\beta}' \lambda_2 + \overline{\gamma}' \lambda_3 \end{pmatrix} \stackrel{(5.13)}{=} \begin{pmatrix} \overline{\alpha} \lambda_1 + \overline{\beta} \lambda_2 + (a + \gamma) \lambda_3 \\ \overline{\alpha}' \lambda_1 + (b + \beta') \lambda_2 + \overline{\gamma}' \lambda_3 \end{pmatrix} \stackrel{(5.12)}{=} \\ &\begin{pmatrix} \alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2 + (a + \gamma) \lambda_3 \\ \alpha' \lambda_1 + (b + \beta') \lambda_2 + \gamma' \lambda_3 \end{pmatrix} \stackrel{(5.10)}{=} \hat{\mathbf{v}}_{|\hat{K}'} + \begin{pmatrix} a \lambda_3 \\ b \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\hat{\phi}_{h|\hat{K}'} = \hat{\mathbf{v}}_{|\hat{K}'} + \begin{pmatrix} a \lambda_3 \\ b \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\phi}_{h|\hat{K}} = \begin{pmatrix} a \sum_{i=1}^3 \lambda_i \\ b \sum_{i=1}^3 \lambda_i \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

En considérant le cas $n_k = 1$ sur le domaine $\hat{K} \cup \hat{K}'$, les degrés de liberté qui permettent de définir univoquement la fonction $\hat{\mathbf{v}}$ (et donc la fonction $\hat{\phi}_h$) sont la moyenne de v_x sur a_2 , la moyenne de v_y sur a_3 et les moyennes standard de v_x sur a'_2 et de v_y sur a'_3 .

La définition de l'espace M_h dans le cas vectoriel en trois dimensions fait intervenir la deuxième famille des éléments d'arête; avec cette famille, dans [14], les auteurs démontrent une majoration optimale de l'erreur.

D'autre part, on pense que l'utilisation de la première famille sur les interfaces entre sous-domaines adjacents, n'est pas optimale: cela est confirmé par les résultats numériques présentés dans la Section 7.3.

L'utilisation de la deuxième famille partout (sur les interfaces et à l'intérieur des sous-domaines) est trop coûteuse: dans [46], nous avons pensé à une deuxième famille "dégénérée" (ou, de façon équivalente, à une première famille "enrichie"), c'est-à-dire à utiliser la première famille à l'intérieur des sous-domaines et la deuxième famille sur les interfaces. Les résultats numériques relatives à cette utilisation sont présentés dans la Section 7.3.

5.4 Le problème discret

Supposons qu'on veuille approcher le problème variationnel suivant, pour une fonction donnée f régulière: trouver u dans X tel que

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in X, \quad (5.15)$$

où $a(., .)$ est une forme bilinéaire sur $X \times X$ et $\langle ., . \rangle$ le produit de dualité sur X . Avec la même démarche suivie dans le Chapitre 2 pour la discrétisation du problème (3.17), le problème discret est défini comme suit: trouver u_h dans X_h tel que

$$a_h(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle_h \quad \forall v_h \in X_h, \quad (5.16)$$

où les formes $a_h(., .)$ et $\langle ., . \rangle_h$ sont obtenues en écrivant les intégrales qui apparaissent dans $a(., .)$ et $\langle ., . \rangle$ comme sommes d'intégrales sur chaque sous-domaine Ω_k et éventuellement en remplaçant ces intégrales sur les sous-domaines par des formules de quadrature. Nous définissons la norme $||.||_*$ comme suit

$$||u||_* = \left(\sum_{k=1}^K ||u||_{X^k(\Omega_k)}^2 \right)^{1/2}. \quad (5.17)$$

L'évaluation de l'erreur commise sur la solution du problème (5.15) peut être obtenue à partir du deuxième lemme de Berger-Scott-Strang [15], dont nous rappelons l'énoncé:

Lemme de Berger-Scott-Strang – *Supposons que la forme bilinéaire $a_h(., .)$ soit elliptique et continue sur $X_h \times X_h$, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $C > 0$ telles que*

$$\begin{aligned} |a_h(v, v)| &\geq \alpha ||v||_*^2 \quad \forall v \in X_h, \\ |a_h(u, v)| &\leq C ||u||_* ||v||_* \quad \forall u, v \in X_h. \end{aligned}$$

Les solutions u du problème (5.15) et u_h du problème (5.16) vérifient l'estimation d'erreur suivante:

$$\|u - u_h\|_* \leq C \left(\inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_* + \sup_{\substack{w_h \in X_h \\ w_h \neq 0}} \frac{a_h(u, w_h) - \langle f, w_h \rangle_h}{\|w_h\|_*} \right) \quad (5.18)$$

On observe ici, en plus de l'erreur d'approximation, l'apparition d'une autre erreur de consistance qui indique dans quelle mesure le problème discret (5.16) approche bien le problème (5.15). En particulier, à partir du lemme précédent, nous obtenons l'estimation d'erreur suivante

$$\|u - u_h\|_* \leq c \left(\inf_{v_h \in X_h} \{ \|u - v_h\|_* \right. \quad (5.19)$$

$$+ \sup_{\substack{w_h \in X_h \\ w_h \neq 0}} \frac{a(u, w_h) - a_h(u, w_h)}{\|w_h\|_*} \} \quad (5.20)$$

$$+ \sup_{\substack{w_h \in X_h \\ w_h \neq 0}} \frac{\langle f, w_h \rangle - \langle f, w_h \rangle_h}{\|w_h\|_*} \quad (5.21)$$

$$+ \sup_{\substack{w_h \in X_h \\ w_h \neq 0}} \frac{a(u, w_h) - \langle f, w_h \rangle}{\|w_h\|_*} \left. \right). \quad (5.22)$$

Dans cette estimation, on voit apparaître la somme de plusieurs termes: à côté de l'erreur d'approximation (5.19) nous avons deux erreurs de quadrature (5.20), (5.21) dues à une éventuelle intégration numérique des formes $a_h(.,.)$ et $\langle ., . \rangle_h$ et l'erreur de consistance (5.22). Ce dernier terme mesure le "crime" commis en travaillant avec un espace discret X_h qui n'est pas un sous-espace de X . Son estimation est le point critique de la méthode des joints puisqu'elle a pour conséquence l'optimalité ou la non optimalité de la méthode.

Dans la suite, nous allons nous concentrer sur les termes (5.19) et (5.22) en spécifiant leurs expressions en fonction de l'espace dans lequel nous travaillons et les résultats de convergence. L'analyse des termes (5.20) et (5.21) est classique: en particulier, ils sont optimaux dans le sens précisé dans l'introduction.

5.4.1 Estimation d'erreur quand $X \subset H^1(\Omega)$

Nous allons définir les quantités caractéristiques dans l'espace $H^1(\Omega)$ comme la norme $||\cdot||_*$, la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ et l'expression de l'erreur de consistance. La norme est définie par

$$||u||_* = \left(\sum_{k=1}^K ||u|_{\Omega_k}||_{H^1(\Omega_k)}^2 \right)^{1/2}.$$

Pour ce qui concerne la forme bilinéaire et l'expression de l'erreur de consistance, à partir du problème pour le Laplacien, nous utilisons la formule de Green (3.10) et nous obtenons

$$a(u, v) = \sum_{k=1}^K \int_{\Omega_k} \text{grad } u|_{\Omega_k} \cdot \text{grad } v|_{\Omega_k} d\Omega \quad \forall u, v \in H^1(\Omega). \quad (5.23)$$

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit de dualité entre $H^{-1/2}(\partial\Omega_k)$ et $H^{1/2}(\partial\Omega_k)$. Le terme de consistance est donné par

$$\sup_{\substack{w_h \in X_h \\ w_h \neq 0}} \frac{\sum_{k=1}^K \langle \frac{\partial u}{\partial n}, w_h \rangle}{||w_h||_*}. \quad (5.24)$$

Comme exemple de résultat, pour le problème du Laplacien en deux dimensions [17] et trois dimensions [13] approché par la méthode des joints couplée avec des éléments finis nodaux de degré $n_k \geq 1$ pour $d = 2$ et $n_k = 1$ pour $d = 3$, nous avons la proposition suivante.

Proposition – *Supposons que la solution u du problème (5.15) soit telle que, pour chaque $1 \leq k \leq K$, $u|_{\Omega_k} \in H^{s_k}(\Omega_k)$ pour un réel s_k tel que $3/2 \leq s_k \leq n_k + 1$. Alors nous avons l'estimation suivante de l'erreur entre la fonction u et la solution u_h du problème discret (5.16):*

$$||u - u_h||_* \leq C_1 \sum_{k=1}^K h^{s_k-1} ||u|_{\Omega_k}||_{H^{s_k}(\Omega_k)}. \quad (5.25)$$

La méthode est donc optimale en ce sens que l'erreur globale est majorée par la somme des erreurs locales avec une constante C_1 qui ne dépend pas du paramètre de discrétisation h . Ce résultat est applicable au cas où l'on approche le problème de la magnétostatique (2.26) en terme du potentiel scalaire Φ ou bien (2.37) en terme d'une des composantes du potentiel vecteur \mathbf{a} . Ce résultat d'optimalité est généralisable avec un peu plus de travail

aux problèmes magnétodynamiques. Voir par exemple, l'Article 1 où nous avons appliqué la méthode des joints sur maillage glissant couplée avec des éléments finis nodaux pour approcher l'équation (2.72).

5.4.2 Estimation d'erreur quand $X \subset H(\text{rot}, \Omega)$ avec $d = 2$

Dans ce cas, la norme est définie par

$$\|\mathbf{u}\|_* = \left(\sum_{k=1}^K (\|\mathbf{u}|_{\Omega_k}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_k)}^2 + \|\text{rot } \mathbf{u}|_{\Omega_k}\|_{L^2(\Omega_k)}^2) \right)^{1/2}.$$

En ce qui concerne la forme bilinéaire et l'expression de l'erreur de consistance, à partir du problème pour l'opérateur rot-rot appliqué en deux dimensions à des fonctions vectorielles, nous utilisons la formule de Green (3.15) et nous obtenons

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^K \int_{\Omega_k} \text{rot } \mathbf{u}|_{\Omega_k} \text{rot } \mathbf{v}|_{\Omega_k} d\Omega, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H(\text{rot}, \Omega); \quad (5.26)$$

ayant noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit de dualité entre $H^{-1/2}(\partial\Omega_k)$ et $H^{1/2}(\partial\Omega_k)$ nous avons que le terme de consistance pour des fonctions régulières est donné par

$$\sup_{\substack{w_h \in X_h \\ w_h \neq 0}} \frac{\sum_{k=1}^K \langle \mathbf{w}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_{\partial\Omega_k}, \text{rot } \mathbf{u} \rangle}{\|w_h\|_h}. \quad (5.27)$$

Comme exemple de résultat, pour l'opérateur rot-rot en deux dimensions [9] approché par la méthode des joints couplée avec éléments finis d'arête de la deuxième famille de degré n_k nous avons la proposition suivante.

Proposition – *Supposons que la solution $\mathbf{u} \in H(\text{rot}, \Omega)$ du problème (5.15) soit telle que, pour chaque $1 \leq k \leq K$, $\mathbf{u}|_{\Omega_k} \in (H^{s_k}(\Omega_k))^2$ et $\text{rot } \mathbf{u}_k \in H^{s_k}(\Omega_k)$ pour un réel s_k . Alors nous avons l'estimation de l'erreur suivante, entre la fonction \mathbf{u} et la solution \mathbf{u}_h du problème discret (5.16):*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* \leq C_2 \sum_{k=1}^K h^{s_k} (\|\mathbf{u}|_{\Omega_k}\|_{(H^{s_k}(\Omega_k))^2} + \|\text{rot } \mathbf{u}|_{\Omega_k}\|_{H^{s_k}(\Omega_k)}). \quad (5.28)$$

La méthode est donc optimale en ce sens que l'erreur globale est majorée par la somme des erreurs locales avec une constante C_2 indépendante de h . Ce résultat est applicable dans le cas où l'on travaille en deux dimensions et où l'on approche le problème de la magnéto-statique (2.37) en terme des deux composantes du potentiel vecteur \mathbf{a} .

Ce résultat d'optimalité est généralisable aux problèmes de magnéto-dynamique formulé en champ magnétique \mathbf{H} (2.50) ou bien en champ électrique \mathbf{E} (2.57) ou encore en potentiel vecteur correspondant dans (2.63) et (2.72). Pour des problèmes où le domaine d'étude présente une partie en mouvement, l'estimation d'erreur est en cour d'étude et devrait suivre en utilisant les mêmes techniques développées dans [44].

5.4.3 Estimation d'erreur quand $X \subset H(\text{rot}, \Omega)$ avec $d = 3$

Enfin, pour ce troisième cas, nous considérons la norme

$$\|\mathbf{u}\|_* = \left(\sum_{k=1}^K (\|\mathbf{u}|_{\Omega_k}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_k)}^2 + \|\text{rot } \mathbf{u}|_{\Omega_k}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_k)}^2) \right)^{1/2}.$$

En ce qui concerne la forme bilinéaire et l'expression de l'erreur de consistance, à partir du problème pour l'opérateur rot-rot appliqué en trois dimensions à des fonctions vectorielles, nous utilisons la formule de Green (3.16) et nous obtenons

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^K \int_{\Omega_k} \text{rot } \mathbf{u}|_{\Omega_k} \cdot \text{rot } \mathbf{v}|_{\Omega_k} d\Omega, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H(\text{rot}, \Omega). \quad (5.29)$$

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit de dualité entre $(H^{-1/2}(\partial\Omega_k))^3$ et $(H^{1/2}(\partial\Omega_k))^3$. Le terme de consistance pour une fonction régulière est donné par

$$\sup_{\substack{w_h \in X_h \\ w_h \neq 0}} \frac{\sum_{k=1}^K \langle \mathbf{n}_{\partial\Omega_k} \times \mathbf{w}_h, \text{rot } \mathbf{u} \rangle}{\|w_h\|_h} \quad (5.30)$$

Comme exemple de résultat, pour l'opérateur rot-rot en trois dimensions [14] approché par la méthode des joints couplée avec les éléments finis d'arête de la deuxième famille de degré n_k , nous avons, pour l'erreur d'approximation, la proposition suivante.

Proposition – *Supposons que la solution $\mathbf{u} \in H(\text{rot}, \Omega)$ du problème (5.15) soit telle que, pour chaque $1 \leq k \leq K$, $\mathbf{u}|_{\Omega_k} \in (H^{s_k}(\Omega_k))^2$ et $\text{rot } \mathbf{u}_k \in (H^{s_k}(\Omega_k))^3$ pour un réel s_k . Alors*

nous avons l'estimation suivante

$$\inf_{v_h \in X_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_* \leq C_3 \left(\sum_{k=1}^K h^{2s_k} (|\mathbf{u}|_{\Omega_k} |_{(H^{s_k}(\Omega_k))^3} + |\operatorname{rot} \mathbf{u}|_{\Omega_k} |_{(H^{s_k}(\Omega_k))^3}) \right)^{1/2}. \quad (5.31)$$

Pour l'erreur de consistance on a la proposition suivante.

Proposition – Supposons que la solution $\mathbf{u} \in H(\operatorname{rot}, \Omega)$ du problème (5.15) soit telle que, pour chaque $1 \leq k \leq K$, $\mathbf{u}|_{\Omega_k} \in (H^{s_k}(\Omega_k))^2$ et $\operatorname{rot} \mathbf{u}_k \in (H^{s_k}(\Omega_k))^3$ pour un réel s_k . Alors nous avons l'estimation suivante

$$\sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in X_h \\ \mathbf{v}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{\sum_{k=1}^K \langle \mathbf{n}_{\partial\Omega_k} \times \mathbf{v}_h|_{\Omega_k}, \operatorname{rot} \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{v}_h\|_*} \leq C_4 \left(\sum_{m=1}^M \frac{h_k^{2s_k+1}}{\min_{l \in \mathcal{I}_m} h_l} |\ln h_k| \|\operatorname{rot} \mathbf{u}\|_{(H^{s_k}(\Omega_k))^3}^2 \right)^{1/2} \quad (5.32)$$

La méthode est donc optimale à un factor $\sqrt{|\ln h|}$ près. Ce résultat est applicable au cas où l'on travaille en trois dimensions et où l'on approche le problème magnétostatique (2.37) en termes du potentiel vecteur \mathbf{a} . Ce résultat d'optimalité est valable pour les problèmes magnétodynamiques formulés en champ magnétique \mathbf{H} (2.50) ou bien en champ électrique \mathbf{E} (2.57) ou encore en potentiel vecteur correspondant dans (2.63) et (2.72). Pour des problèmes où le domaine d'étude présente une partie en mouvement, l'estimation d'erreur est à l'étude.

5.5 En présence du mouvement

Le long de ce chapitre, nous avons présenté la méthode des joints en supposant que le domaine d'étude Ω ne bouge pas. Les applications numériques que nous allons décrire dans les Chapitres 6 et 7 sont conduites dans des domaines décomposés en une partie fixe et une partie mobile. La partie mobile ne se déforme pas mais bouge de façon rigide tout en restant en contact avec la partie fixe. Comme nous l'avons anticipé au début du Chapitre 4, le choix du repère est un point crucial de la modélisation du problème des courants en présence du mouvement.

Il est connu que les équations de Maxwell sont covariantes, c'est-à-dire ne changent pas de forme, sous la transformation de Lorentz, en passant d'un système inertiel à l'autre. En revanche, elles ne sont pas covariantes, sous la même transformation, en passant d'un système inertiel à un système tournant. Quand on considère le modèle des courants induits, les courants de déplacement ($\partial_t \mathbf{D}$) sont négligés par rapport aux courants de

conduction (\mathbf{J}) et il n'y a pas de propagation d'ondes. Chaque changement dans la densité de courant de conduction \mathbf{J} influence de façon instantanée tout l'espace environnant. On dit que la vitesse de propagation est infinie et la transformation de Lorentz se réduit à celle de Galilée. Dans l'approximation de l'électrotechnique, les équations de Maxwells suivent les lois de la relativité de Galilée [22]. De plus, les équations de la magnétodynamique sont covariantes, par rapport à la transformation de Galilée, en passant soit d'un système inertiel à l'autre, soit d'un système inertiel à un système tournant [83]. De ce fait, la forme des équations dans un repère comobile à un corps rigide en mouvement, quel que soit ce mouvement, est la même que si ce corps était au repos (et la distinction entre rotor et stator est donc arbitraire). Pour l'analyse des courants induits en présence de corps rigides en mouvement quasi-stationnaire, i.e. caractérisé par des *accélérations très faibles* (comme c'est le cas pour les dispositifs électrotechniques), il y a donc liberté dans le choix du repère [89]. Il faut souligner que cette caractéristique est propre au modèle des courants induits (c'est-à-dire quand on travaille à "basses" fréquences) et elle n'est plus valable pour le système complet des équations de Maxwell (dans cet dernier cas, la plus petite accélération peut avoir un effet important sur les champs physiques [134]). Cette particularité du modèle des courants induits rend possible l'approche "lagrangienne par morceaux" [83] considérée ici : on peut donc utiliser un repère (fixe) lié au stator et un repère (mobile) lié au rotor. Il faut alors interpréter la condition de raccord à l'interface de glissement Γ entre stator et rotor.

En détail, on considère un domaine d'étude Ω décomposé en deux parties, Ω_1 qui peut bouger (i.e. tourner autour d'un axe) et $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$ qui reste fixe. Les équations peuvent être gardées en lagrangien, quitte à faire un "raccord" adéquat, d'où l'intérêt de la méthode de joints. Soit $r_t : \Omega_1 \rightarrow \Omega_1$ l'opérateur de rotation au temps t qui tourne le domaine Ω_1 d'un angle $\theta = \theta(t)$ et r_{-t} son inverse. Pour que le raccord marche, il faut que $r_t\Omega_1(0) = \Omega_1(t)$ n'aille pas heurter Ω_2 donc qu'il existe une interface Γ invariante par r_t , séparant Ω en deux régions, interne Ω_1 et externe Ω_2 . Nous supposons donc que Γ est un cylindre, pour un mouvement de rotation, ou un plan, pour un mouvement de translation, tangent à la vitesse. On suppose qu'il existe une configuration de référence $\Omega(0) = \Omega_1(0) \cup \Omega_2$: la particule matérielle qui au temps t occupe la position x dans la configuration $\Omega(t) = \Omega_1(t) \cup \Omega_2$ est celle qui était en $r_{-t}x$ dans la configuration de référence. Un champ u défini sur Ω est vu comme la juxtaposition de deux champs u_1 et u_2 avec des conditions de raccord sur Γ qui dépendent du temps

$$\begin{aligned} u_1(r_{-t}x, t) &= u_2(x, t), & u \text{ fonction scalaire,} \\ u_1(r_{-t}x, t) \cdot \tau_\Gamma(r_{-t}x) &= u_2(x, t) \cdot \tau_\Gamma(x), & u \text{ fonction vectorielle en deux dimensions,} \\ r_t u_1(r_{-t}x, t) \times r_t n_\Gamma(r_{-t}x) &= u_2(x, t) \times n_\Gamma(x), & u \text{ fonction vectorielle en trois dimensions.} \end{aligned}$$

Comme fonction scalaire on peut avoir la troisième composante d'un vecteur de \mathbb{R}^3 dans un problème bidimensionnel. La condition de raccord sur la fonction vectorielle est val-

able pour tout champ de vecteurs dont la composante tangentielle est continue à travers l'interface entre les deux milieux. Les relations précédentes peuvent être multipliées par une constante (paramètre physique) qu'il faut évaluer dans le même point où on évalue la fonction u_i associée. Les conditions de raccord sont les conditions de transmission naturelles sur le champ physique u . On retournera sur le sujet dans les chapitres suivants (voir aussi [31]).

Dans les trois chapitres suivants, nous allons montrer les résultats théoriques et numériques obtenus en appliquant la méthode des joints combinée avec les éléments finis dans le cadre magnétodynamique. Pour ce qui concerne les articles contenus dans ces trois chapitres, nous y décrivons, en même temps que les formulations des problèmes considérés, tous les détails de la mise en œuvre de la méthode proposée dans cette Thèse.

Chapitre 6

Applications de la méthode à éléments finis nodaux avec joints

L'objet de ce chapitre est la présentation des résultats théoriques et numériques concernant l'application de la méthode de joints combinée avec les éléments finis nodaux au problème magnétodynamique (2.45)-(2.49). Les hypothèses sur les champs inconnus et sur le domaine d'étude seront telles que nous aurons à résoudre des équations aux dérivées partielles scalaires en deux dimensions. Le chapitre est structuré en trois parties.

La première partie a fait l'objet de l'article [44]: elle contient les résultats théoriques de convergence et stabilité relatifs à l'approximation du problème magnétodynamique formulé en terme du potentiel magnétique modifié (2.72). Ces résultats sont aussi valables pour l'approximation du problème magnétodynamique formulé en terme du champ magnétique (2.50) présentée dans [107] et sont validés du point de vue numérique pour ce deuxième cas dans [44].

Dans la deuxième partie nous allons décrire les aspects de la mise en œuvre de la méthode qui font l'objet de l'article [107] et présenter les résultats de l'approximation du champ magnétique dans des cas concrets. L'influence du mouvement sur la distribution des courants et sur l'estimation de pertes par effet Joule y sera analysée.

La dernière partie, décrite dans [38, 110, 39], est destinée à l'analyse d'un problème couplé magnéto-mécanique. Cette dernière partie sera précédée par une introduction sur le calcul de forces électromagnétiques et sur les différentes méthodes pour modéliser des phénomènes couplés magnéto-mécaniques.

Ces trois parties permettent de montrer les avantages, précision et flexibilité, de la méthode des joints par rapport aux autres méthodes pour la prise en compte du mouvement décrites dans le Chapitre 4. Nous retrouverons les mêmes caractéristiques dans le chapitre suivant où la méthode des joints sera combinée avec des éléments finis d'arêtes.

Pour la description de la structure du logiciel aux éléments finis avec joints utilisé pour

les simulations numériques, voir la Section A.2 dans l'Annexe. Nous y présentons d'abord la structure pour les applications sans couplage mécanique; ensuite, on met en évidence les modifications apportées pour tenir compte de ce couplage.

6.1 *Article 1* – A sliding mesh-mortar method for a two dimensional eddy currents model of electric engines

par *A. Buffa, Y. Maday, F. Rapetti*

soumis à Math. Meth. in Num. Anal. (M²AN) (1999).

A SLIDING MESH-MORTAR METHOD FOR A TWO DIMENSIONAL EDDY CURRENTS MODEL OF ELECTRIC ENGINES

A. BUFFA*, Y. MADAY^{†‡}, F. RAPETTI[†]

Abstract

The paper deals with the application of a non-conforming domain decomposition method to the problem of the computation of induced currents in electric engines with moving conductors. The *eddy currents model* is considered as a quasi-static approximation of Maxwell equations and we study its two-dimensional formulation with either the modified magnetic vector potential or the magnetic field as primary variable.

Two discretizations are proposed, the first one based on curved finite elements and the second one based on iso-parametric finite elements in both the static and moving parts. The coupling is obtained by means of the *mortar element method* (see [7]) and the approximation on the whole domain turns out to be non-conforming. In both cases optimal error estimates are provided.

Numerical tests are then proposed in the case of standard first order finite elements to test the reliability and accuracy of the method. An application of the method to study the influence of the free part movement on the currents distribution is also provided.

Key words. eddy currents problem, non-conforming finite element approximation, domain decomposition methods

AMS(MOS) subject classifications. 65N15, 65M55, 68U20, 78A30, 35Q60

Introduction

The computation of the space and time distribution of the induced currents in electromagnetic systems is of great importance for performances prediction and devices design. Generated in conducting materials by temporal variations of the surrounding magnetic field, the induced currents can have positive or negative effects depending on the application. In the case of the induction engines the presence of induced currents is positive and generates the propulsion forces which are at the basis of the working of the engine. This is not the case for transformers: any energy lost through heat transfer by Joule's effect in the ferromagnetic material during the transfer from the primary to the secondary coil, reduces the efficiency of a transformer.

The subject of our research activity is the analysis and development of simulation tools to effectively predict the induced currents distribution in non-stationary geometries with sliding interfaces. As an example, in this paper we will study a system composed of two solid parts: a fixed one (stator) and a moving one (rotor) which turns around a given axis.

*Dipartimento di Matematica, Università di Pavia, Via Ferrata 1, 27100 Pavia, Italy

[†]Applications Scientifiques du Calcul Intensif, UPR 9029 CNRS, Bat.506, Université Paris XI, 91403 Orsay, France

[‡]Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris VI, 4 place Jussieu, 75252 Paris, France

Several configurations of the physical system are considered: completely conducting ones with discontinuous conductivities are analyzed as well as partially conducting ones with, for example, air-gaps or materials with different magnetic properties.

We use a two-dimensional mathematical model as it results classically in the following situations:

- The physical system can be considered as an infinitely long cylinder and the sources are taken either tangent or orthogonal to the transverse section of the physical system we are considering: this leads to two-dimensional problems which are known in literature as TE (transverse electric) and TM (transverse magnetic) formulations respectively [20]. Here we have adopted the wave propagation terminology where the propagation direction becomes the diffusion one.
- The displacement currents can be neglected with respect to the conducting ones: we solve a quasi-static approximation of Maxwell's equations which is known as eddy currents model. From the mathematical point of view we deal with a degenerate parabolic problem.
- We aim at studying the variation of the current distribution due to the rotor movement: this suggests working in the time domain instead of the frequency one.

When a part of the physical system is moving with great amplitude with respect to the rest, the use of a standard conforming Galerkin method based on the deformation of the finite elements is not recommended. Due to the elements distortion, a partial or total re-meshing of the computational domain may be necessary. Generally, the re-meshing process and, most of all, the interpolation of the unknowns at the new nodes increase the computational cost of the numerical simulations. Some techniques that minimize this cost have already been analyzed: see, for example, the macro-element method [27], the moving layer method [17], a finite elements-boundary elements coupling [24].

In this paper, we propose a non-conforming (in space) approximation of the problem based on the so called *mortar element method* (see [7] and [4]). This method allows for non-matching grids at the interface between the stator and rotor domains. The matching constraint at the interface between the rotor and stator is weakly imposed on the discrete solution by means of Lagrange multipliers. Note that our approach differs radically from that proposed in [23, 28] even if the terminology is quite similar. Indeed, here, the Lagrange multiplier is *never* interpreted in terms of the primal unknown.

The discrete approximation space for Lagrange multipliers is chosen, according to the mortar element method theory, as the space of traces at Γ of discrete functions in the stator part (or equivalently in the rotor one). Then the Lagrange multipliers are eliminated and we propose to solve the primal problem (and not a mixed one) in a constrained space which turns out to be a non-conforming approximation of the continuous functional framework (see [7] or [4] for details).

The use of a method with non-matching grids allows us to work with only one whole mesh composed of a fixed part and a rotating one: no heavy constraints are imposed between the discretization parameter h (that is the maximum of the mesh elements diameters) at the interface and the rotation angle associated at each time step. Loosely speaking, the two discretizations of the interface induced by the stator and the rotor meshes do not need to coincide after each discrete rotation angle of the rotor domain as in the lock-step method [18].

Note that the main purpose of this paper is to propose a new non-conforming spatial approximation and as far as the time discretization is concerned, we adopt here an implicit Euler scheme as an “example” of time stepping. Thanks to the flexibility in the way the movement is treated (no constraint between time step, mesh size and the speed of the rotor), we expect that any discretization scheme can be used in time providing an optimal rate of convergence [29].

For what concerns the organization of the paper, in Section 1 we deduce the two-dimensional model from the system of Maxwell's equations, we write the variational formulation and prove the well posedness of the continuous problem. In Section 2 we propose the spatial discretization based on the mortar element method and in Section 3 we present the time discretization, providing a complete

analysis of the method convergence as well as an optimal error estimate. In Section 4 the effect of iso-parametric finite elements at the interface is studied and optimal error estimates are provided also in this case. In Section 5 we detail the implementation aspects of the proposed method in case of standard linear finite elements resulting in the solution of a symmetric and positive definite system. Finally, Section 6 is dedicated to some numerical results both of validation and application of the method to an academic concrete problem; we refer to [26] for more physical examples.

1 The continuous problem

For the sake of completeness, we briefly deduce the mathematical models of the problem we are going to deal with, starting from the system of Maxwell's equations and under classical assumptions. In this short presentation, we will focus our attention only on the derivation of the equations and not on the initial and boundary conditions that we suppose equal to zero (see [16], vol. 1 for more general situations).

Let \mathcal{D} be an infinitely long cylinder in \mathbb{R}^3 with a Lipschitz transverse section Ω . We fix a system of coordinates (x, y, z) such that (x, y) are the transverse ones.

In the following we will use the bold style to denote three-dimensional vectors and the roman style for scalars. The system of Maxwell equations in \mathcal{D} , when the displacement currents are neglected, reads as follows (see [9], chapter 4):

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && \text{in } \mathcal{D} \\
 (b) \quad & \nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_s && \text{in } \mathcal{D} \\
 (c) \quad & \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = 0 && \text{where } \sigma = 0 \\
 (d) \quad & \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} && \text{in } \mathcal{D} \\
 (e) \quad & \text{initial conditions} && \text{in } \mathcal{D} \\
 (f) \quad & \text{boundary conditions} && \text{on } \partial \mathcal{D}
 \end{aligned} \tag{1}$$

where \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{B} are the electric, the magnetic fields and the magnetic induction respectively.

Concerning the magnetic permeability μ , the electric permittivity ε and the electric conductivity σ , we assume that the material is homogeneous and isotropic in the two transverse directions. Hence,

- they are functions, not tensors;
- they respect the symmetry of the domain, in the sense that

$$\varepsilon(x, y, z) = \varepsilon(x, y), \quad \mu(x, y, z) = \mu(x, y), \quad \sigma(x, y, z) = \sigma(x, y).$$

Both μ and σ are completely characterized by $\mu|_{\Omega}$ and $\sigma|_{\Omega}$.

- We assume that $\mu \in L^\infty(\Omega)$ and that there exists a $\bar{\mu}$ such that $\mu(\mathbf{x}) \geq \bar{\mu} > 0$ a.e. $\mathbf{x} \in \Omega$. For the conductivity, we suppose that $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ and $\sigma(\mathbf{x}) \geq 0$ a.e. $\mathbf{x} \in \Omega$. From now on, we denote by \mathcal{C} the conducting part of Ω (i.e. $\mathcal{C} := \text{supp}\{\sigma\}$) and by $\mathcal{I} := \Omega \setminus \text{supp}\{\sigma\}$ the non-conducting part, that may be reduced to the empty set.

Moreover we assume that the system (1) admits a unique solution $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{B})$. It is well known (see [22]) that it is true under some regularity assumptions on the parameters and on the transverse section Ω and when suitable boundary conditions are chosen.

In case the provided source \mathbf{J}_s respects also the symmetry of the domain, the system (1) can be reduced to a scalar equation. Basically two different situations may occur [2].

1.1 Magnetic equation for the TE formulation

We consider here a system totally made of conducting material ($\mathcal{I} = \emptyset$) and, moreover we assume that the given current density verifies:

$$\mathbf{J}_s = (J_x(x, y, t), J_y(x, y, t), 0) \quad \text{and} \quad \nabla \cdot (\mathbf{J}_s) = 0.$$

From equation (a) in (1) and the uniqueness of the solution of the system (1), we deduce that the electric and magnetic fields take the form

$$\mathbf{E} = (E_x(x, y, t), E_y(x, y, t), 0) \quad , \quad \mathbf{H} = (0, 0, H(x, y, t)).$$

Then, by eliminating the electric field using equations (a), (b) and (d) in (1), we obtain the following scalar equation for the third component H of the magnetic field \mathbf{H} :

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} - \nabla \cdot (\sigma^{-1} \nabla H) = \nabla \times (\sigma^{-1} J_x, \sigma^{-1} J_y) \quad (2)$$

where $\nabla \times (a_x, a_y)$ is the scalar defined as

$$\nabla \times (a_x, a_y) = \left(\frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial x} \right).$$

By solving equation (2) and using equations (b) and (d) of (1) we can recover both the vectorial electric field and the scalar magnetic induction.

1.2 Modified magnetic potential equation for the TM formulation

When the current density \mathbf{J}_s has the form:

$$\mathbf{J}_s = (0, 0, J_s(x, y, t))$$

the system (1) can again be reduced to a scalar partial differential equation. This equation can be used to compute both the electric field [11] and the so-called modified vector potential [12]. We derive here the equation for the modified vector potential. From which, both magnetic field (computing the curl) and the electric field (computing the time derivative) can be easily obtained. From equation (b) in (1) and the uniqueness of the solution of system (1), we have that the electric and magnetic fields take the form:

$$\mathbf{H} = (H_x(x, y, t), H_y(x, y, t), 0) \quad , \quad \mathbf{E} = (0, 0, E(x, y, t)).$$

From (a) in (1), we introduce the quantity

$$A(x, y, t) = - \int_0^t E(x, y, s) ds$$

which is the third component, and the only non-zero one, of the modified magnetic vector potential. By eliminating the magnetic field \mathbf{H} from equations (a) and (b) in (1), we obtain a scalar equation for the modified vector potential A which reads:

$$\sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \cdot (\mu^{-1} \nabla A) = J_s. \quad (3)$$

The electric and magnetic fields can be then recovered from A by suitably deriving this quantity.

From a mathematical point of view, both (2) and (3) are linear parabolic second order partial differential equations and they can numerically be implemented in the same way. The only difference is that equation (3) may be non-strictly parabolic due to the fact that the conductivity σ vanishes in a part of the domain. Due to this fact, from the theoretical point of view (existence of solutions, numerical analysis of the discrete problem) equation (3) is more difficult to treat (see previous references and articles [9, 19] in steady configurations). On the other hand, from a numerical point of view, many of the methods for the simulation of moving systems can be applied only to systems with a not too thin air-gap. For this reason, we have led numerical tests on equation (2) to show the flexibility of our method and its ability at reproducing the currents distribution in a fully conducting domain, composed of two parts, a free one rotating in sliding contact with the other.

1.3 Problem equations in the case of moving geometries

From now on we study a two-dimensional problem defined in a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ which is assumed to be a polygonal bounded open set in \mathbb{R}^2 . We refer to the equation (3) and we consider the case of moving geometries.

We denote by Ω_1 a set containing the moving conducting part of the physical system, that is the rotor, chosen in such a way that $\Omega \setminus \Omega_1$ contains the still conducting part (i.e. Ω_1 may contain a part of the air-gap but no part of the stator). Let $\Gamma := \partial\Omega_1$, we assume that Γ is a circle with center $O \in \Omega_1$ and that Ω_1 is turning with the rotation speed $\omega \in C^2([0, +\infty[)$. We set $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$ and $\theta(t) = \int_0^t \omega(s) ds$.

We call $r_t : \Omega_1 \rightarrow \Omega_1$ the rotation operator at time t which rotates the domain Ω_1 of the angle $\theta = \theta(t)$ and r_{-t} its inverse. We set $\Omega_1(t) := r_t\Omega_1(0)$: of course the geometric set is always the same, but, the physical system may change since the physical quantities σ, ε, μ can be non-invariant with respect to r_t . Moreover, r_t has always to be seen as a change in the system of coordinates which is naturally defined in Ω_1 . Accordingly we denote $\Omega = \overline{\Omega_1}(0) \cup \Omega_2$ and $\Omega(t) = \overline{\Omega_1}(t) \cup \Omega_2$.

In the case of moving bodies the equations (2) and (3) change accordingly to the movement law (see [21] for a short presentation) and we consider the formulation in term of Lagrangian variables.

We focus our attention on the equation (3). In the rest of the paper we rename the modified vector potential A as u since the notation A can be misleading. We also adopt the notation $u = (u_1, u_2)$ where $u_i := u|_{\Omega_i}$ for $i = 1, 2$ (the same for the parameters of the problem.)

The equation determining the dynamic of u (as a function of Lagrangian variables) can be expressed in transmission form as follows:

$$\begin{aligned}
(E_1) \quad & \sigma_1(\mathbf{x}) \frac{\partial u_1}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot (\mu_1^{-1}(\mathbf{x}) \nabla u_1)(\mathbf{x}, t) = 0 & \Omega_1(0) \times]0, T[\\
(E_2) \quad & \sigma_2(\mathbf{x}) \frac{\partial u_2}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot (\mu_2^{-1}(\mathbf{x}) \nabla u_2) = J_s(\mathbf{x}, t) & \Omega_2 \times]0, T[\\
(IC_1) \quad & u_1(r_{-t} \mathbf{x}, t) = u_2(\mathbf{x}, t) & \Gamma \times]0, T[\\
(IC_2) \quad & \mu_1^{-1}(r_{-t} \mathbf{x}) \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}}(r_{-t} \mathbf{x}, t) = \mu_2^{-1}(\mathbf{x}) \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) & \Gamma \times]0, T[\\
(BC) \quad & u_2(\mathbf{x}, t) = 0 & \partial\Omega \times]0, T[\\
(OC) \quad & u(\mathbf{x}, 0) = 0 & \mathcal{C} \times \{0\}
\end{aligned} \tag{4}$$

where the partial differential equations (E_1) and (E_2) are in the sense of distributions in Ω_1 and Ω_2 respectively and \mathbf{n} is at every $\mathbf{x} \in \Gamma$ the unit vector normal outward to Ω_2 . We further assume that the data $J_s \in L^2([0, T] \times \Omega)$ is a source current whose support is contained in Ω_2 . As regards to (BC) , for the sake of simplicity, we consider only homogeneous Dirichlet boundary conditions, but the general

case (with non-homogeneous Dirichlet, Neumann and mixed Dirichlet-Neumann conditions) could be treated with the same tools. The interface conditions (IC_1) and (IC_2) are explained in what follows.

We define, for any $t \in \mathbb{R}$, the two rotation operators $R_t : H^1(\Omega_1) \rightarrow H^1(\Omega_1)$ and $\mathcal{R}_t : H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2) \rightarrow H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$ as:

$$R_t(u_1)(\mathbf{x}) = u_1(r_t \mathbf{x}) \quad , \quad \mathcal{R}_t(u_1, u_2)(\mathbf{x}) := (R_t(u_1)(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x})). \quad (5)$$

The function $\mathcal{R}_{-t}(u(t))$ turns out to be the *physical* magnetic potential, that is the magnetic potential expressed in Eulerian variables. The interface conditions $(IC_1), (IC_2)$ are the natural transmission conditions on this function: (IC_1) stating the continuity of $\mathcal{R}_{-t}(u(t))$ (i.e. the continuity of \mathbf{E}) and (IC_2) the equality of the flux (i.e. the continuity of the tangential component of \mathbf{H}).

Remark 1.1 The same kind of formulation can be done in the context of the heat equation. If the unknown u is the temperature in a moving structure, the behaviour laws are exactly the same. That is, roughly speaking, the solid material point carries with itself its temperature when moving.

1.4 Variational formulation

We introduce the following notations:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(\Omega) &= H^s(\Omega_1) \times H^s(\Omega_2) & s > 0; \\ \|u\|_{\star, s}^2 &= \|u_1\|_{s, \Omega_1}^2 + \|u_2\|_{s, \Omega_2}^2 & \forall u \in \mathcal{H}^s(\Omega) \quad (\text{broken norm}); \\ |u|_{\star, s}^2 &= |u_1|_{s, \Omega_1}^2 + |u_2|_{s, \Omega_2}^2 & \forall u \in \mathcal{H}^s(\Omega) \quad (\text{broken semi-norm}). \end{aligned} \quad (6)$$

Moreover we shorten the notation setting $\|\cdot\|_{\star} := \|\cdot\|_{\star, 1}$. We know that $\mathcal{H}^s(\Omega)$ are Hilbert spaces with the natural norms and semi-norms (6).

We then define the following functional space:

$$\mathcal{U}^t = \{u := (u_1, u_2) \in \mathcal{H}^1(\Omega) \text{ such that } u_1(r_{-t} \mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \text{ and } u|_{\partial\Omega} = 0\}. \quad (7)$$

It is easy to see that $u \in \mathcal{U}^t$ if and only if the function $\mathcal{R}_{-t}(u)$ is in $H_0^1(\Omega)$. This is, of course, an equivalent definition of the functional space \mathcal{U}^t . Clearly \mathcal{U}^t is a time dependent space and, for every fixed value of t , it is a closed subspace of $\mathcal{H}^1(\Omega)$. Accordingly, we denote by $(\mathcal{U}^t)'$ the dual space of \mathcal{U}^t with $L^2(\Omega)$ as pivot space. By the same argument, we have that $(\mathcal{U}^t)'$ is isomorphic (through the rotation \mathcal{R}_{-t}) to the space $H^{-1}(\Omega)$.

We also make use of the space $L^2(0, T, \mathcal{U}^t)$ as the set of functions v in $L^2(0, T, \mathcal{H}^1(\Omega))$ which, for almost every t in $]0, T[$, belong to \mathcal{U}^t . This is an Hilbert space provided with the norm:

$$\|v\|_{\mathcal{U}^t} := \left(\int_0^T \|v(\cdot, \cdot)\|_{\star}^2 dt \right)^{1/2}.$$

Note that the space $L^2(0, T, \mathcal{U}^t)$ is isomorphic to $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ through the mapping $u \mapsto \mathcal{R}_t(u)$ defined in (5).

In this framework, by formal integration we obtain the variational formulation for (4), denoted by Problem (P), in what follows:

$$\begin{aligned} \text{Find } u \in L^2(0, T, \mathcal{U}^t) \cap C^0(0, T, L^2(\mathcal{C})) \text{ such that } \sigma \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T, (\mathcal{U}^t)') \text{ and } \forall v \in \mathcal{U}^t : \\ \langle \sigma \frac{\partial u}{\partial t}, v \rangle_{\Omega(t)} + \int_{\Omega_1} \mu^{-1} \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 d\Omega + \int_{\Omega_2} \mu^{-1} \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 d\Omega = (J_s, v)_{\Omega_2} \end{aligned} \quad (8)$$

where $(\cdot, \cdot)_D$ denotes the $L^2(D)$ scalar product over a domain D and $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega(t)}$ the duality pairing between $(\mathcal{U}^t)'$ and \mathcal{U}^t . It has to be noted that $\langle \phi, \psi \rangle_{\Omega(t)} =_{H^{-1}(\Omega)} \langle \mathcal{R}_{-t}\phi, \mathcal{R}_{-t}\psi \rangle_{H_0^1(\Omega)}$.

We can give a meaning to the equation (8) in order to specify the sense it is intended in time. We now show that the term $\langle \sigma \frac{\partial u}{\partial t}, v \rangle_{\Omega(t)}$ is actually a distribution in time for any $u \in L^2(0, T, \mathcal{U}^t) \cap C^0(0, T, L^2(\mathcal{C}))$ and $v \in \mathcal{U}^t$. We have, for any $\varphi \in \mathcal{D}([0, T])$:

$$\langle \sigma \frac{\partial u}{\partial t}, v \rangle_{\Omega(t), \varphi} = \int_0^T \left(\sigma u, \frac{\partial(v \varphi)}{\partial t} \right)_{\Omega(t)} dt \quad (9)$$

where the duality pairing in the left hand side is the one between $\mathcal{D}([0, T])$ and $\mathcal{D}'([0, T])$ and, in the right hand side, the integral is well defined and bounded by the norms of u and v associated to their own spaces and the norm of φ in $C^1([0, T])$.

Moreover, taking $v = u$ in (9) and by using the chain rule in the right hand side, we have:

$$2 \langle \sigma \frac{\partial u}{\partial t}, u \rangle_{\Omega(t), \varphi} = \langle \frac{\partial}{\partial t}(\sigma u, u)_C, \varphi \rangle = - \int_0^T (\sigma u, u)_C \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt. \quad (10)$$

As a consequence, if u is solution of (P), the following holds:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\sigma u, u)_{\Omega(t)} + \int_{\Omega_1} \mu^{-1} \nabla u_1 \cdot \nabla u_1 d\Omega + \int_{\Omega_2} \mu^{-1} \nabla u_2 \cdot \nabla u_2 d\Omega = (J_s, u)_{\Omega_2} \quad (11)$$

In the following we will adopt the notation:

$$a(u, v) = \int_{\Omega_1} \mu^{-1} \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 d\Omega + \int_{\Omega_2} \mu^{-1} \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 d\Omega. \quad (12)$$

Remark 1.2 The problem (P) is not standard due to two factors:

- 1) the *spatial* functional space \mathcal{U}^t is *time* dependent;
- 2) the conductivity σ is not strictly positive, there is a coupling of the heat equation in the conductor with the Laplace one in the non-conducting part.

In the following we use the Faedo-Galerkin method to show that a solution exists and an a-priori estimate to prove its uniqueness.

The first point has already been partially considered in the interpretation of problem (P) (see also Remark 1.5) and the second will be taken into account in the next Subsection in the construction of the Faedo-Galerkin approximation spaces.

1.5 Well posedness of the continuous problem

This Subsection is devoted to the proof of the next Theorem:

Theorem 1.3 *Let $J_s \in L^2(0, T, L^2(\Omega_2))$ be a given current source. Then, the problem (P) is uniquely solvable.*

- PROOF OF THEOREM 1.3 - We start with the uniqueness which is obtained by an a-priori stability estimate. Via the Poincaré inequality, recalling (BC) in (4), we have that:

$$\|u_2\|_{0, \Omega_2} \leq C(\Omega_2) \|u_2\|_{1, \Omega_2}$$

Integrating in time (11) and by the Cauchy-Schwartz inequality, we obtain:

$$\|\sqrt{\sigma} u\|_{0,C}^2 + \frac{1}{2} \int_0^T (|\sqrt{\mu} u_1|_{1,\Omega_1}^2 + |\sqrt{\mu} u_2|_{1,\Omega_2}^2) dt \leq C \int_0^T \|J_s\|_{0,\Omega_2}^2 dt. \quad (13)$$

This estimate gives directly the uniqueness of the solution by recalling that the traces are continuous at $\partial\mathcal{C}$. If $J_s \equiv 0$ and $u|_{\partial\mathcal{C}} = 0$ then $u = 0$ almost everywhere in Ω .

We now pass to the existence and for that we use the Faedo-Galerkin method (see [16], vol. 5, for details). We solve the system (8) for a suitable sequence of nested finite dimensional spaces $\{\mathcal{U}_N^t\}_{N \geq 1}$ such that:

$$\mathcal{U}_N^t \subset \mathcal{U}_{N+1}^t \subset \mathcal{U}^t \quad \forall N > 0 \quad \text{and} \quad \bigcup_{N \geq 1} \mathcal{U}_N^t \quad \text{dense in} \quad \mathcal{U}^t; \quad (14)$$

then by using the stability estimate (13), we prove the existence of the solution.

The procedure is quite standard in the case of a completely conducting system while in the other case we have to pay attention to the fact that the equations we are dealing with are not strictly parabolic.

Thanks to the definition (7), in what follows we construct a suitable sequence of approximation spaces in $H_0^1(\Omega)$ and then, by applying the operator \mathcal{R}_t we obtain $\{\mathcal{U}_N^t\}_N$.

We introduce the following L^2 -orthogonal decomposition in $H_0^1(\Omega)$:

$$H_0^1(\Omega) = H_0^1(\mathcal{I}) \oplus (H_0^1(\mathcal{I}))^-; \quad u = u_I + u_C \quad u \in H_0^1(\Omega), \quad u_I \in H_0^1(\mathcal{I});$$

the symbol \oplus stands for the L^2 -orthogonal direct sum, where, of course, the functions in $H_0^1(\mathcal{I})$ are extended by zero outside the insulator \mathcal{I} . Since the two spaces $H_0^1(\mathcal{I})$ and $(H_0^1(\mathcal{I}))^-$ are separable Hilbert spaces, it is always possible to find two sequences of nested finite dimensional spaces such that

$$\begin{aligned} V_N &\subset V_{N+1} \subset H_0^1(\mathcal{I}) \quad , \quad \bigcup_{N \geq 1} V_N \quad \text{dense in} \quad H_0^1(\mathcal{I}) \\ W_N &\subset W_{N+1} \subset (H_0^1(\mathcal{I}))^- \quad , \quad \bigcup_{N \geq 1} W_N \quad \text{dense in} \quad (H_0^1(\mathcal{I}))^- . \end{aligned}$$

Finally we define $\mathcal{U}_N^t := \mathcal{R}_t V_N \oplus \mathcal{R}_t W_N$. It is not hard to see that this space verifies (14). Note that the movement is exactly taken into account in the construction of these nested finite dimensional spaces.

We have now to study the existence of a solution for the variational problem (P) when replacing \mathcal{U}^t with \mathcal{U}_N^t . After defining suitable basis for the spaces V_N and W_N , for any $u_N, v_N \in \mathcal{U}_N^t$, the integral $\int_{\Omega} \sigma u_N v_N d\Omega$ is equal to $(M(t)v_N, u_N)$ where $M(t)$ is the usually called *mass matrix* and u_N, v_N denote here the coefficients defining u_N and v_N in the chosen basis (we use the same notation since it is helpful and not misleading.)

Due to the fact that $\sigma = 0$ at \mathcal{I} , we clearly have that the matrix $M(t)$ has the form (when a right ordering is chosen)

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_W(t) \end{pmatrix}$$

where $M_W(t)$ is the *mass matrix* associated only to the space $\mathcal{R}_t W_N$.

It is easy to show that the matrix $M_W(t)$ is non-singular: for every given $w_N \in \mathcal{R}_t W_N$ such that $w_N^T(t) M_W(t) w_N(t) = 0$ we want to show that $w_N = 0$. We surely have $w_N = 0$ over \mathcal{C} and this means in particular that $w_N|_{\partial\mathcal{C}} = 0$. Since $w_N|_{\partial\Omega} = 0$ and $w_N \in \mathcal{R}_t (H_0^1(\mathcal{I}))^-$, we deduce that $w_N = 0$ also over \mathcal{I} and so that w_N is identically 0. The problem (8) on the finite dimensional spaces \mathcal{U}_N^t reads:

$$\begin{aligned} \text{Find} \quad u_N \in \mathcal{U}_N^t \quad \text{such that, for every } v \in \mathcal{U}_N^t : \\ \left(\sigma \frac{\partial u_N}{\partial t}, v_N \right)_C + a(u_N, v_N) = (J_s, v_N)_{\Omega_2} . \end{aligned} \quad (15)$$

and it can be easily written in matrix form and using our decomposition. The system reads

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_W(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_V(t) \\ u_W(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{VV}(t) & A_{VW}(t) \\ A_{WV}(t) & A_{WW}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_V(t) \\ u_W(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_V(t) \\ J_W(t) \end{pmatrix}.$$

We can obtain $u_V(t)$ as a function of $u_W(t)$ from the first set of equations since, thanks to our construction, the sub-matrix $A_{VV}(t)$ is surely non-singular at every time t and $u_W(t)$ from the second one by solving a first order ordinary differential equation.

By using the a-priori stability estimate (13) applied on the sequence u_N , there exists a subsequence of u_N (called again u_N for convenience), such that $u_N \rightharpoonup u$ in $L^2(0, T, \mathcal{U}^t)$. Let now v be any function in \mathcal{U}^t and $v_N \in \mathcal{U}_N^t$ be a sequence strongly convergent to v in \mathcal{U}^t . If we let N go to infinity; we obtain (8). Finally, by isolating the first term on the left hand side in (8), we derive that $\sigma \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T, (\mathcal{U}^t)'),$ which ends the proof that u is a solution of problem (P). \square

In the next Theorem we prove that, when the datum is regular, the solution u of (P) is in truth more regular and it belongs to $H^1(0, T, L^2(\mathcal{C})) \cap L^\infty(0, T, \mathcal{U}^t)$. Using this regularity, we immediately have that u verifies (E_i) in (4) in the sense of $L^2(\Omega_i)$, $i = 1, 2$ and that the boundary and transmission conditions are naturally fitted.

Theorem 1.4 *Let $J_s \in H^1(0, T, L^2(\Omega))$ and μ be such that $\mu^{-1} \in W^{1,\infty}(\Omega_1)$. Then, the solution u of problem (P) belongs to $H^1(0, T, L^2(\mathcal{C})) \cap L^\infty(0, T, \mathcal{U}^t)$.*

- PROOF OF THEOREM 1.4 - We use the same Faedo-Galerkin approximation spaces (and also the same notation) as in the previous proof. The solution u_N of (15) can be written as $u_N(x, t) = \sum_{i=1}^N u_i(t) \phi_i(x, t)$ where $\phi_i(x, t)$ are the basis functions for \mathcal{U}_N^t . We suppose without loss of generality that $\phi_i(x, t) \in \mathcal{H}^2(\Omega)$. Now, we choose the following test function in (15):

$$v_N(x, t) = \sum_{i=1}^N \frac{d u_i}{dt}(t) \phi_i(x, t) = \begin{cases} \frac{\partial u_N}{\partial t} - \mathbf{V} \cdot \nabla u_N & \text{on } \Omega_1 \\ \frac{\partial u_N}{\partial t} & \text{on } \Omega_2 \end{cases}$$

where \mathbf{V} is the rotation speed of Ω_1 . The function v is admissible by construction and plugging it in (15) we get

$$\int_{\mathcal{C}} \sigma \left| \frac{\partial u_N}{\partial t} \right|^2 + a(u_N, \frac{\partial u_N}{\partial t}) = \int_{\Omega_2} J_s \left(\frac{\partial u_N}{\partial t} - \mathbf{V} \cdot \nabla u_N \right) + \int_{\Omega_1} \mu^{-1} \nabla u_N \cdot \nabla (\mathbf{V} \cdot \nabla u_N) + \int_{\mathcal{C}} \sigma \frac{\partial u_N}{\partial t} \mathbf{V} \cdot \nabla u_N. \quad (16)$$

We estimate the three terms in the right hand side starting from the last one:

$$\int_{\mathcal{C}} \sigma \frac{\partial u_N}{\partial t} \mathbf{V} \cdot \nabla u_N d\Omega \leq \frac{1}{4} \int_{\Omega_1} \sigma \left| \frac{\partial u_N}{\partial t} \right|^2 d\Omega + C |u_N|_{\star, \Omega}^2. \quad (17)$$

About the second term, using the chain rule, integrating by parts and reminding that $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$, we have:

$$\int_{\Omega_1} \mu^{-1} \nabla u_N \cdot \nabla (\mathbf{V} \cdot \nabla u_N) = \int_{\Omega_1} \mu^{-1} \nabla u_N (\nabla \mathbf{V} \cdot \nabla) u_N + \int_{\Omega_1} \operatorname{div}(\mu^{-1} \mathbf{V}) |\nabla u_N|^2 \leq C(\mu, \omega) |u_N|_{\star, \Omega_1}^2. \quad (18)$$

Finally, about the first one, we integrate it in time and we obtain the equality:

$$\int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{J}_s \left(\frac{\partial u_N}{\partial t} - \mathbf{V} \cdot \nabla u_N \right) = - \int_{\Omega_2} \int_0^t \frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} u_N + \int_{\Omega_2} \mathbf{J}_s(\cdot, t) u(\cdot, t) - \int_{\Omega_2} \int_0^t \mathbf{J}_s \mathbf{V} \cdot \nabla u_N. \quad (19)$$

Then, we have that

$$\text{the right hand side of (19)} \leq C \|\mathbf{J}_s\|_{H^1(0, T, L^2(\Omega))} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(0, t, \mathcal{H}_0^1(\Omega))}. \quad (20)$$

By using these estimates in (16), and integrating in time, we obtain:

$$\int_{\mathcal{C}} \sigma \left| \frac{\partial u_N}{\partial t} \right|^2 d\Omega + \|u_N\|_{L^\infty(0, T, \mathcal{U}^t)}^2 \leq C \|\mathbf{J}_s\|_{H^1(0, T, L^2(\Omega))}^2.$$

There is then a subsequence of u_N (that we call again u_N for convenience) which converge weakly also in $H^1(0, T, L^2(\mathcal{C})) \cap L^\infty(0, T, \mathcal{U}^t)$. By uniqueness, the weak limit is again u and this achieves the proof. \square

Remark 1.5 Thanks to this regularity results, we have that $\sigma \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T, L^2(\mathcal{C}))$. This allows us to replace the duality $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega(t)}$ in the right hand side of (8) with the scalar product $\left(\sigma \frac{\partial u}{\partial t}, v \right)_{\mathcal{C}}$. The variational equation reads then

$$\left(\sigma \frac{\partial u}{\partial t}, v \right)_{\mathcal{C}} + a(u, v) = (J_s, v)_{\Omega_2} \quad \forall v \in \mathcal{U}^t. \quad (21)$$

The equation (21) is now suitable for the definition of the finite element discretization.

2 The spatial discretization

In the previous Section we proved that our continuous problem is well posed. We want to propose a finite element algorithm, but if we think of solving this problem with a standard Galerkin method, the time dependent transmission condition (IC_1) in (4) has to be exactly verified. This fact imposes very heavy calculations since it is necessary to modify the mesh for the spatial discretization at every time step or to impose a heavy constraint between the time discretization step and the spatial one.

In the following we propose a non-conforming approximation of the problem (8); non-matching grids are used at every time step and the transmission condition is weakly imposed by means of a *mortar element method technique* (see [4]). Due to the time dependence of the coupling condition, namely (IC_1) in (4), this technique leads us to a sliding mesh-mortar method which has been first introduced in the context of spectral approximation in [3].

Let \mathcal{T}_{1, h_1} and \mathcal{T}_{2, h_2} two families of curved triangulations for Ω_1 and Ω_2 respectively such that:

$$\overline{\bigcup_{K \in \mathcal{T}_{1, h_1}} K} \equiv \overline{\Omega_1} \quad \overline{\bigcup_{K \in \mathcal{T}_{2, h_2}} K} \equiv \overline{\Omega_2}.$$

We assume only the triangles with one edge on Γ are curved and that \mathcal{T}_{i, h_i} , $i = 1, 2$ are regular in the sense of Ciarlet (see [15] for details), non-matching at the interface Γ . We denote by h_1 and h_2 their

sizes and by h the maximum between h_1 and h_2 . For what concerns the analysis of the approximation properties for curved finite elements we refer e.g. to [6].

We denote by $\mathcal{T}_{i,h_i}^\Gamma$, $i = 1, 2$ the two discretizations of Γ that are obtained by taking the traces of \mathcal{T}_{1,h_1} and \mathcal{T}_{2,h_2} on Γ . Let h_i^Γ , $i = 1, 2$, be the mesh sizes of these decompositions of Γ ; we assume that there exist two constants $c, C \in \mathbb{R}$, such that

$$c \leq \frac{h_1^\Gamma}{h_2^\Gamma} \leq C. \quad (22)$$

With this assumption, we do not lose any generality since the interface Γ is fictitious and can be set where it is more convenient: the physical system is homogeneous in a neighbourhood of Γ . Then there is no interest in dealing with decompositions of very different sizes. Nevertheless, if one wants to use meshes that do not satisfy (22), then the results that follow still hold through a much more technical procedure.

Since the sub-domains have necessarily curved geometries, we need to introduce non-affine finite element spaces. According to [15], we denote by \hat{K} the reference triangle and for every $K \in \mathcal{T}_{1,h_1} \cup \mathcal{T}_{2,h_2}$ we define the application $F_K : \hat{K} \rightarrow K$. Thanks to the regularity of Γ it is easy to see that all these applications are regular and invertible.

We introduce the following spaces of finite elements for $i = 1, 2$:

$$X_{i,h_i} = \{v_{i,h_i} \in C^0(\overline{\Omega}_i) \text{ such that } v_{i,h_i}|_{\partial\Omega} = 0 \text{ and } v_{i,h_i}|_K \circ F_K \in \mathcal{P}_k(\hat{K}) \quad \forall K \in \mathcal{T}_{i,h_i}\}. \quad (23)$$

In order to weakly impose the interface condition, we have to define a suitable space of Lagrange multipliers. For every $e \in \mathcal{T}_{2,h_2}^\Gamma$, we denote by $f_e :]0, 1[\rightarrow e$ an application which associates the reference interval $]0, 1[$ to e . According to the mortar method theory, we choose the space of Lagrange multipliers as follows (the other choice turns out to be completely equivalent):

$$M_h = \{\varphi_h \in C^0(\Gamma) \text{ such that } \varphi_h|_e \circ f_e \in \mathcal{P}_k(]0, 1[) \quad \forall e \in \mathcal{T}_{2,h_2}^\Gamma\}. \quad (24)$$

In the mortar method terminology, this means that we choose the rotor as *master* and the stator as *slave*.

According to [7], we define the following approximation space:

$$\mathcal{U}_h^t = \{v_h = (v_{1,h}, v_{2,h}) \in X_{1,h} \times X_{2,h} \text{ such that} \quad (25)$$

$$\int_{\Gamma} (v_{1,h}(r_{-t}\mathbf{x}) - v_{2,h}(\mathbf{x})) \varphi_h(\mathbf{x}) d\Gamma = 0 \quad \forall \varphi_h \in M_h \} \quad (26)$$

at every fixed time t . The constraint (26) is time dependent and it is the discrete weak version of the interface condition (IC_1) in the continuous problem (4).

We want to solve the following variational problem:

$$\begin{aligned} \text{Find } u_h(\cdot, \cdot) \in L^2(0, T, \mathcal{U}_h^t) \cap C^0(0, T, L^2(\mathcal{C})) \text{ such that :} \\ \left(\sigma \frac{\partial u_h}{\partial t}, v_h \right)_C + a(u_h, v_h) = (\mathbf{J}_s, v_h)_{\Omega_2} \quad \forall v_h \in \mathcal{U}_h^t. \end{aligned} \quad (27)$$

For the approximation properties of the family of discrete spaces \mathcal{U}_h^t and for the coerciveness of the bilinear form $a(\cdot, \cdot)$ defined in (12) with respect to the norm $\|\cdot\|_*$, we refer to [7] or [4].

Remark 2.1 Note that our theory allows also for using different degrees of polynomials in the two domains, say k_1 and k_2 . In this case the Lagrange multiplier space M_h should be of continuous functions which are locally polynomials of degree k_2 .

Remark 2.2 According to [7], [4] the definition of the Lagrange multiplier space is generally rather more complex than in (24). In our case the interface Γ is a manifold without boundary, while, in the case of several sub-domains, the interfaces between adjacent sub-domains are compact manifolds with boundary (geometrically speaking): the space of Lagrange multipliers can not be chosen as one of the space of traces (as we did in (24)), but only as a suitable subspace of it. We refer to [4] for the presentation and analysis of the mortar element method in the general case.

3 Fully discrete approximation

We propose to use an implicit Euler scheme for the time discretization in the interval $[0, T]$ with $T > 0$. Let δt be the time step and N an integer such that $T = N \delta t$. Since the time discretization involves also a “discretization” in time of the space of test functions and of the rotation operators, we shorten our notation in the following way:

$$t^n = n \delta t \quad , \quad v^n \in \mathcal{U}^{t^n} = \mathcal{U}^n \quad , \quad v_h^n \in \mathcal{U}_h^{t^n} = \mathcal{U}_h^n \quad , \quad R_{t^n} = R_n \quad , \quad \mathcal{R}_{t^n} = \mathcal{R}_n .$$

By means of this notation, we denote by u^n the solution of the continuous problem (P) evaluated at $t = t^n$. By applying implicit Euler scheme, our fully discrete problem reads:

$$\begin{aligned} \forall n = 0, \dots, N-1, \quad \text{find } u_h^{n+1} \in \mathcal{U}_h^{n+1} \text{ such that :} \\ \int_C \sigma \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\delta t} v_h^{n+1} d\Omega + a(u_h^{n+1}, v_h^{n+1}) = (J_s^{n+1}, v_h^{n+1})_{\Omega_2} \quad \forall v_h^{n+1} \in \mathcal{U}_h^{n+1}. \end{aligned} \quad (28)$$

Remark 3.1 Note that we simply propose one of the possible time stepping schemes. E.g. the fully discrete equation with Crank-Nicolson reads, for any $\theta \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \forall n = 0, \dots, N-1, \quad \text{find } u_h^{n+1} \in \mathcal{U}_h^{n+1} \text{ such that :} \quad \forall v_h^{n+1} \in \mathcal{U}_h^{n+1} \\ \int_C \sigma \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\delta t} v_h^{n+1} d\Omega + a(\theta u_h^{n+1} + (1-\theta)u_h^n, v_h^{n+1}) = (\theta J_s^{n+1} + (1-\theta)J_s^n, v_h^{n+1})_{\Omega_2} . \end{aligned}$$

In principle, any other time stepping scheme can be chosen thanks to the flexibility of the method regarding the movement. No constraint is imposed between the time step and mesh size and/or the velocity of the rotor; this means that also variable and/or adaptive time stepping can be used without changes in the spatial discretization and in the construction of the approximation space \mathcal{U}_h^n .

Although the convergence of the scheme is studied only in the easy case of implicit Euler time stepping, there is no constraint to the application of high order schemes in time (as proposed in [29]).

3.1 Convergence Analysis

Since the stability estimate is very similar to the one of the heat equation, we look directly to the error estimate for the proposed scheme.

Let $\Pi_h^t : \mathcal{U}^t \rightarrow \mathcal{U}_h^t$ be a time dependent projection operator onto the discrete space \mathcal{U}_h^t that will be made precise later on according to the properties we shall need on it. We denote by $\Pi_h^n : \mathcal{U}_0^n \rightarrow \mathcal{U}_h^n$ this operator evaluated at time $t = t^n$.

We define:

$$w_h^n = \Pi_h^n u^n \quad \text{and} \quad \xi_h^n = u_h^n - w_h^n . \quad (29)$$

By combining (8) and (28), recalling (29), we get the following equality for every $v_h^{n+1} \in \mathcal{U}_h^{n+1}$:

$$\begin{aligned} & \int_C \sigma \frac{\xi_h^{n+1} - \xi_h^n}{\delta t} v_h^{n+1} d\Omega + a(\xi_h^{n+1}, v_h^{n+1}) \\ &= \int_C \sigma \left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} - \frac{w_h^{n+1} - w_h^n}{\delta t} \right) v_h^{n+1} d\Omega + a(u^{n+1} - w_h^{n+1}, v_h^{n+1}) - \int_\Gamma \frac{\partial u^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} [v_h^{n+1}] d\Gamma \end{aligned} \quad (30)$$

where we denote by $[v_h^n]$ the jump of $\mathcal{R}_{-n} v_h^n$ across the interface Γ , that is $[v_h^n] = (R_{-n} v_{1,h}^n)|_\Gamma - v_{2,h}^n|_\Gamma$, and by $\partial u^{n+1}/\partial \mathbf{n}$ the normal derivative of u^{n+1} in the direction normal to Γ outward to Ω_2 . In the right hand side of (30), the first two terms depend on the approximation properties of the projector Π_h^n and the last one is the consistency error due to our non-conforming (mortar) approximation.

By choosing $v_h^{n+1} = \xi_h^{n+1}$, multiplying by δt both sides of (30) and denoting by

$$\begin{aligned} E_{\text{appr}}(n) &= \sup_{v_h^n \in \mathcal{U}_h^n} \frac{a(u - w_h^n, v_h^n) - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} [v_h^n] d\Gamma}{\|v_h^n\|_*}; \\ E_{\partial t}(n) &= \sup_{v_h^n \in \mathcal{U}_h^n} \frac{\int_C \sigma \left(\frac{\partial u^n}{\partial t} - \frac{w_h^n - w_h^{n-1}}{\delta t} \right) v_h^n d\Omega}{\|\sqrt{\sigma} v_h^n\|_{0,C}}; \end{aligned} \quad (31)$$

we get the following estimate:

$$\|\sqrt{\sigma} \xi_h^{n+1}\|_{0,C}^2 + \delta t a(\xi_h^{n+1}, \xi_h^{n+1}) \leq \int_C \sigma \xi_h^{n+1} \xi_h^n d\Omega + \delta t E_{\text{appr}}(n+1) \|\xi_h^{n+1}\|_* + \delta t E_{\partial t}(n+1) \|\sqrt{\sigma} \xi_h^{n+1}\|_{0,C}$$

Then, by the Cauchy-Schwartz inequality and the ellipticity of a , we have:

$$\left(1 - \frac{\delta t}{T}\right) \|\sqrt{\sigma} \xi_h^{n+1}\|_{0,C}^2 + \alpha \delta t \|\xi_h^{n+1}\|_*^2 \leq \|\sqrt{\sigma} \xi_h^n\|_{0,C}^2 + \delta t \left(\frac{1}{\alpha} E_{\text{appr}}^2(n+1) + T E_{\partial t}^2(n+1) \right) \quad (32)$$

where we have denoted by $\alpha = \alpha(\mu)$ the coerciveness constant of the bilinear form $a(\cdot, \cdot)$ with respect to the broken norm $\|\cdot\|_*$. Now, using recursively (32) and by Gronwall's Lemma, we obtain:

$$\|\sqrt{\sigma} \xi_h^n\|_{0,C}^2 + \alpha \sum_{i=1}^n \delta t \|\xi_h^i\|_*^2 \leq C(T, \sigma, \mu) \left\{ \|\sqrt{\sigma} \xi_h^0\|_{0,C}^2 + \sum_{i=1}^n \delta t \left(\frac{1}{\alpha} E_{\text{appr}}^2(i) + T E_{\partial t}^2(i) \right) \right\} \quad \forall n = 1, \dots, N \quad (33)$$

where T is the final time, the constant $C(T, \sigma, \mu)$ depends on T and on the parameters of the problem, namely σ and μ , but not on the mesh size and time step.

This inequality is of key importance in the study the error estimate for our fully discrete formulation (28). The next Theorem states the optimality of the proposed method.

Theorem 3.2 *Let $u \in L^2(0, T, \mathcal{U}^t) \cap C^0(0, T, L^2(\mathcal{C}))$ be the solution of problem (8). Let $r \geq 2$, we assume:*

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0, T, \mathcal{H}^r(\Omega)) ; \\ \frac{\partial u}{\partial t} &\in L^2(0, T, \mathcal{H}^r(\Omega)) ; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &\in L^2(0, T, L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Then, the following error estimate holds for $1 \leq s \leq \min\{r-1, k\}$:

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\sigma}(u^n - u_h^n)\|_{0,C}^2 + \alpha \sum_{i=1}^n \delta t \|u^i - u_h^i\|_*^2 &\leq C(T, \sigma, \mu) \left\{ h^{2s} \sum_{i=1}^n \delta t |u^i|_{*,s+1}^2 \right. \\ &\quad \left. + h^{2(s+1)} (\|u^n\|_{s+1,C}^2 + \|u^0\|_{s+1,C}^2) + (\delta t)^2 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{L^2(0,T,L^2(C))}^2 + h^{2s} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T,\mathcal{H}^s(\Omega))}^2 \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

for all $n = 1, \dots, N$ and where the constant $C(T, \sigma, \mu)$ depends on the parameters of the problem, but neither on δt nor on h .

The proof of this Theorem requires some preliminary results. We start stating and proving few Lemmas and, at the end, we shall prove the Theorem.

Lemma 3.3 *Let $u \in L^2(0, T, \mathcal{U}^t) \cap C^0(0, T, L^2(C))$. Assume moreover that u verifies the regularity assumption of Theorem 3.2. There exists a family of projectors*

$$\{\Pi_h^n\}_{n=0,\dots,N}, \quad \Pi_h^n : \mathcal{U}_0^n \cap \mathcal{H}^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{U}_h^n(n)$$

such that $\forall n = 0, \dots, N$ and for $1 \leq s \leq \min\{r-1, k\}$:

$$h^{-1} \|u^n - \Pi_h^n u^n\|_{0,\Omega} + \|u^n - \Pi_h^n u^n\|_* \leq C_1 h^s |u^n|_{*,s+1}; \quad (35)$$

- PROOF OF LEMMA 3.3 - Let $\mathcal{P}_2 : L^2(\Gamma) \rightarrow M_h$ be the L^2 -orthogonal projection to M_h and $\mathcal{I}_h : \mathcal{H}^2(\Omega) \rightarrow X_{1,h} \times X_{2,h}$ the interpolation operator. We define now a finite element lifting operator $\mathcal{L}_h : M_h \rightarrow X_{2,h}$ such that for every $\phi_h \in M_h$, $\mathcal{L}_h(\phi_h)$ is a finite element function which takes the value zero at every internal node in Ω_2 .

Then we choose the operator Π_h^n in the following way:

$$w_h^n \equiv \Pi_h^n u^n = \mathcal{I}_h u^n + \mathcal{L}_h(\mathcal{P}_2(R_{-n}(\mathcal{I}_h u_1^n)_{|\Gamma} - \mathcal{I}_h u_2^n)_{|\Gamma}). \quad (36)$$

It is easy to see that $\Pi_h^n u^n \in \mathcal{U}_h^n$ for every $n = 0, \dots, N$. Similar operators have been often used in the context of mortar method and a first construction was proposed in [7].

Using the triangle inequality:

$$\|u^n - \Pi_h^n u^n\|_*^2 \leq 2\|u^n - \mathcal{I}_h u^n\|_*^2 + 2\|\mathcal{L}_h(\mathcal{P}_2(R_{-n}(\mathcal{I}_h u_1^n)_{|\Gamma} - \mathcal{I}_h u_2^n)_{|\Gamma})\|_{1,\Omega_2}^2 \quad (37)$$

and, since the first term in the right hand side can be estimated in a standard way, we focus our attention on the second one.

Using scaling arguments between any triangle $K \in \mathcal{T}_{2,h_2}$ and the reference triangle, the following local inequalities

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_h(\phi_h)\|_{0,K}^2 &\leq C h_K \|\phi_h\|_{0,\Gamma_K}^2; \\ \|\mathcal{L}_h(\phi_h)\|_{1,K}^2 &\leq C h_K^{-1} \|\phi_h\|_{0,\Gamma_K}^2 \end{aligned}$$

hold for every triangle $K \in \mathcal{T}_{2,h_2}$ such that $\bar{K} \cap \Gamma = \Gamma_K \neq \emptyset$; here h_K is the diameter of K and C is a constant independent of the mesh size.

By summing up for every $K \in \mathcal{T}_{2,h_2}$ and assuming that $\mathcal{T}_{2,h_2}^\Gamma$ is quasi-uniform (see [15] for the definition) we obtain:

$$h_2^{-1} \|\mathcal{L}_h(\phi_h)\|_{0,\Omega_2}^2 + h_2 \|\mathcal{L}_h(\phi_h)\|_{1,\Omega_2}^2 \leq C \|\phi_h\|_{0,\Gamma}^2. \quad (38)$$

By using (38) and the stability of the L^2 - projector \mathcal{P}_2 in (37) we obtain:

$$\|u^n - \Pi_h^n u^n\|_*^2 \leq 2\|u^n - \mathcal{I}_h u^n\|_*^2 + Ch_2^{-1} \|R_{-n}(\mathcal{I}_h u_1^n) - \mathcal{I}_h u_2^n\|_{0,\Gamma}^2; \quad (39)$$

and, on the other hand:

$$\|u^n - \Pi_h^n u^n\|_{0,\Gamma}^2 \leq 2\|u^n - \mathcal{I}_h u^n\|_{0,\Gamma}^2 + Ch_2 \|R_{-n}(\mathcal{I}_h u_1^n) - \mathcal{I}_h u_2^n\|_{0,\Gamma}^2. \quad (40)$$

By the triangle inequality and recalling that $R_{-n}(u_1^n)|_\Gamma = u_2^n|_\Gamma$, we have:

$$\|R_{-n}(\mathcal{I}_h u_1^n) - \mathcal{I}_h u_2^n\|_{0,\Gamma}^2 \leq 2\|R_{-n}(\mathcal{I}_h u_1^n) - R_{-n}(u_1^n)\|_{0,\Gamma}^2 + \|u_2^n - \mathcal{I}_h u_2^n\|_{0,\Gamma}^2. \quad (41)$$

Finally, (35) is obtained by using (41) in (39), (40) and standard estimates for the interpolation operator. \square

Lemma 3.4 *Let ψ be a function belonging to $H^1(\Gamma)$, $\omega \in C^0([0, T])$ the angular speed and R_n the associated rotation operator at time $t = t^n$. The following inequality holds:*

$$\|(R_{-n} - R_{-(n-1)})\psi\|_{0,\Gamma} \leq C \delta t \|\psi\|_{1,\Gamma}. \quad (42)$$

where the constant C is independent of the time step.

- PROOF OF LEMMA 3.4 - We set:

$$\varphi(\rho, \theta) = \psi(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta), \quad \theta \in (0, 2\pi), \quad \rho = \bar{r},$$

where (ρ, θ) is the polar system of coordinates naturally associated to Ω_1 with respect to its rotation center O and \bar{r} is its radius. It is easy to see that

$$\|(R_{-n} - R_{-(n-1)})\varphi\|_{0,\Gamma} = \sqrt{\bar{r}} \|\varphi(\bar{r}, \theta) - \varphi(\bar{r}, \theta - \omega^n \delta t)\|_{L^2(0, 2\pi)}; \quad (43)$$

where $\min_{t \in [t^n, t^{n+1}]} |\omega(t)| \leq \omega^n \leq \max_{t \in [t^n, t^{n+1}]} |\omega(t)|$.

Now we estimate the right hand side of (43) as:

$$\|\varphi(\bar{r}, \theta) - \varphi(\bar{r}, \theta - \omega^n \delta t)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 \leq \omega^n \delta t \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\theta - \omega^n \delta t}^\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\bar{r}, \xi) \right)^2 d\xi.$$

We denote now $\chi(\bar{r}, \theta) = \int_0^\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\bar{r}, \xi) \right)^2 d\xi$ and we have:

$$\|(\varphi(\bar{r}, \theta) - \varphi(\bar{r}, \theta - \omega^n \delta t))\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 \leq \omega^n \delta t \int_0^{2\pi} (\chi(\bar{r}, \theta) - \chi(\bar{r}, \theta - \omega^n \delta t)) d\theta \leq (\omega^n \delta t)^2 \chi(\bar{r}, 2\pi) \quad (44)$$

since χ is an increasing function.

Actually, $\chi(\bar{r}, 2\pi) = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\|_{L^2(0, 2\pi)}^2$ and (42) follows from (44) by passing to Cartesian coordinates.

In particular the constant C in (42) is $C = C(\|\omega\|_\infty, \bar{r})$. \square

Lemma 3.5 *Let $u \in L^2(0, T, \mathcal{U}^t) \cap C^0(0, T, L^2(\mathcal{C}))$. Assume moreover that u verifies the regularity assumption of Theorem 3.2. The following estimate holds:*

$$E_{appr}(n) + E_{\delta t}(n) \leq C_1 h^s |u^n|_{*,s+1} + C_2 (\delta t)^{1/2} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(\mathcal{C}))} + C_3 h^s (\delta t)^{-1/2} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, \mathcal{H}^s(\Omega))} \quad (45)$$

where $C_i = C_i(\mu, \sigma)$, for $i = 1, 2, 3$ do not depend on h or δt .

- PROOF OF LEMMA 3.5 - To shorten our notation, we set $\sigma \equiv 1$ on \mathcal{C} and $\mu \equiv 1$ on Ω . We estimate first the term $E_{\text{appr}}(n)$ and then $E_{\partial t}(n)$.

For what concerns $E_{\text{appr}}(n)$ we have to pay attention to the boundary term. Since, by construction, the jump $[v_h^n]$ is orthogonal to the Lagrange multiplier space M_h , we have:

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u^n}{\partial \mathbf{n}} [v_h^n] d\Gamma = \inf_{\varphi_h \in M_h} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u^n}{\partial \mathbf{n}} - \varphi_h \right) [v_h^n] d\Gamma \leq \inf_{\varphi_h \in M_h} \left\| \frac{\partial u^n}{\partial \mathbf{n}} - \varphi_h \right\|_{-1/2, \Gamma} \| [v_h^n] \|_{1/2, \Gamma}. \quad (46)$$

By the Aubin-Nitsche argument [25] and standard trace theorems [1], we have that:

$$\inf_{\varphi_h \in M_h} \left\| \frac{\partial u^n}{\partial \mathbf{n}} - \varphi_h \right\|_{-1/2, \Gamma} \leq C h^s |u^n|_{*, s+1} \quad \text{and} \quad \| [v_h^n] \|_{1/2, \Gamma} \leq \| v_h^n \|_{*}. \quad (47)$$

Combining (35), (46), (47) and the definition of $E_{\text{appr}}(n)$ in (31), we have

$$E_{\text{appr}}(n) \leq C h^s |u^n|_{*, s+1}.$$

On the contrary, the estimate for $E_{\partial t}(n)$ is quite technical. We have that:

$$\left\| \frac{\partial u^n}{\partial t} - \frac{\Pi_h^n u^n - \Pi_h^{n-1} u^{n-1}}{\delta t} \right\|_{0, \mathcal{C}} \leq \left\| \frac{\partial u^n}{\partial t} - \frac{u^n - u^{n-1}}{\delta t} \right\|_{0, \mathcal{C}} + \left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{\delta t} - \frac{\Pi_h^n u^n - \Pi_h^{n-1} u^{n-1}}{\delta t} \right\|_{0, \mathcal{C}} \quad (48)$$

where the estimate of the first term in the right hand side is standard (see e.g., [29]), while the second term has still to be studied. By the triangle inequality, we have:

$$\begin{aligned} \| u^n - u^{n-1} - (\Pi_h^n u^n - \Pi_h^{n-1} u^{n-1}) \|_{0, \mathcal{C}} &\leq \| u^n - u^{n-1} - \mathcal{I}_h(u^n - u^{n-1}) \|_{0, \mathcal{C}} \\ &\quad + \| \mathcal{L}_h(\mathcal{P}_2(R_{-n}(\mathcal{I}_h u_1^n) - \mathcal{I}_h u_2^n - R_{-(n-1)}(\mathcal{I}_h u_1^{n-1}) + \mathcal{I}_h u_2^{n-1})) \|_{0, \mathcal{C}}; \end{aligned}$$

where again it is the second term in the right hand side that we have to analyze. In what follows we set

$$\mathcal{E}_h := \| \mathcal{L}_h(\mathcal{P}_2(R_{-n}(\mathcal{I}_h u_1^n) - \mathcal{I}_h u_2^n - R_{-(n-1)}(\mathcal{I}_h u_1^{n-1}) + \mathcal{I}_h u_2^{n-1})) \|_{0, \mathcal{C}}. \quad (49)$$

By means of (38), the stability of L^2 - orthogonal projection \mathcal{P}_2 and triangle inequality, we obtain:

$$\mathcal{E}_h \leq \sqrt{h_2} \| R_{-n}(\mathcal{I}_h u_1^n) - R_{-(n-1)}(\mathcal{I}_h u_1^{n-1}) - (\mathcal{I}_h u_2^n - \mathcal{I}_h u_2^{n-1}) \|_{0, \Gamma}.$$

By summing and subtracting $(u_2^n - u_2^{n-1})|_{\Gamma} = (R_{-n}(u_1^n) - R_{-(n-1)}(u_1^{n-1}))|_{\Gamma}$ and by the triangle inequality:

$$\mathcal{E}_h \leq \sqrt{h_2} (\| R_{-n}(\mathcal{I}_h u_1^n - u_1^n) - R_{-(n-1)}(\mathcal{I}_h u_1^{n-1} - u_1^{n-1}) \|_{0, \Gamma} + \| \mathcal{I}_h(u_2^n - u_2^{n-1}) - (u_2^n - u_2^{n-1}) \|_{0, \Gamma}). \quad (50)$$

Now the first term in the right hand side of (50) can be bounded in the following way:

$$\begin{aligned} &\| R_{-n}(\mathcal{I}_h u_1^n - u_1^n) - R_{-(n-1)}(\mathcal{I}_h u_1^{n-1} - u_1^{n-1}) \|_{0, \Gamma} \\ &\leq \| R_{-n}(\mathcal{I}_h(u_1^n - u_1^{n-1}) - (u_1^n - u_1^{n-1})) \|_{0, \Gamma} + \| [R_{-n} - R_{-(n-1)}](\mathcal{I}_h u_1^{n-1} - u_1^{n-1}) \|_{0, \Gamma}. \end{aligned}$$

Then, coming back to the estimate of \mathcal{E}_h , by standard arguments we get:

$$\mathcal{E}_h \leq C h^s |u^n - u^{n-1}|_{*, s} + C \sqrt{h_2} \| (R_{-n} - R_{-(n-1)})(\mathcal{I}_h u_1^{n-1} - u_1^{n-1}) \|_{0, \Gamma}. \quad (51)$$

The estimate of the second term in the right hand side of (51) is then obtained by applying Lemma 3.4 to the function $\mathcal{I}_h u_1^{n-1} - u_1^{n-1}$. Finally we have:

$$\mathcal{E}_h \leq h^s |u^n - u^{n-1}|_{\star, s} + \delta t h_2^s |u_1^n|_{s+1/2, \Gamma}. \quad (52)$$

Coming back now to the estimate of $E_{\partial t}(n)$, by using (48), (49) and (52) we have then

$$E_{\partial t}(n) \leq \left\| \frac{\partial u^n}{\partial t} - \frac{u^n - u^{n-1}}{\delta t} \right\|_{0, C} + h^s \left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{\delta t} \right\|_{\star, s} + h^s |u_1^n|_{s+1/2, \Gamma}.$$

By means of standard estimates for first order schemes in time (see e.g., [29]) and by the continuity of the trace operator $\gamma_0 : H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-1/2}(\Gamma)$ for $1 \leq s < k$, we get:

$$E_{\partial t}(n) \leq C \sqrt{\delta t} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, L^2(C))} + \frac{h^s}{\sqrt{\delta t}} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(t^{n-1}, t^n, \mathcal{H}^s(\Omega))} + h^s |u^n|_{\star, s+1}.$$

□

We are finally in the position to prove Theorem 3.2.

- PROOF OF THEOREM 3.2 - Using the triangle inequality in (33) we easily obtain the following inequality:

$$\begin{aligned} \|u^n - u_h^n\|_{0, C}^2 + \alpha \sum_{i=1}^n \delta t \|u^i - u_h^i\|_{\star}^2 &\leq C(T, \mu, \sigma) \left\{ \|u^n - w_h^n\|_{0, C}^2 + \alpha \sum_{i=1}^n \delta t \|u^i - w_h^i\|_{\star}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|u(0) - w_h^0\|_{0, C}^2 + \sum_{i=1}^n \delta t \left(\frac{1}{\alpha} E_{\text{appr}}^2(i) + T E_{\partial t}^2(i) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (53)$$

In order to obtain the estimate (34) it is sufficient to apply the results of Lemmas 3.3 and 3.5 in the right hand side of (53). □

4 Effects of using iso-parametric finite elements

In Section 2, we introduced curved finite element triangulations in both domains Ω_1 and Ω_2 and the advantage of using non-matching grids has been pointed out.

The use of curved finite elements is not suitable for a fast and easy implementation and makes the exact computation of the stiffness and mass matrix almost impossible. The remedy is to use, at the place of curved finite elements, iso-parametric finite elements for which the basis functions are polynomials and which allow for an exact numerical integration using Gaussian points.

The purpose of this Section is the analysis of the non-matching method in order to take this additional factor into account. The fact of using such finite elements changes the definition of the approximation space (25-26). The constraint condition (26) no longer makes sense since, in general, neither $v_{1, h}$ nor $v_{2, h}$ in (26) are defined over Γ .

Due to the existing literature on the subject for a fixed domain, the only new point is the effect of using iso-parametric elements along the interface. We assume that it is the only place where a problem may raise by making the hypothesis that Ω has a polygonal boundary.

Now, it is easy to see from the analysis of the error that we carried out in Section 3 that we can focus our attention on deriving optimal approximation and consistency error bounds for the following

static problem:

$$\begin{aligned} \text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ such that :} \\ a(u, v) = (f, v)_\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned} \quad (54)$$

where the bilinear form a is defined in (12), $\Omega = \Omega_1(0) \cup \Omega_2$ as in Section 1 and where the discretization relies on a space \mathcal{U}_h^0 (see (25-26)) that now takes into account the effect of using iso-parametric finite element approximations in both Ω_1 and Ω_2 .

More precisely, according to [15], we introduce two families of iso-parametric finite elements $(\tilde{\mathcal{T}}_{1,h}, \tilde{X}_{1,h})$ and $(\tilde{\mathcal{T}}_{2,h}, \tilde{X}_{2,h})$ for Ω_1 and Ω_2 : $\tilde{\mathcal{T}}_{1,h}$ (respectively $\tilde{\mathcal{T}}_{2,h}$) is an iso-parametric triangulation of Ω_1 (resp. Ω_2) of degree k and $\tilde{X}_{1,h}$ (resp. $\tilde{X}_{2,h}$) is a finite element space of degree k defined on $\tilde{\mathcal{T}}_{1,h}$ (resp. $\tilde{\mathcal{T}}_{2,h}$). For the sake of simplicity we shall suppose that both $\tilde{X}_{1,h}$ and $\tilde{X}_{2,h}$ are of degree k , but the same theory can be developed in the case of approximations of different degrees without any substantial change. Moreover we adopt the following notation:

$$\begin{aligned} \Omega_{1,h} &= \bigcup_{K \in \tilde{\mathcal{T}}_{1,h}}^{\circ} K ; & \Gamma_1^h &= \partial\Omega_{1,h} ; \\ \Omega_{2,h} &= \bigcup_{K \in \tilde{\mathcal{T}}_{2,h}}^{\circ} K ; & \Gamma_2^h &= \partial\Omega_{2,h} \setminus \partial\Omega ; \\ \Omega_h &= \Omega_{1,h} \cup \Omega_{2,h}. \end{aligned}$$

Finally we denote by $\tilde{\mathcal{T}}_{i,h}^\Gamma$ the trace of $\tilde{\mathcal{T}}_{i,h}$ over Γ_i^h , for $i = 1, 2$. Since Γ_1^h differs from Γ_2^h , the condition (25) can not be imposed; we thus need to introduce some transfer operators. Here is an example that is natural, at least from an analytical point of view: recalling that O is the rotation center of Ω_1 , we denote by $S_1 : \Gamma \rightarrow \Gamma_1^h$, $S_2 : \Gamma \rightarrow \Gamma_2^h$, $\Gamma \ni (\bar{r}, \theta) \mapsto (r_i(\theta), \theta) \in \Gamma_i^h$, the two one-to-one radial shift operators with respect to O . It is very easy to see that $S_i \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)^2$ and that the following property holds:

$$|JS_i| = 1 + O(h^k) \quad i = 1, 2 ; \quad (55)$$

where JS_i denotes the Jacobian of S_i .

Accordingly we define the shift operators over functions, $\mathcal{S}_i : L^2(\Gamma_i^h) \rightarrow L^2(\Gamma)$ for $i = 1, 2$, such that:

$$\mathcal{S}_i(u_i)(\mathbf{x}) = u_i(S_i \mathbf{x}) \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad u_i \in L^2(\Gamma_i^h),$$

It is easy to see that these operators are H^s -continuous for $s \in [0, 1]$ (with the standard convention that $H^0 = L^2$) with continuity constants bounded independently of h .

By abuse of notation, when it is useful, we write $\mathcal{S}_2(v)$ instead of $\mathcal{S}_2(v|_{\Gamma_2^h})$ for every $v \in H^1(\Omega_{2,h})$ and, moreover, we denote by $\mathcal{S}_2(\tilde{X}_{2,h})$ the range of \mathcal{S}_2 restricted to the set of traces of functions in $\tilde{X}_{2,h}$ (of course the same notation is also used for \mathcal{S}_1).

We are now in the position of defining a new approximation space for the solution of problem (54). Let $e \in \tilde{\mathcal{T}}_{2,h}^\Gamma$ be an edge on Γ_2^h , we denote by $f_e :]0, 1[\rightarrow e$ a bicontinuous application between the reference element $]0, 1[$ and e . Following the same steps as in Section 2, we start from the space of Lagrange multipliers defined as:

$$\tilde{M}_h = \{\varphi_h \in C^0(\Gamma_2^h) \text{ such that } \varphi_h|_e \circ f_e \in \mathcal{P}_k(]0, 1[) \quad \forall e \in \Gamma_2^h\} \quad (56)$$

We choose again the rotor as *master* but the other choice would be completely equivalent.

We define the following approximation space:

$$\tilde{X}_h = \{ v_h = (v_{1,h}, v_{2,h}) \in \tilde{X}_{1,h} \times \tilde{X}_{2,h} \text{ such that} \quad (57)$$

$$\int_{\Gamma_1^h} (\mathcal{S}_1 v_{1,h}(\mathbf{x}) - \mathcal{S}_2 v_{2,h}(\mathbf{x})) \mathcal{S}_2 \varphi_h(\mathbf{x}) d\Gamma = 0 \quad \forall \varphi \in \tilde{M}_h \}. \quad (58)$$

Remember that we focus our analysis on the spatial discretization thus, with respect to (26), there is no rotation operator r_{-t} involved.

Let us define $\tilde{X}_h^0 = \{ v_h \in \tilde{X}_h \text{ such that } v_h|_{\partial\Omega_{2,h} \setminus \Gamma_2^h} = 0 \}$.

According to the standard domain decomposition method, we propose to solve the following discrete problem:

$$\text{Find } u_h \in \tilde{X}_h^0 \text{ such that } a_h(u_h, v_h) = (f, v_h)_h \quad \forall v_h \in \tilde{X}_h^0 \quad (59)$$

where

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) &= \int_{\Omega_{1,h}} \nabla u_{1,h} \nabla v_{1,h} d\Omega + \int_{\Omega_{2,h}} \nabla u_{2,h} \nabla v_{2,h} d\Omega ; \\ (f, v_h)_h &= \int_{\Omega_{1,h}} f v_{1,h} d\Omega + \int_{\Omega_{2,h}} f v_{2,h} d\Omega . \end{aligned} \quad (60)$$

Furthermore we define a suitable mesh-dependent broken norm as:

$$\|u\|_{*,h}^2 := \|u\|_{1,\Omega_{1,h}}^2 + \|u\|_{1,\Omega_{2,h}}^2, \quad u|_{\Omega_{1,h}} \in H^1(\Omega_{1,h}), \quad u|_{\Omega_{2,h}} \in H^1(\Omega_{2,h}).$$

Lemma 4.1 *The bilinear form a_h defined in (60) is uniformly coercive in \tilde{X}_h equipped with the broken norm $\|\cdot\|_{*,h}$; that is*

$$\exists \alpha > 0 \text{ such that } a_h(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|_{*,h}^2 \quad \forall v_h \in \tilde{X}_h \quad (61)$$

where the constant α does not depend on the mesh size h .

The proof of this Lemma is analogous to the standard one in the mortar element method context and it can be found in [7] for example.

Also the following Lemma does not need a proof since it is the well known Second Strang Lemma (also known as Berger-Scott-Strang Lemma, [25]):

Lemma 4.2 (SECOND STRANG) *Let u and u_h be the solutions of problems (54) and (59) respectively. There exist two positive constants C, C' such that the following error estimate holds:*

$$\|u - u_h\|_{*,h} \leq C \inf_{v_h \in \tilde{X}_h} \|u - v_h\|_{*,h} + C' \sup_{w_h \in \tilde{X}_h} \frac{(f, w_h)_h - a_h(u, w_h)}{\|w_h\|_{*,h}}. \quad (62)$$

In particular the first term in the right hand side of inequality (62) is **the best approximation error** while the second one is **the consistency error**: in the following we study separately these two contributions.

4.1 Best approximation error

We only have to follow the basic steps of the proof for the best approximation error in the case of the standard mortar element method which has been proposed in [7].

Lemma 4.3 Let $\Pi : H^1(\Omega_1) \rightarrow \mathcal{S}_2(\tilde{X}_{2,h}) \subset H^1(\Gamma)$ be the L^2 -projector defined in the following way:

$$\int_{\Gamma} (u|_{\Gamma} - \Pi u) \mathcal{S}_2(\phi_h) d\Gamma = 0 \quad \forall \phi_h \in \tilde{M}_h; \quad (63)$$

the following approximation property holds:

$$\|u|_{\Gamma} - \Pi u\|_{0,\Gamma} \leq C h^s \|u\|_{s+1/2,\Omega} \quad \forall u \in H^{s+1/2}(\Omega), \quad s \in [1, k+1/2]. \quad (64)$$

- PROOF OF LEMMA 4.3 - We denote by I_h^2 the interpolation operator in $\Omega_{2,h}$, then, since Π is an L^2 -projection, we surely have that

$$\|u|_{\Gamma} - \Pi u\|_{0,\Gamma} \leq \|u|_{\Gamma} - \mathcal{S}_2(I_h^2 u)\|_{0,\Gamma},$$

and, by using the triangle inequality and the L^2 stability of \mathcal{S}_2 , we have:

$$\|u|_{\Gamma} - \Pi u\|_{0,\Gamma} \leq \|u|_{\Gamma} - \mathcal{S}_2 u|_{\Gamma_h^2}\|_{0,\Gamma} + C \|u|_{\Gamma_h^2} - (I_h^2 u)|_{\Gamma_h^2}\|_{0,\Gamma_h^2} \quad (65)$$

The estimate of the second term in the right hand side is standard; we focus our attention on the first one and of course we want this term to be bounded by the right hand side of (64).

Let (ρ, θ) be the system of polar coordinates with respect to the rotation center O of Ω_1 and \bar{r} be the radius of Ω_1 . Without loosing generality, we suppose that $B(3\bar{r}/2, O) \subset \Omega$ where $B(3\bar{r}/2, O)$ denotes the ball of center O and radius $3\bar{r}/2$. For h small enough, there exist $c \in L^\infty([0, 2\pi])$ such that $-\bar{r}/2 \leq c(\theta) \leq \bar{r}/2$ and the following equality holds:

$$\|u|_{\Gamma} - \mathcal{S}_2 u|_{\Gamma_h^2}\|_{0,\Gamma}^2 = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\bar{r}}^{\bar{r}+h^{k+1}c(\theta)} \frac{\partial u}{\partial r}(s, \theta) ds \right)^2 d\theta. \quad (66)$$

By using the Sobolev embedding theorems we deduce that:

$$\|u|_{\Gamma} - \mathcal{S}_2 u|_{\Gamma_h^2}\|_{0,\Gamma}^2 \leq C h^{2(k+1)} \left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\|_{L^\infty(\Omega_1)}^2 \leq C h^{2(k+1)} \|u\|_{3,\Omega}^2. \quad (67)$$

While, using Cauchy-Schwartz inequality, we have from (66):

$$\|u|_{\Gamma} - \mathcal{S}_2 u|_{\Gamma_h^2}\|_{0,\Gamma}^2 \leq C h^{k+1} \int_0^{2\pi} \int_{\bar{r}}^{\bar{r}+h^{k+1}c(\theta)} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(s, \theta) \right|^2 ds d\theta \leq C h^{k+1} \|u\|_{1,\Omega}^2. \quad (68)$$

By standard interpolation theory, from (67) and (68), we surely obtain that

$$\|u|_{\Gamma} - \mathcal{S}_2 u|_{\Gamma_h^2}\|_{0,\Gamma} \leq C h^s \|u\|_{s+1/2,\Omega} \quad \forall s \in [1, k+1/2] \quad (69)$$

Using now (65), (69) and standard results on the interpolation operator, we have that (64) holds. \square

We want now to construct a function $v_h \in \tilde{X}_h$ which provides an optimal approximation error and we do that by means of the projector Π defined and analyzed in the previous Lemma.

Proposition 4.4 Let I_1^h (resp. I_2^h) be the interpolant operator in $\Omega_{1,h}$ (resp. $\Omega_{2,h}$), $I_h = (I_1^h, I_2^h)$ and $\mathcal{L}_h : \tilde{M}_h \rightarrow \tilde{X}_{2,h}$ an extension operator such that for every $\phi_h \in \tilde{M}_h$, $\mathcal{L}_h(\phi_h)$ takes the value zero at all the internal nodes in Ω_2 . Moreover, let $u \in H_0^1(\Omega)$ be the solution of the problem (54); we assume that $u \in H^m(\Omega)$ for some $m > 1$. The function $v_h = (v_{1,h}, v_{2,h}) \in \tilde{X}_h$ defined as:

$$v_{1,h} = I_1^h u \quad \text{and} \quad v_{2,h} = I_2^h u + \mathcal{L}_h(\mathcal{S}_2^{-1}(\Pi \mathcal{S}_1(I_1^h u)) - I_2^h u)$$

is such that $v_h \in \tilde{X}_h$ and it verifies for every $1 \leq s \leq \min\{k, m-1\}$:

$$\begin{aligned} \|u - v_h\|_{*,h} &\leq C_1 h^s |u|_{s+1,\Omega}; \\ \|u - v_h\|_{0,\Omega_h} &\leq C_2 h^{s+1} |u|_{s+1,\Omega}. \end{aligned}$$

- PROOF OF PROPOSITION 4.4 - By means of (38) we have that

$$\|u - v_h\|_{*,h} \leq \|u - I_h u\|_{*,h} + h^{-1/2} \|\mathcal{S}_2^{-1}(\Pi \mathcal{S}_1(I_1^h u)) - I_2^h u\|_{0,\Gamma}$$

and, from now on we focus our attention on the second term in the right hand side. By summing and subtracting the terms $\Pi(u)$ and $u|_\Gamma$, using the triangle inequality and the continuity of \mathcal{S}_2 , we have:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}_2^{-1}(\Pi \mathcal{S}_1(I_1^h u)) - I_2^h u\|_{0,\Gamma} &\leq C \{ \|\Pi(\mathcal{S}_1 I_1^h u) - \Pi(u)\|_{0,\Gamma} + \|\Pi(u) - u|_\Gamma\|_{0,\Gamma} \\ &\quad + \|u|_\Gamma - \mathcal{S}_2 I_2^h u\|_{0,\Gamma} \} \end{aligned} \quad (70)$$

By the L^2 continuity of the operators \mathcal{S}_1 and \mathcal{S}_2 and using the same step as in proof of Lemma 4.3 in order to bound the first and third terms in right hand side of (70), we end the proof. \square

4.2 Consistency error

In this Subsection we analyze the contribution coming from the second term in the right hand side of (62) and we state the following proposition:

Proposition 4.5 *Let $u \in H_0^1(\Omega)$ be the solution of the differential problem (54); we assume also $u \in H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ for some $m > 1$, then the following estimate holds for every $1 \leq s \leq \{k, m-1\}$:*

$$\sup_{w_h \in \tilde{X}_h} \frac{(f, w_h)_h - a_h(u, w_h)}{\|w_h\|_{*,h}} \leq C h^s \|u\|_{s+1,\Omega}. \quad (71)$$

- PROOF OF PROPOSITION 4.5 - Using the integration by parts and recalling that u verifies (54), we have:

$$(f, w_h)_h - a_h(u, w_h) = - \int_{\Gamma_1^h} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_1} w_{1,h} d\Gamma + \int_{\Gamma_2^h} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_2} w_{2,h} d\Gamma \quad \forall w_h \in \tilde{X}_h \quad (72)$$

where we denote by \mathbf{n}_1 (resp. \mathbf{n}_2) the outer (resp. inner) normal to $\Omega_{1,h}$ (resp. $\Omega_{2,h}$) at Γ_1^h (resp. Γ_2^h).

We apply the change of variables \mathcal{S}_1 (resp. \mathcal{S}_2) to the first (resp. second) integral in the right hand side of (72). Summing and subtracting the quantity $\int_\Gamma \mathcal{S}_2 \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_2} \right) \mathcal{S}_1 w_{1,h} d\Gamma$ and recalling the fact that the test function w_h fulfills the constraint (58), we obtain that the following inequality holds for every $\varphi_h \in \tilde{M}_h$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_1^h} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_1} w_{1,h} d\Gamma - \int_{\Gamma_2^h} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_2} w_{2,h} d\Gamma \right| &\leq \int_\Gamma \left[\mathcal{S}_1 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_1} - \mathcal{S}_2 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_2} \right] \mathcal{S}_1 w_{1,h} d\Gamma \\ &\quad + \int_\Gamma \left[\mathcal{S}_2 \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_2} \right) - \mathcal{S}_2 \varphi_h \right] (\mathcal{S}_1 w_{1,h} - \mathcal{S}_2 w_{2,h}) d\Gamma + C h^k \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_i} \right\|_{0,\Gamma_{i,h}} \|w_{i,h}\|_{0,\Gamma_{i,h}} \end{aligned} \quad (73)$$

where φ_h is any function in \tilde{M}_h and the last term, $C h^k$, comes from the fact that the Jacobian was neglected in the change of variables while writing the second integral in the right hand side.

We estimate now the two integrals in the right hand side of (73). Starting from the first one, the following estimate holds:

$$\begin{aligned} \left| \left[\mathcal{S}_1 \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_1} \right) - \mathcal{S}_2 \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_2} \right) \right] \mathcal{S}_1 w_{1,h} d\Gamma \right| &\leq C \left\| \mathcal{S}_1 \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_1} \right) - \mathcal{S}_2 \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_1} \Big|_{\Gamma_{2,h}} \right) \right\|_{0,\Gamma} \|w_{1,h}\|_{0,\Gamma_{1,h}} \\ &+ C \left\| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_2} - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_1} \Big|_{\Gamma_{2,h}} \right\|_{0,\Gamma_{2,h}} \|w_{1,h}\|_{0,\Gamma_{1,h}}. \end{aligned} \quad (74)$$

Furthermore using the same argument used in (68) (resp. (67)) in (74) in the case $k = 1$ (resp. $k > 1$), we have :

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{S}_1 \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_1} \right) - \mathcal{S}_2 \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_1} \Big|_{\Gamma_{2,h}} \right) \right\|_{0,\Gamma} &\leq Ch \|u\|_{2,\Omega} & k = 1 \\ \left\| \mathcal{S}_1 \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_1} \right) - \mathcal{S}_2 \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_1} \Big|_{\Gamma_{2,h}} \right) \right\|_{0,\Gamma} &\leq Ch^{k+1} \|u\|_{7/2,\Omega} & k > 1 \\ \left\| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_2} - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_1} \Big|_{\Gamma_{2,h}} \right\|_{0,\Gamma_{2,h}} &\leq \|u\|_{2,\Omega} \|\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2\|_{0,\Gamma_{2,h}} \leq Ch^k \|u\|_{2,\Omega} & k \geq 1. \end{aligned} \quad (75)$$

Using (75) in (74) we obtain for every $1 \leq s \leq \min\{k, m-1\}$

$$\left| \int_{\Gamma_{1,h}} \left[\mathcal{S}_1 \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_1} \right) - \mathcal{S}_2 \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_2} \right) \right] \mathcal{S}_1 w_{1,h} d\Gamma \right| \leq Ch^s \|u\|_{s+1,\Omega}. \quad (76)$$

For what concerns the second term in the right hand side of (73) , we start by writing:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} \left[\mathcal{S}_2 \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_2} \right) - \mathcal{S}_2 \varphi_h \right] (\mathcal{S}_1 w_{1,h} - \mathcal{S}_2 w_{2,h}) d\Gamma \right| &\leq C \left\{ \inf_{\varphi_h \in \tilde{M}_h} \left\| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - \mathcal{S}_2 \varphi_h \right\|_{-1/2,\Gamma} \right. \\ &\quad \left. + \left\| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - \mathcal{S}_2 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_2} \right\|_{-1/2,\Gamma} \right\} \|w_h\|_{*,h}. \end{aligned}$$

Now, the second term in the right hand side is treated with the same arguments as the ones used above in this proof, namely (75), while, by the Aubin-Nitsche argument, we obtain:

$$\inf_{\varphi_h \in \tilde{M}_h} \left\| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - \mathcal{S}_2 \varphi_h \right\|_{-1/2,\Gamma} \leq h^s \|u\|_{s+1,\Omega} \quad 1 \leq s \leq \min\{k, m-1\}. \quad (77)$$

Finally using estimates (76) and (77), we obtain that (71) holds. \square

Remark 4.6 In this Section the matching condition and the definition of the approximation space (57-58) depend on the choice of the one-to-one shift operators \mathcal{S}_1 and \mathcal{S}_2 and of the integration domain in (58). Nevertheless we point out that other choices are possible and the associated proofs (which might use the explicit form of the one-to-one operator) still hold when replacing \mathcal{S}_i by other regular one-to-one operators verifying condition (55). Moreover the interface condition can be replaced with a condition defined on Γ_i^h , for $i = 1$ or $i = 2$, or also, if needed, on any Γ_h polygonal inscribed into Γ whose vertices are a superset of the union of the vertices of $\Gamma_{1,h}$ and $\Gamma_{2,h}$. We set:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{1,2} : L^2(\Gamma_1^h) &\rightarrow L^2(\Gamma_2^h) & u &\mapsto \mathcal{S}_2^{-1} \mathcal{S}_1 u ; \\ \mathcal{S}_{2,1} : L^2(\Gamma_2^h) &\rightarrow L^2(\Gamma_1^h) & \mathcal{S}_{2,1} &= \mathcal{S}_{1,2}^{-1}. \end{aligned} \quad (78)$$

The condition (58) could be replaced by any of the following ones:

$$\int_{\Gamma_2^h} (\mathcal{S}_{1,2} v_{1,h}(r_{-t}\mathbf{x}) - v_{2,h}(\mathbf{x})) \varphi_h(\mathbf{x}) d\Gamma = 0 \quad \forall \varphi_h \in \tilde{M}_h ; \quad (79)$$

$$\int_{\Gamma_1^h} (v_{1,h}(r_{-t}\mathbf{x}) - \mathcal{S}_{2,1} v_{2,h}(\mathbf{x})) \mathcal{S}_{2,1} \varphi_h(\mathbf{x}) d\Gamma = 0 \quad \forall \varphi_h \in \tilde{M}_h ; \quad (80)$$

$$\int_{\Gamma_h} \mathcal{S}_h (\mathcal{S}_1 v_{1,h}(r_{-t}\mathbf{x}) - \mathcal{S}_2 v_{2,h}(\mathbf{x})) \mathcal{S}_h \varphi_h(\mathbf{x}) d\Gamma = 0 \quad \forall \varphi_h \in \tilde{M}_h ; \quad (81)$$

where in the last line the operator \mathcal{S}_h is then associated to the shift operator from Γ to Γ_h . From a theoretical point of view the difference among these constraints relies on changes of the integration variables where Jacobians can be neglected thanks to (55). From a numerical point of view it brings flexibility to be able to deal with other choices than the ones specifically used in the proofs of the previous Subsections.

Remark 4.7 In this Section we carried out the estimates of the best approximation and consistency errors for the mortar element method in the case of iso-parametric finite elements. Although we explicitly treated only the case of interest, that is a decomposition in only two sub-domains with the interface Γ which is a manifold without boundary, the proofs we presented apply unchanged to more general decompositions. The use of iso-parametric finite elements preserves then the optimality of the mortar method and make the assembly of the mass and stiffness matrix inexpensive.

4.3 Error estimate in the case of iso-parametric finite elements

The theory developed in this Section can of course be applied for the discretisation of problem (21) and allow the use of iso-parametric finite elements along the interface Γ .

Applying the machinery developed in Section 2 and 3 with this new choice of approximation space, we obtain the following Theorem:

Theorem 4.8 *Let*

$$\begin{aligned} \tilde{U}_h^n := \{ v_h \in \tilde{X}_h \text{ such that } v_h|_{\partial\Omega} = 0 \text{ and} \\ \int_{\Gamma} (\mathcal{S}_1 v_{1,h}(r_{-n}\mathbf{x}) - \mathcal{S}_2 v_{2,h}(\mathbf{x})) \mathcal{S}_2 \varphi_h(\mathbf{x}) d\Gamma = 0 \quad \forall \varphi_h \in \tilde{M}_h \} \end{aligned}$$

and $\{\tilde{u}_h^n\}_n$ be the solution of the problem

$$\forall n = 0, \dots, N-1, \quad \text{find } \tilde{u}_h^{n+1} \in \tilde{U}_h^{n+1} \text{ such that :}$$

$$\int_C \sigma \frac{\tilde{u}_h^{n+1} - \tilde{u}_h^n}{\delta t} v_h^{n+1} d\Omega + a_h(\tilde{u}_h^{n+1}, v_h^{n+1}) = (J_s^{n+1}, v_h^{n+1})_{\Omega_2} \quad \forall v_h^{n+1} \in \tilde{U}_h^{n+1}.$$

If the solution u of the problem (8) verifies the same regularity assumptions as in Theorem 3.2, the following optimal error estimate holds:

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\sigma}(u^n - \tilde{u}_h^n)\|_{0,C}^2 + \alpha \sum_{i=1}^n \delta t \sum_{j=1}^2 \|u_j^i - \tilde{u}_{j,h}^i\|_{1,\Omega_j \cap \Omega_{j,h}}^2 \leq C(T, \sigma, \mu) \left\{ h^{2s} \sum_{i=1}^n \delta t |u^i|_{\star, s+1}^2 \right. \\ \left. + h^{2(s+1)} (\|u^n\|_{s+1,C}^2 + \|u^0\|_{s+1,C}^2) + (\delta t)^2 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{L^2(0,T,L^2(C))}^2 + h^{2s} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T,H^s(\Omega))}^2 \right\} \end{aligned}$$

for all $n = 1, \dots, N$ and where the constant $C(T, \sigma, \mu)$ depends on the parameters of the problem, but neither on δt nor on h .

5 Implementation aspects

In this Section we detail the some aspects related to the implementation of the proposed method (28).

We focus our attention, firstly, on the numerical treatment of the interface condition (26) which appears to be a new task in a standard finite element code and, secondly, on the construction of the final system. To simplify the exposition, we treat the case in which the rotor doesn't move but the same arguments hold also when the rotor moves and any difference will be pointed out where necessary.

In Section 4 it is proved that the use of curved triangulations can be avoided and, without loss of generality, we assume here that:

- Ω_1 and Ω_2 are decomposed by triangular meshes with straight edges and non-matching at the interface Γ .
- The degree of the polynomials is set equal to 1 in both domains.

5.1 Numerical treatment of the mortar condition

Since we use standard triangulation on both domains, the mortar condition must be treated according to Section 4. In the following we focus our attention on the implementation of the constraint (58) and of some of its variants (see Remark 4.6). Below, in Figure 1, we present the general configuration we have to deal with from the implementation point of view: on the left, a simplified situation with only one triangle from the stator and rotor meshes and, on the right, an enlargement of a global mesh in a neighbourhood of the interface. As it can be seen, the stator mesh penetrates that of the rotor and vice-versa.

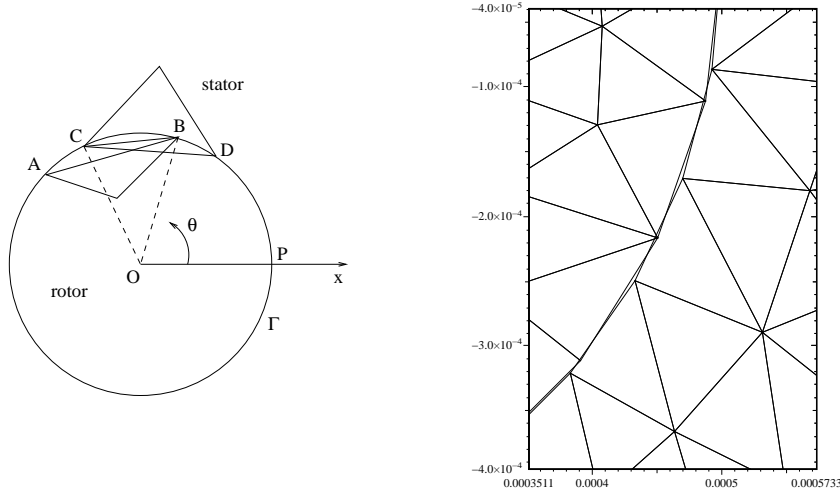


Figure 1: Intersection between two mesh sides belonging one to a stator mesh triangle and the other to a rotor one (left). A real mesh configuration in a neighbourhood of the interface (right). The intersection of the two mesh edges AB and CD can be defined either in terms of angles or in terms of segments. In the case of the figure, the intersection is represented either by the interval (θ_B, θ_C) or by the line CB.

Note that the use of iso-parametric elements allows to simplify the computation of the mass and stiffness matrix coefficients. Here another difficulty raises: the computation of the interface integrals.

We propose two different approaches to compute the integral in the mortar constraint.

1. The first approach is based on the representation of the mortar constraint presented in Section 4 and on a clever choice of the operators S_i . We choose S_i in a way that the functions involved in the integral (58) are piecewise polynomials of first degree with respect to the curvilinear parameter s .
2. The second one relies on the representation (81) of the mortar constraint and Γ_h is chosen to be the polygonal obtained by using all the stator and rotor mesh nodes lying on Γ . In this approach a quadrature formula is used.

In what follows, keeping in mind Figure 1 (left), we will denote by φ_A^1 and φ_B^1 the basis functions associated to nodes A and B of the rotor mesh triangle and by φ_C^2 and φ_D^2 those associated to nodes C and D of the stator mesh triangle.

First approach

Since Γ a circle, we know a global parameterization of it and the integration of polynomials of degree two over Γ can be done exactly. In the following we see that through a suitable choice of the operators, the mortar constraint can involve only integrals of that type. We use the constraint (58) and we choose the operators S_i in such a way that S_i send the set of piecewise linear functions onto itself. Namely the operators S_i send segments of equal length into segments of equal length. In this way, referring to Figure 1 for the considered configuration, we have the following expressions

$$\begin{aligned} S_1(\varphi_A^1)(s) &= \frac{s_B - s}{s_B - s_A}, & S_1(\varphi_B^1)(s) &= \frac{s - s_A}{s_B - s_A}, & \text{on the arc } AB; \\ S_2(\varphi_C^2)(s) &= \frac{s_D - s}{s_D - s_C}, & S_2(\varphi_D^2)(s) &= \frac{s - s_C}{s_D - s_C}, & \text{on the arc } CD. \end{aligned}$$

The idea is that now the integrands in (58) are product of piecewise polynomials of degree one.

This approach relies on the intersection between the two discretizations of the interface given in terms of angles and the general integral that one has to calculate is:

$$\int_{\text{arc } BC} S_1(\varphi_B^1) S_2(\varphi_C^2) ds = \int_{\theta_B}^{\theta_C} \left(\frac{\theta - \theta_A}{\theta_B - \theta_A} \right) \left(\frac{\theta_D - \theta}{\theta_D - \theta_C} \right) \rho d\theta$$

that can be exactly computed ($\rho = |O - P|$).

Second approach

In this second approach we use a constraint of the type (81) where Γ_h is the polygonal inscribed in Γ composed of all the intersection segments. Its nodes are all the stator and rotor mesh nodes lying on Γ . The operator S_i and S_h are chosen to be the orthogonal projection with respect to $\Gamma_{i,h}$.

If we look at Figure 1, the integral we are considering as example becomes

$$\int_{\text{seg } AB \cap \text{seg } CD} \varphi_B^1 \varphi_C^2 dt.$$

This approach relies on the intersection between the two discretizations of the interface given in terms of segments as it has been previously defined. If the intersection segment CB is not an empty

set, we have

$$\int_{seg AB \cap seg CD} \varphi_B^1 \varphi_C^2 dt = \sum_{k \mid \xi_k \in seg CB} \varphi_B^1(x_k) \varphi_C^2(y_k) \omega_k$$

where x_k and y_k are the orthogonal projections of the integration nodes ξ_k on AB and CD respectively and ω_k are the weights of the integration formula.

5.2 The construction of the final matrix system

In this section, we aim at writing problem (28) in a matrix form. First, we construct a basis of the approximation space \mathcal{U}_h^t . It involves a set of linear systems whose solutions represent the columns of a matrix, called Q in the what follows, that allows to couple at the interface the information coming from the stator and rotor domains. Its construction is a crucial point in the method implementation. Next, we present the matrix structure of the discretized problem pointing out the characteristics of the involved matrix.

It is important to remark that all the line integrals over Γ which appear in what follows, have to be considered as explained in the previous Subsection, although by abuse of notation we shall use the symbol \int_Γ to simplify the description.

5.2.1 A basis for the approximation space \mathcal{U}_h^t

Let us consider the discrete spaces X_{i,h_i} defined in (23) with $k_1 = k_2 = 1$. The degrees of freedom are the values at the vertices of the mesh triangles K . We denote the nodes of triangle K by \mathbf{a}_K and we define the sets of global nodes Ξ_i^0

$$\Xi_i^0 := \{\mathbf{a}_K \mid K \in \mathcal{T}_{i,h_i}, \mathbf{a}_K \notin \partial\Omega_i \setminus \Gamma\}.$$

In defining the set Ξ_h^0 , an assembly process has taken place and in the global numeration we denote a node by \mathbf{a} . The two sets of nodes on the interface will be denoted as follows

$$\xi^i = \{\mathbf{a} \in \Xi_i^0 \cap \Gamma\},$$

and we define $m_\Gamma^i = \text{card}(\xi^i)$ and $m^i = \text{card}(\Xi_i^0)$.

Let us denote by $\varphi_{\mathbf{a}}^i$ the basis function associated to node $\mathbf{a} \in \Xi_i^0$. This function is the element of the spaces X_{i,h_i} defined by

$$\varphi_{\mathbf{a}}^i(\mathbf{b}) = \delta_{\mathbf{a}\mathbf{b}} \quad \forall \mathbf{b} \in \Xi_i^0$$

where $\delta_{\mathbf{a}\mathbf{b}}$ is the Kronecker symbol.

Let us denote by \mathcal{B} a basis for $\mathcal{U}_h^0(t)$: we choose that

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^1 \cup \mathcal{B}^2 \cup \mathcal{B}^\Gamma;$$

where the sets of functions \mathcal{B}^1 , \mathcal{B}^2 , and \mathcal{B}^Γ will be defined below.

The functions in \mathcal{B}^1 are zero in $\overline{\Omega_2}$, the functions in \mathcal{B}^2 are zero in $\overline{\Omega_1}$, and the functions in \mathcal{B}^Γ have their support in the union of the *mortar* elements. The mortar elements are the triangles having a vertex lying on Γ .

Due to the properties of the considered basis functions, we set

$$\mathcal{B}^1 = \{(\varphi_{\mathbf{a}}^1, 0) \mid \mathbf{a} \in \Xi_1^0 \setminus \xi^1\},$$

$$\mathcal{B}^2 = \{(0, \varphi_{\mathbf{a}}^2) \mid \mathbf{a} \in \Xi_2^0 \setminus \xi^2\},$$

and a possible choice for the basis functions centered on the nodes lying on the interface is

$$\mathcal{B}^\Gamma = \left\{ (\varphi_{\mathbf{a}}^1, \sum_{\mathbf{b} \in \xi^2} q_{\mathbf{b}}^{\mathbf{a}} \varphi_{\mathbf{b}}^2) \mid \mathbf{a} \in \xi^1, q_{\mathbf{b}}^{\mathbf{a}} \in \mathbb{R} \right\}. \quad (82)$$

For each of the m_Γ^1 nodes \mathbf{a} , the coefficients $q_{\mathbf{b}}^{\mathbf{a}}$, $\mathbf{b} \in \xi^2$ are determined by imposing the integral matching condition

$$\int_{\Gamma} (\varphi_{\mathbf{a}}^1 - \sum_{\mathbf{b} \in \xi^2} q_{\mathbf{b}}^{\mathbf{a}} \varphi_{\mathbf{b}}^2) \varphi_{\mathbf{c}}^2 d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{c} \in \xi^2.$$

Each of these m_Γ^1 systems of m_Γ^2 equations can be put into the following matrix form

$$C \mathbf{q}^i = \mathbf{D}^i \quad (83)$$

where

$$\begin{aligned} (\mathbf{q}^i)^T &= (q_{\mathbf{b}_1}^{\mathbf{a}_i}, \dots, q_{\mathbf{b}_{m_\Gamma^2}}^{\mathbf{a}_i}), \\ C(r, j) &= \int_{\Gamma} \varphi_{\mathbf{a}_r}^2 \varphi_{\mathbf{a}_j}^2 d\Gamma \quad r, j : \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_j \in \xi^2, \\ \mathbf{D}^i(j) &= \int_{\Gamma} \varphi_{\mathbf{a}_i}^1 \varphi_{\mathbf{a}_j}^2 d\Gamma \quad i : \mathbf{a}_i \in \xi^1, j : \mathbf{a}_j \in \xi^2. \end{aligned}$$

The system (83) allows us to determine the vector \mathbf{q}^i , $\forall i : \mathbf{a}_i \in \xi^1$, and thus the set of basis functions on the interface. For following considerations, it is useful to define the rectangular matrix Q of dimension $m_\Gamma^2 \times m_\Gamma^1$

$$Q = C^{-1} D.$$

5.2.2 The matrix structure of the discretized problem

The system we solve to get numerical results can be obtained directly by expanding $u_h = (u_{1,h}, u_{2,h})$ in terms of the basis functions of \mathcal{B} and inserting this expansion in equation (28).

Here we prefer to get the final system with a different two-step procedure: the first step consists in writing, in each domain, the system associated to equation (28) with homogeneous Neumann conditions on the interface Γ . In the second step the two previous systems are coupled by means of the mortar condition. This procedure is easier to be understood and involves few modifications in an already existing finite element code. Now, let us go through it in a more detailed way.

We expand the numerical approximation $u_h = (u_{1,h}, u_{2,h})$ of the solution u in terms of the basis functions of X_{i,h_i} :

$$\begin{aligned} u_{1,h}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{i : \mathbf{a}_i \in \Xi_1^0} u_i^1(t) \varphi_{\mathbf{a}_i}^1(\mathbf{x}), \\ u_{2,h}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{r : \mathbf{a}_r \in \Xi_2^0} u_r^2(t) \varphi_{\mathbf{a}_r}^2(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (84)$$

where we have used m^1 coefficients u_i^1 and m^2 coefficients u_r^2 . Among these $m^1 + m^2$ coefficients, only $\text{card } \mathcal{B} = m^1 + m^2 - m_\Gamma^2$ are real unknowns. In fact, the m_Γ^1 coefficients associated to nodes in ξ^1 are linked to the m_Γ^2 coefficients associated to nodes in ξ^2 through the integral matching condition (26).

We divide the unknowns in each domain in two blocks with names reported in parentheses: the first block (\mathbf{u}_Γ) contains the unknowns associated to the m_Γ^j nodes lying on Γ and the second block (\mathbf{u}_i) those associated to the $m^j - m_\Gamma^j$ nodes interior to the domain ($j = 1, 2$). The vectors of unknowns are then

$$\mathbf{u}^1 = (\mathbf{u}_\Gamma^1, \mathbf{u}_i^1)^T, \quad \mathbf{u}^2 = (\mathbf{u}_\Gamma^2, \mathbf{u}_i^2)^T$$

where the exponent T stands for the transpose operator. In each domain, we build the system associated to equation (28) with a homogeneous Neumann condition at the interface Γ . In this way, we obtain two linear systems of the following form ($j = 1, 2$)

$$A^j \begin{pmatrix} \mathbf{u}_\Gamma^j \\ \mathbf{u}_i^j \end{pmatrix}_{t=t_{n+1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_\Gamma^j \\ \mathbf{F}_i^j \end{pmatrix}_{t=t_n} \quad \text{with} \quad A^j = \begin{pmatrix} \frac{M_{\Gamma,\Gamma}^j}{\Delta t} + K_{\Gamma,\Gamma}^j & \frac{M_{\Gamma,i}^j}{\Delta t} + K_{\Gamma,i}^j \\ \frac{M_{i,\Gamma}^j}{\Delta t} + K_{i,\Gamma}^j & \frac{M_{i,i}^j}{\Delta t} + K_{i,i}^j \end{pmatrix}$$

Neither \mathbf{u}^1 nor \mathbf{u}^2 are solution of the previous problems since the two sets of values \mathbf{u}_Γ^1 and \mathbf{u}_Γ^2 are linked one to the other by the mortar matching condition. Choosing the traces on Γ of the stator shape functions as mortar elements, we have that

$$Q_{n+1} \mathbf{u}_\Gamma^1(t_{n+1}) = \mathbf{u}_\Gamma^2(t_{n+1}) \quad , \quad Q_n \mathbf{u}_\Gamma^1(t_n) = \mathbf{u}_\Gamma^2(t_n)$$

where Q_{n+1} and Q_n are the rectangular full matrices of dimension m_Γ^2 per m_Γ^1 obtained from the matching condition discretization at time t_{n+1} and t_n . We introduce then the following matrices:

$$\tilde{Q}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & Q_{n+1} & 0 \\ Id & 0 & 0 \\ 0 & Id & 0 \\ 0 & 0 & Id \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad A = \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ 0 & A^1 \end{pmatrix} \quad (85)$$

together with \tilde{Q}_n of the same structure as \tilde{Q}_{n+1} but involving Q_n and

$$M = \begin{pmatrix} M^2 & 0 \\ 0 & M^1 \end{pmatrix} \quad \text{where} \quad M^j = \begin{pmatrix} M_{\Gamma,\Gamma}^j & M_{\Gamma,i}^j \\ M_{i,\Gamma}^j & M_{i,i}^j \end{pmatrix}. \quad (86)$$

Indicating by \mathbf{w}_{n+1} the independent unknowns at time t_{n+1} , i.e.

$$\mathbf{w}_{n+1} = (\mathbf{u}_i^2(t_{n+1}) \quad , \quad \mathbf{u}_\Gamma^1(t_{n+1}) \quad , \quad \mathbf{u}_i^1(t_{n+1}))^T$$

the approximation of the physical solution is computed solving the system

$$\tilde{Q}_{n+1}^T A \tilde{Q}_{n+1} \mathbf{w}_{n+1} = \tilde{Q}_{n+1}^T \frac{M}{\Delta t} \tilde{Q}_n \mathbf{w}_n + \tilde{Q}_{n+1}^T \mathbf{J}_{n+1}. \quad (87)$$

In particular, the left-hand side matrix can be represented in a block-displayed structure as follows

$$\tilde{Q}_{n+1}^T A \tilde{Q}_{n+1} = \begin{pmatrix} A_{i,i}^2 & A_{i,\Gamma}^2 Q_{n+1} & 0 \\ Q_{n+1}^T A_{\Gamma,i}^2 & Q_{n+1}^T A_{\Gamma,\Gamma}^2 Q_{n+1} + A_{\Gamma,\Gamma}^1 & A_{\Gamma,i}^1 \\ 0 & A_{i,\Gamma}^1 & A_{i,i}^1 \end{pmatrix}.$$

The final matrix is symmetric, since for both domains we have that $A_{i,\Gamma} = (A_{\Gamma,i})^T$, and positive. The final system can be solved either by a direct method such as the Cholesky factorization or by an iterative one such as the Conjugate Gradient procedure [25]. In the second case, residuals can be computed in parallel thanks to the two-step procedure that has been chosen to derive the stiffness and mass matrices (see [4]).

For what concerns the way the mortar and the final system matrices are built, there is no difference in structure between the case in which the rotor domain is fixed and the case with the rotor domain rotating around its center. In the first case, the matrix Q is constructed once at the exterior of the temporal loop. In the second case, it is built at each time step: the intersection between the stator and rotor meshes at the interface changes from one time iteration to the next one and so the elements of Q do. The stiffness and the mass matrices in A and M , instead, do not depend on time.

6 Numerical results

In the following, we are going to present some results concerning the comparison between the two techniques adopted for the matching condition discretization and the ability of the method at reproducing the physical solution (continuous at the interface). Moreover, we will analyse the accuracy of the method and present the results related to its application in studying a more realistic, even if academic, eddy currents problem (TE formulation is here considered).

6.1 Geometry and simulation parameters

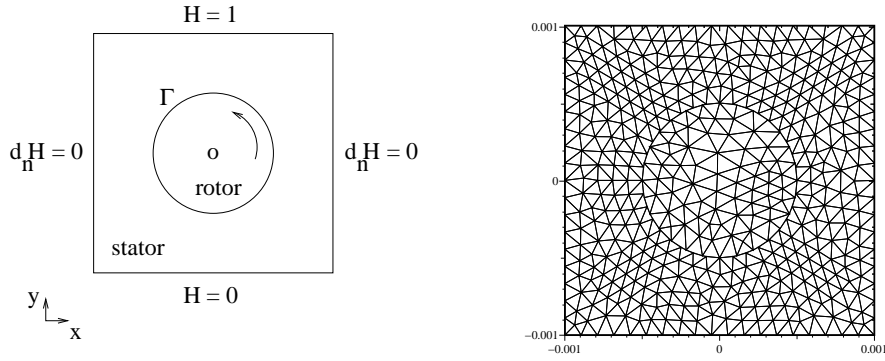


Figure 2: The geometry of the problem and boundary conditions (left); an example of stator and rotor meshes that do not match at the interface (right).

We consider the situation displayed in Figure 2 (left). The stator is a square of edge $L = 2$ mm, and the rotor is a circle of radius $\rho = 0.5$ mm and center at the origin of the (x, y) coordinates system.

The source is represented by a constant magnetic field parallel to the z -axis, of intensity 0 T/m at the bottom and 1 T/m at the top of the stator domain; homogeneous Neumann conditions are considered on the stator vertical boundaries.

We use linear finite elements for the spatial discretization. The stator mesh is composed of 423 nodes and 736 triangles whereas the rotor one has 84 nodes and 138 triangles (see Figure 2 (right); the mesh parameter h is equal to 0.1 mm for both meshes.) A first order implicit Euler scheme is applied to discretize the temporal derivative.

A characteristic dimension of the problem is the depth of penetration of the magnetic field in the domain

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu_0 \sigma f}}.$$

If v is the rotation tangential speed, the rotation angular speed is $\omega = \frac{v}{\rho}$ to which it corresponds a frequency $f = \frac{v}{2\pi\rho}$. The value $v = v_1 \approx (18\pi\rho 10^2)^{-1}$ has been chosen by supposing that

$$\sigma = 10^9 \text{ S/m} \quad , \quad \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m} \quad , \quad \delta \approx 3\rho.$$

To have the rotor cycling once in 40 time iterations, we impose that the rotation angle at each time step is equal to 9° . In this case we have

$$\delta t = \delta t_1 = \frac{9\pi}{180\omega_1} \approx 0.025 \text{ s}$$

where $\omega_1 = \frac{v_1}{\rho}$. Finally, to accelerate the convergence of the simulation, we have initialized the solution of the magnetodynamic problem (2) with the solution of the magnetostatic one described by equation (2) without the time derivative term.

6.2 Comparing the two approaches

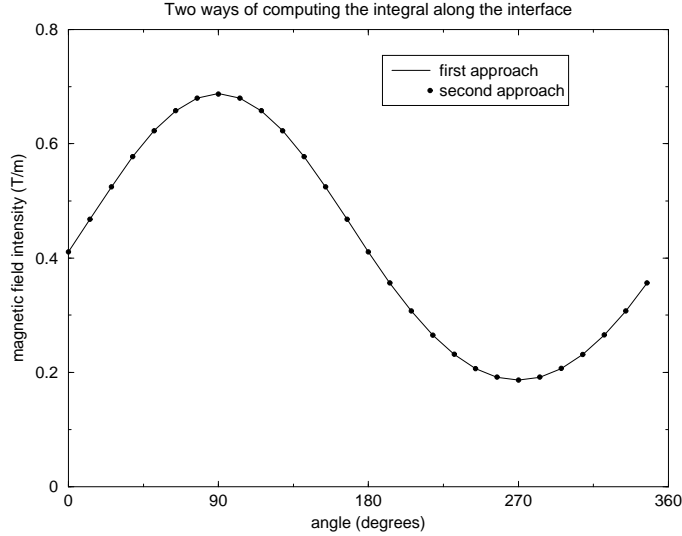


Figure 3: Values of the solution at all the stator mesh nodes on the interface when the elements of the mortar matrix are computed by the two considered techniques.

In Figure 3 are reported the results of the comparison among the two techniques we have adopted to numerically compute the line integrals involved in the mortar matrix construction. Results are obtained on the mesh displayed in Figure 2, with time step $\delta t = \delta t_1$ and supposing the rotor still. Each mesh node on the interface is located by its angle (reported on the x-axis). On the y-axis, we display the values of the computed solution at these nodes. Let us remark that on the interface we have at our disposal two sets of nodes: that of the nodes belonging to the stator mesh and that of the nodes belonging to the rotor mesh. In this case, we have reported the values at the stator mesh nodes: those related to the rotor mesh nodes describe the same curves (as it will be remarked in the next subsection).

By looking at the Figure 3, we can see that the two approaches can not be distinguished from the point of view of the numerical results. Moreover, results confirm that the two approaches have the same order of approximation as proved in the theory.

6.3 Comparing the stationary and the non-stationary cases

In Figure 4, are shown the values of the computed solution at the stator and rotor mesh nodes lying on the interface. Once again, results are obtained on the mesh of Figure 2 with time step $\delta t = \delta t_1$: the rotor is supposed still in one case and moving at speed v_1 in the second case.

Despite the weak imposition of the matching condition, the results show that the numerical solution reproduces a physical one: indeed it looks "continuous" at the interface. Actually, in both cases (fixed and moving configuration) the relative difference between the two sets of field values at the stator and rotor points lying on Γ is less than $5 \cdot 10^{-3}$. Moreover, this qualitative "continuity" is respected even

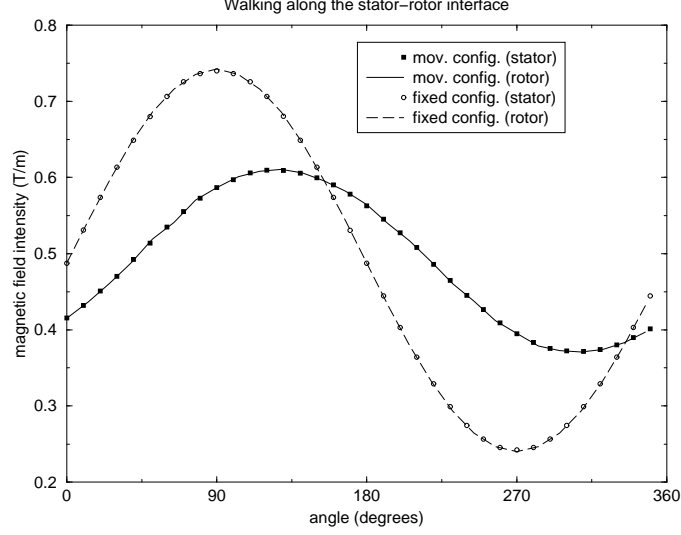


Figure 4: Values of the solution at all the nodes on the interface: the values are computed keeping once the rotor fixed and once rotating.

when the rotor domain is rotating around its center. The intensity of the computed magnetic field at the interface nodes (and in all the other rotor mesh nodes) is lower when the rotor is moving due to the minor penetration of the magnetic field in the moving part (any increase in the rotation speed v implies a decrease in the depth of penetration δ .)

6.4 Accuracy of the method

In this subsection we are going to analyse the accuracy of the proposed method and the simulation parameters, slightly different with those defined in the first section, will be defined later on. Here, we are going to make a quantitative comparison, at the interface Γ , between the "exact solution" (u) and the one (u_h) numerically computed with different meshes and different time steps. The term "exact solution" will refer either to the analytical solution when available (cases 1 and 2 in what follows) or to a solution numerically computed on the finest mesh with the smallest time step (case 3). The spatial error at a fixed instant t is represented by

$$\frac{\|u - u_h\|_{L^2(\Gamma)}}{\|1\|_{L^2(\Gamma)}} \approx \left(\frac{\sum_{\mathbf{a}_k \in \Gamma} |\mathbf{a}_{k+1} - \mathbf{a}_k| (u - u_h)^2(\mathbf{a}_k, t)}{\sum_{\mathbf{a}_k \in \Gamma} |\mathbf{a}_{k+1} - \mathbf{a}_k|} \right)^{1/2} \quad (88)$$

where \mathbf{a}_k are nodes either belonging to $\mathcal{T}_{1,h_1}^\Gamma$ or to $\mathcal{T}_{2,h_2}^\Gamma$. In the first case, $u_h = u_{1,h_1}$, and in the second case, $u_h = u_{2,h_2}$. The temporal error is the maximum for $t \in [0, T]$ of the spatial errors. In the figures which follow, we will draw the logarithm of the spatial error with respect to the logarithm of

the number N of mesh nodes on Γ and the temporal error with respect to the time step (in seconds) with a little difference in the last case. In the following we set $l = L/2$.

To spatially discretize the domain, we now consider different meshes such that the corresponding discretizations of the interface Γ are nested: this means that ($i = 1, 2$)

$$\mathcal{T}_{i,h_i^r}^\Gamma \subset \mathcal{T}_{i,h_i^{r+1}}^\Gamma \quad \text{where} \quad h_i^r = \frac{h_i}{2^r} \quad \text{and} \quad r = 0, 1, 2, 3, 4.$$

and Γ has successively 12, 24, 48, 96, 192 nodes. The number of nodes lying on Γ is denoted by N . In the following, we will use the term "matching grids" to denote a couple of meshes $\mathcal{T}_{i,h_i}^\Gamma$ ($i = 1, 2$) such that $\mathcal{T}_{1,h_1}^\Gamma = \mathcal{T}_{2,h_2}^\Gamma$ and the term "non-matching grids" to denote a couple of meshes such that $\mathcal{T}_{1,h_1}^\Gamma \neq \mathcal{T}_{2,h_2}^\Gamma$. For all values of r , the defined meshes are matching grids: starting from these meshes, we obtain a couple of non-matching grids by simply rotating $\mathcal{T}_{1,h_1}^\Gamma$ with respect to $\mathcal{T}_{2,h_2}^\Gamma$ of a suitable angle.

The method accuracy will be tested in the three following cases:

(case 1) on a magnetostatic problem,

(case 2) on a magnetodynamic problem when the rotor does not move,

(case 3) on a magnetodynamic problem when the rotor moves with a constant angular speed.

(case 1): let us start by considering the magnetostatic problem described by equation (2) without the time derivative term. In this case, we suppose that the source, always represented by a constant magnetic field parallel to the z-axis, has intensity -1 T/m at the bottom and 1 T/m at the top of the stator domain; homogeneous Neumann conditions are considered on the stator vertical boundaries. Due to these assumptions, the magnetic field $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ depends only on the y coordinate and is solution of the following problem

$$\frac{d^2 H}{dy^2} = 0 \quad , \quad H(l) = 1 \quad , \quad H(-l) = -1.$$

So, the (third component of the) analytical (exact) solution of the problem is given by $H(y) = \frac{y}{l}$.

Let us remark that, since the analytical solution belongs to the finite element space, this example allows to quantify the error associated to the mortar element method. In Figure 5 are reported the spatial errors when the numerical solution u_h is computed on differently meshes that in one case match and in the other do not match at the interface. These errors are given by expression (88) in which the temporal variable has been neglected. Looking to Figure 5, we note that, in the logarithm scale, the spatial errors depend linearly on the number of mesh nodes on Γ . Moreover, the displayed lines has angular coefficient equal to one confirming the first order of the proposed method.

In the matching case, the error should be equal to zero. Its non-zero value is due to the fact that the element of the coupling matrix Q are computed by using the first approach described in Section 5.1.

(case 2): let us consider the magnetodynamic problem described by equation (2) and we suppose that the rotor does not move. In this case, the source is represented by a sinusoidal magnetic field parallel to the z-axis, with intensity is -1 T/m the bottom and 1 T/m at the top of the stator domain; homogeneous Neumann conditions are considered on the stator vertical boundaries. Due to these assumptions, the magnetic field $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ depends only on coordinates y and t and is solution of the following problem

$$\begin{cases} \sigma \mu \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \\ H(l, t) = \cos(\omega t) \quad , \quad H(-l, t) = -\cos(\omega t) \quad , \quad \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

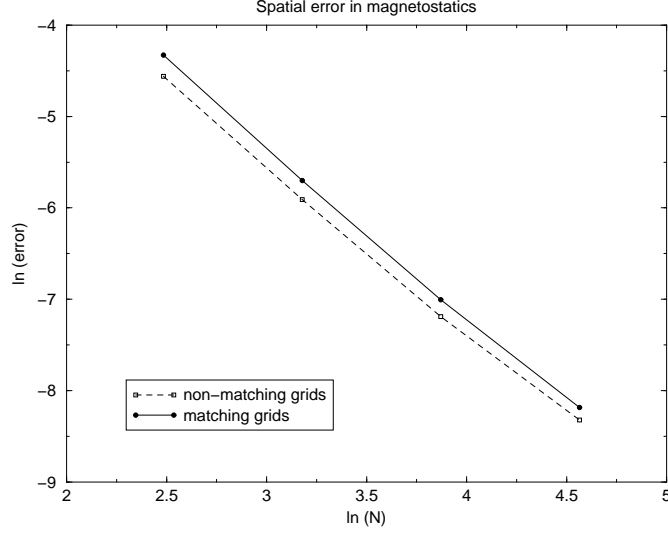


Figure 5: Spatial error (case 1): the matching and not-matching cases are compared.

In this example we have chosen the source frequency $f = 1$ Hz ($\omega = 2\pi$ rad/s) and the final instant $T = 2$ s. The (third component of the) analytical (exact) solution of the problem is given by

$$H(y, t) = \text{Real} \left\{ \frac{\sinh(\lambda y)}{\sinh(\lambda l)} e^{i\omega t} \right\}, \quad \lambda = \frac{(1+i)}{\delta}.$$

In Figure 6 are reported the temporal errors when the numerical solution u_h is computed on the finest mesh with different time steps, both in the matching and non-matching cases. The considered time steps (in seconds) are

$$\delta t = \frac{\delta t_1}{10^{2^s}} \quad \text{and} \quad s = 0, 1, 2, 3.$$

Since on Γ the mesh size is small, the temporal error of the non-matching case does not significantly differ from that of the matching case. Moreover, both the errors depend linearly on the time step.

In Figure 7 are reported the spatial errors when the numerical solution u_h is computed with the smallest time step (corresponding to $s = 3$) on different meshes that in one case match and in the other do not match at the interface. In the logarithm scale, the spatial errors depend linearly on the number of mesh nodes on Γ .

Let us remark that, in both Figures 6 and 7, the fact that the two lines are almost parallel implies that the order of the conforming and non-conforming method is the same. In addition, it has to be noted that the constant contained in the error estimate related to the non-matching case is close to the constant contained in the error estimate related to the matching case since the two lines are very close.

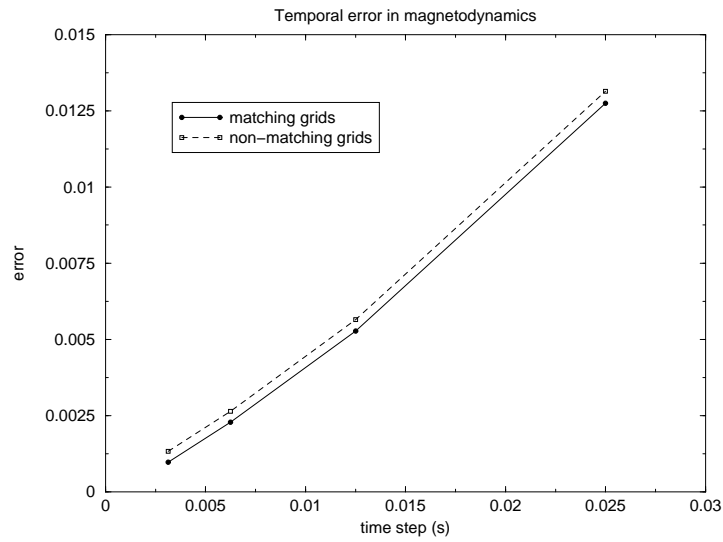


Figure 6: Temporal error computed on the finest mesh (case 2): the matching and not-matching cases are compared.

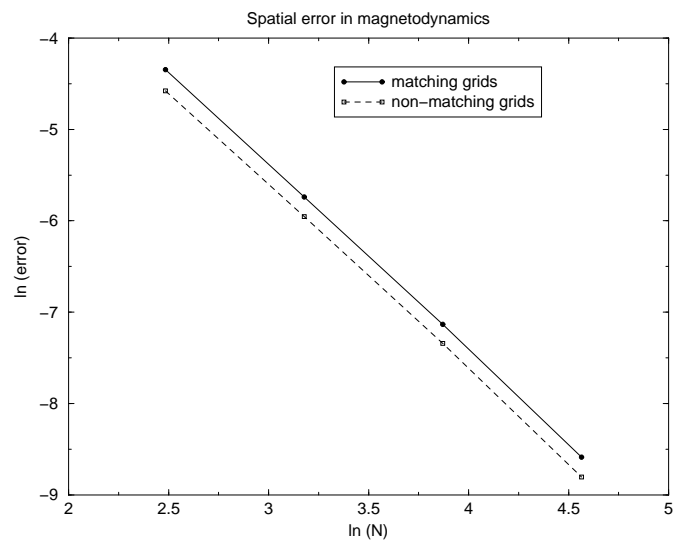


Figure 7: Spatial error computed with the smallest time step (case 2): the matching and not-matching cases are compared.

(case 3): let us consider the magnetodynamic problem described by equation (2) with the same conditions of case 1. The exact solution is not known analitically but computed numerically on the finest mesh with the smallest time step defined below. In this third case, the rotor will move at a constant speed. The rotation angle is chosen so that the finest rotor mesh is always matching with the stator finest one at the nodes lying on Γ . In this way, we get rid of the numerical error due to the geometric non-conformity while computing the exact solution.

The computation of the spatial and temporal errors rely on different choices of the simulation parameters which are connected to the rotor movement. Since we want to analyse the influence of the rotor movement on the accuracy of the method, we will consider two different tangential speeds: $v' \approx 10v_1$ and $v'' \approx 100v_1$ with v_1 defined in section 1.

Spatial error parameters - During the numerical tests for the spatial error, we impose that the rotation angle at each time step is equal to 7.5° . This angle is chosen so that the finest rotor mesh (obtained with $r = 4$) is, at each rotation, always matching with the finest stator one in all the nodes lying on Γ ; the smallest angle that allows for this geometric conformity at $r = 4$ is $360^\circ/192 = 1.875^\circ$. Since we use a rotation angle that is four times bigger than 1.875° , the geometric conformity is also preserved for $r = 2$ and $r = 3$. For $r = 0$ and $r = 1$, instead, we loose the geometric conformity. In relation to the chosen rotation angle, the correct time step for the tangential speed v' is $\delta t = \delta t_1/10 \approx 0.0025$ s and for v'' it is $\delta t = \delta t_1/100 \approx 0.00025$ s.

Temporal error parameters - To get the temporal error, we compute the numerical solution on the finest mesh ($r = 4$ for both domains) with different time steps. Two rotation velocities are considered, v' and $v'' = 10v'$.

Results on the spatial and temporal errors related to the chosen rotation speeds are contained in Figures 9 and 8. The time interval where the transitional effects take place varies with the rotation speed and it is difficult to localize it within the simulation interval. For these reasons, we have computed the error when the steady-state configuration is achieved. Moreover, at the steady-state configuration, the distribution of the values of the magnetic field as well as of the current density does not depend on time.

The spatial error associated to v'' behaves as the spatial error related to v' : its smaller (absolute) values are due to the fact that the faster the rotor moves, the smaller the magnetic field values at the interface are (as it was observed in Figure 4). As explained before, for $r = 0$ and $r = 1$ we deal with non-matching grids: despite this, in Figure 9 we can see that the corresponding error values lie on a straight line. Moreover, at the rotation speed v'' the constant in the error estimate related to the non-conforming case is not much bigger than that in the same error estimate at speed v' .

Since for both experiments we obtain straight lines, the first order of the method is actually numerically verified.

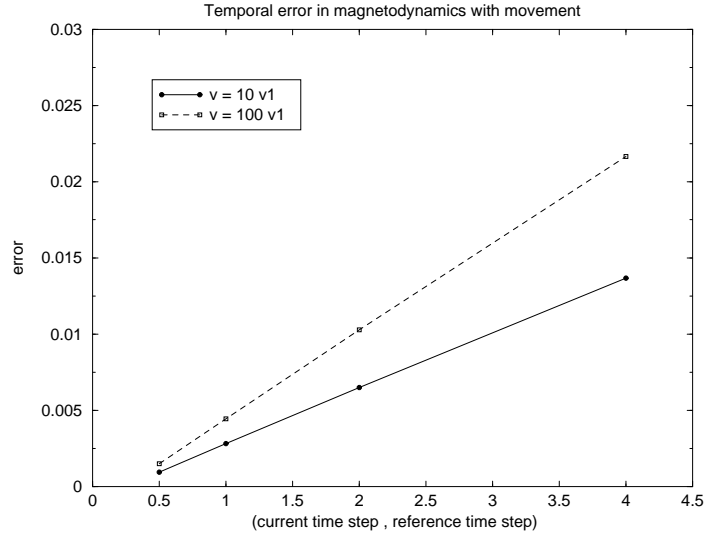


Figure 8: Temporal error computed on the finest mesh (**case 3**) when the rotor moves at constant speed: for v' the reference time step is $\delta t_1/10$ and for v'' the reference time step is $\delta t_1/100$.

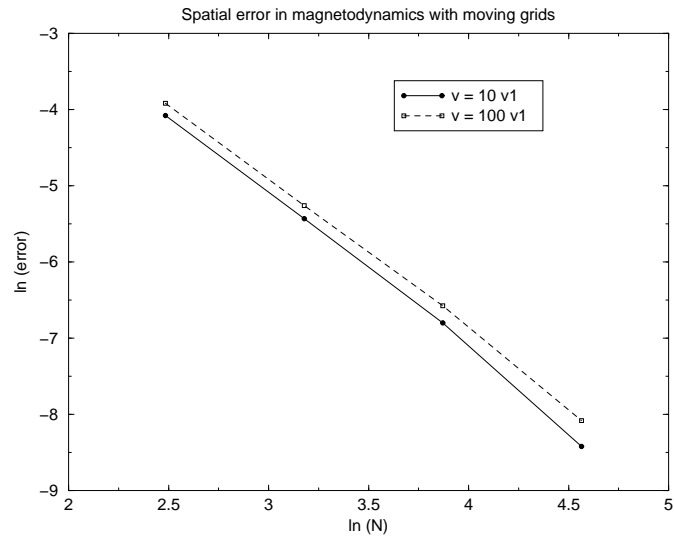


Figure 9: Spatial error computed with the smallest time step (**case 3**): the rotor moves at two different constant angular speeds.

Concerning Figure 8, the temporal errors are plotted with respect to the ratio between the current time step and the reference one (obtained with $s = 0$ at both speeds). This choice comes from the wish of drawing in the same graph the errors related to different speeds which are characterized by different time step scales. In both cases, the temporal error behaves linearly with respect to the time step.

6.5 A realistic simulation

In the previous section the physical interpretation of the numerical results was not the point. The tests have been done in order to give qualitative and quantitative “support” to the theory developed at the beginning of the paper. The aim of this section is to use the mortar tool to analyse a more realistic situation.

The simulation of the induced currents propagation into the domain represented in Figure 2(left), is characterized by two intervals: a first one during which the rotor is kept fixed and the magnetic field invades the whole domain with a constant gradient and a second one in which the rotor moves around its axis. Both intervals are important and the simulation parameters have to be chosen in such a way that these periods are respected. Taking care of this aspect, we can analyse the effect of the rotor movement on the established magnetic field distribution, avoiding wrong interpretations of the numerical results. Another important point is to understand what means to accelerate the rotor movement. The acceleration of the rotor movement is not obtained increasing the angle of which the rotor turns at each time step but decreasing the time step itself. This is more natural as regard the error bound.

The numerical results displayed in Figure 10 are obtained in the first case (left) by considering $nit_1 = 800$ time iterations with time step of length $\delta t' = 0.25 \cdot 10^{-3}$ s and keeping the rotor rotating with speed $v' = 0.63 \cdot 10^3$ rad/s. In the second case (right) we accomplish $nit_2 = 8000$ time iterations ($nit_2 = 10 nit_1$) with time step of length $\delta t'' = 0.25 \cdot 10^{-4}$ s ($\delta t_2 = \delta t_1/10$) and the rotor is rotating with speed $v'' = 0.63 \cdot 10^4$ rad/s ($v'' = 10 v'$). We have then that the rotor moves of 9° in the first case and of 90° in the second one, each time step $\delta t'$.

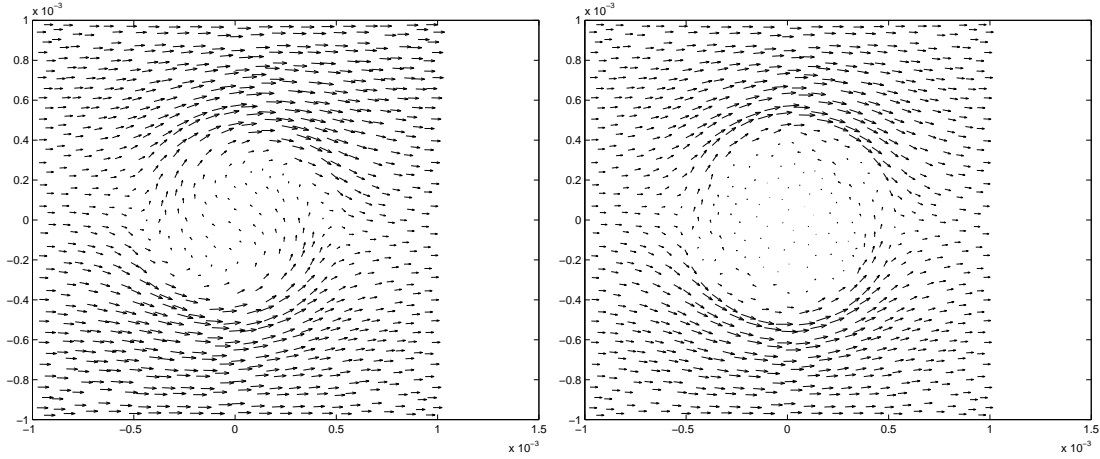


Figure 10: Effect of the rotor movement on the current density distribution. Steady state configurations with the rotor moving at $v' = 0.63 \cdot 10^3$ rad/s (left) and $v'' = 10 v'$ (right).

In Figure 10 can be seen the effects of the rotor movement on the current density distribution:

each arrow represents the current density vector at an element barycenter. Looking at Figure 10, we remark that the faster the rotor moves, the more the currents circulate in the stator domain while in the rotor domain they concentrate near the sliding interface forming a limit layer.

Moreover, in the rotor domain, the current density distribution is such to create an angular momentum that contrasts the rotation: this contrasting effect increases with the rotation speed.

At the web address <http://www.asci.fr/Francesca.Rapetti/figures.html> is available an animation that reproduces at each time step the computed magnetic field distribution, starting from an linear one. When the rotor starts moving, a transient phenomenon takes place; soon after, the transient solution lets the way to a steady-state one. We can see a similarity between this problem and the heat one when the solution is computed in a domain with a moving part.

Further results on the influence of the rotor movement on the currents distribution as well as on the power losses in dependence of the rotor angular speed are presented in [26].

Acknowledgments

The authors thank Prof. Alain Bossavit, Prof. Frederic Bouillault and Prof. Adel Razek for their disponibility and helpful suggestions. This work has the financial support of the European Community (TMR Contract number ERB4001GT965424), of I.A.N.-C.N.R. (Italy) and of C.N.R.S. (France).

References

- [1] R. ADAMS, Sobolev spaces, Academic Press, 1975.
- [2] R. ALBANESE, G. RUBINACCI, *Formulation of the eddy-current problem*, IEE proceedings, Vol. 137, Pt. A, No. I, pp. 16–22, 1990.
- [3] G. ANAGNOSTOU, Y. MADAY, A.T. PATERA, *A sliding mesh method for partial differential equations in nonstationary geometries: application to the incompressible Navier-Stokes equations*, technical report of the Laboratoire d'Analyse Numérique (Paris VI), R91024, 1991.
- [4] F. BEN BELGACEM, Y. MADAY, *Nonconforming spectral element methodology tuned to parallel implementation*, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 116, pp. 59-67, 1994.
- [5] F. BEN BELGACEM, Y. MADAY, *The mortar element method for three dimensional finite elements*, technical report of the Laboratoire d'Analyse Numérique (Paris VI), R95036, 1995.
- [6] C. BERNARDI, *Optimal finite element interpolation on curved domains*, SIAM J. Num. Anal., 26, pp. 1212–1240, 1989.
- [7] C. BERNARDI, Y. MADAY, A.T. PATERA, *A new nonconforming approach to domain decomposition: the mortar element method*, Nonlinear partial differential equations and their applications, Collège de France Seminar, Pitman, pp. 13–51, 1990.
- [8] C. BERNARDI, V. GIRAULT, *A local regularization operator for triangular and quadrangular finite elements*, technical report of the Laboratoire d'Analyse Numérique (Paris VI), R95036, 1995.
- [9] A. BOSSAVIT, Electromagnétisme en vue de la modélisation, Springer-Verlag, France, 1986.
- [10] A. BOSSAVIT, *Calcul des courants induits et des forces électromagnétiques dans un système de conducteurs mobiles*, RAIRO, M^2AN , 23, pp. 235-259, 1989.

- [11] A. BOSSAVIT, *Le calcul des courants de Foucault en dimension 3, avec le champ électrique comme inconnue. I: Principes*, Revue Phys. Appl., 25, pp. 189–197, 1990.
- [12] F. BOUILLAUT, Z. REN, A. RAZEK, *Modélisation tridimensionnelle des courants de Foucault à l'aide de méthodes mixtes avec différentes formulations*, Revue Phys. Appl., 25, pp. 583–592, 1990.
- [13] D. BRAESS, . DAHMEN, *Stability estimates of the mortar finite element method for 3-dimensional problems*, East-West J. Numer. Math., (to appear), 1998.
- [14] C.J. CARPENTER, *Comparison of alternative formulations of 3-dimensional magnetic-field and eddy-current problems at power frequencies*, IEE proceedings, Vol. 124, No. II, pp. 1026–1034, 1977.
- [15] P. CIARLET, The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [16] R. DAUTRAY, J. LIONS, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, vol. 1, Modèles physiques, Masson, 1987.
- [17] B. DAVAT, Z. REN, M. LAJOIE-MAZENC, *The movement in field modeling*, IEEE, Trans. on Magn., 21, pp. 2296–2298, 1985.
- [18] C.R.I. EMSON, C.P. RILEY, D.A. WALSH, K. UEDA, T. KUMANO, *Modelling eddy currents induced by rotating systems*, IEEE, Trans. on Magn., 34, pp. 2593–2596, 1998.
- [19] Y. GOLDMAN, P. JOLY AND M. KERN, *The electric field in the conductive half-space as a model in mining and petroleum prospection*, Math. Meth. Appl. Sci., 11, 1989.
- [20] J.D. JACKSON, Classical Electrodynamics, New York, NY: Wiley, 1952.
- [21] S. KURZ, J. FETZER, G. LEHENR, W.M. RUCKER, *A novel formulation for 3D eddy current problems with moving bodies using a Lagrangian description and BEM-FEM coupling*, IEEE, Trans. on Magn., 34, pp. 3068–3073, 1998.
- [22] R. LEIS, Initial boundary value problems in mathematical physics, John Wiley and Sons, 1986.
- [23] Y. MARECHAL, G. MEUNIER, J.L. COULOMB, H. MAGNIN, *A general purpose for restoring inter-element continuity*, IEEE, Trans. on Magn., 28, pp. 1728–1731, 1992.
- [24] A. NICOLET, F. DELINCÉ, A. GENON, W. LEGROS, *Finite elements-boundary elements coupling for the movement modeling in two dimensional structures*, J. de Phys.III, 2, pp. 2035–2044, 1992.
- [25] A. QUARTERONI, A. VALLI, Numerical Approximation of Partial Differential Equations, vol. 23 of Series in computational mathematics, Springer-Verlag, Germany, 1993.
- [26] F. RAPETTI, L. SANTANDREA, F. BOUILLAUT, A. RAZEK, *Calculation of eddy currents in moving structures using a finite element method on non-matching grids*, COMPEL, vol.19, n.2, pp. 10-29, 2000.
- [27] A. RAZEK, J. COULOMB, M. FELLIACHI, J. SABONNADIÈRE., *Conception of an air-gap element for dynamic analysis of the electromagnetic fields in electric machines*, IEEE, Trans. on Magn., 18, pp. 655–659, 1982.
- [28] D. RODGER, H.C. LAI, P.J. LEONARD, *Coupled elements for problems involving movement*, IEEE, Trans. on Magn., 26, pp. 548–550, 1990.

- [29] V. THOMÉ, Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems, Springer Series in Computational Mathematics, 25, Springer, 1997.
- [30] O.B. WIDLUND, *An extension theorem for finite element spaces with three applications*, Numerical Techniques in Continuum Mechanics, 16, Friedr. Vieweg e Sohn, 1986.

6.2 *Article 2* – Calculation of eddy currents in moving structures using a finite element method on non-matching grids

par *F. Rapetti, L. Santandrea, F. Bouillault, A. Razek*

Int. J. for Comp. and Math. in Electric and Electronic Engng. (COMPEL),
Vol.19, No.1, pp. 10-29 (2000).

Calculation of eddy currents in moving structures using a finite element method on non-matching grids

F. RAPETTI L. SANTANDREA F. BOUILLAUT A. RAZEK

Abstract

This paper deals with the numerical simulation of eddy current distributions in non-stationary geometries with sliding interfaces. We study a system composed of two solid parts: a fixed one (stator) and a moving one (rotor) which slides in contact with the former. We also consider a two dimensional mathematical model based on the transverse electric formulation of the eddy current problem whose approximation is performed via the *mortar element method* combined with the standard linear finite element discretization in space and an implicit first order Euler scheme in time. Numerical results underline the influence of the rotor movement on the current distribution and give an estimate of the power losses with respect to the rotor angular speed.

Key words. eddy current problem, moving structures, finite element approximation on non-matching grids, domain decomposition method

Introduction

The computation of the space and time distribution of the induced currents in electromagnetic systems is of great importance for performance prediction and device design. Generated in conducting materials, their effects are positive in induction engines for propulsion forces but negative in transformers for energy losses in heat form.

The subject of our research activity is the development of simulation tools to effectively predict the induced current distribution in non-stationary geometries with sliding interfaces. In this paper we will study the flux of currents in a domain composed of two solid parts, one (rotor) rotating in sliding and electric contact with the other (stator).

In order to treat the unusual case of an electric sliding contact, we consider a two dimensional mathematical model, based on the *transverse electric formulation* of the eddy current problem (Bossavit, 1986). As we aim to underline the effect of the rotor movement on current distribution, we will work in the time domain. Since Maxwell equations are naturally stated in Lagrangian variables, we choose this system to avoid the presence of a convective term in our equations. Moreover, a first order discretization based on the finite element approximation in space and an implicit Euler scheme in time, is proposed.

The method we are going to describe in this paper, can be applied with no modification to the transverse magnetic formulation of the considered problem. As an example, in Bouillault *et al.*, 1999, the modified magnetic vector potential has been adopted as primary variable to study the behaviour of a magneto-mechanical system.

The use of a standard conforming Galerkin method is not recommended when a part of the geometry is moving with great amplitude with respect to the rest. Due to element distortion, a partial or total re-meshing of the computational domain may be necessary. Generally, the re-meshing process and, most

of all, the interpolation of the unknowns at the new nodes increase the computational cost of numerical simulations. Some techniques that minimize this cost have already been analyzed: see, for example, the macro-element method (Razek *et al.*, 1982) and the finite element-boundary element coupling (Nicolet *et al.*, 1992), involving matrices that are no more sparse. These successful methods for accounting the movement in two dimensions, become unacceptable in three dimensions. Similarly, the moving layer method (Davat *et al.*, 1985), based on the air-gap re-meshing for each new rotor position, becomes complex and expensive when applied in three dimensional simulations. Other approaches rely on the use of Lagrangian multipliers (Rodger *et al.*, 1990 and Marechal *et al.*, 1992) leading to solve a final algebraic system with a non definite matrix. The overlapping elements method (Tsukerman, 1992) involves the computation of the intersection area between two meshes, a complex task when dealing with two or three dimensional triangular grids. In the “lock-step” technique (Emson *et al.*, 1998) the time step is defined depending on the rotation speed and element size on the slip surface.

None of the previous methods is simultaneously characterized by involving sparse and definite matrices, avoiding re-meshing and difficult intersection procedures, imposing no constraint between the time step and the element size on the slip surface. In this paper, we will present a method that has all these features; moreover, it turns out to be robust, accurate and can be also applied to systems with air-gap.

As it has been proposed in Buffa *et al.* (1999), we consider a non-conforming (in space) approximation of the eddy current problem based on the so called *mortar element method* (Bernardi *et al.*, 1990 and Anagnostou *et al.*, 1991). This method allows the use of non-matching grids at the interface between the stator and rotor domain. The coupling between the two domains is based on classical Lagrangian multiplier interface constraints: it incorporates the explicit construction of an appropriate non-conforming space approximation through the introduction of a new intermediary mortar trace space. In particular, the matching constraint at the interface (that is the transmission condition between the two domains) is weakly imposed by means of suitable functions defined on the interface (known in literature as mortar functions) and an appropriate variational operator. The possibility of using a sliding mesh method allows us to deal with the whole mesh composed of a fixed and a rotating part, without imposing heavy constraints between the mesh element size h at the interface and the rotation angle associated with each time step. Loosely speaking, the discretizations of the interface induced by the stator and the rotor meshes do not need to coincide after each fixed-angle rotation of the rotor.

In this paper we focus the attention on the implementation aspects of the proposed method and we refer the reader to Buffa *et al.* (1999) for the mathematical proof of the well-posedness of the continuous problem as well as for the convergence analysis and error estimate.

Concerning the organization of the paper, in Section 1 we deduce the model from the system of Maxwell equations and the variational formulation of the problem is developed. In Section 2, we discuss the spatial discretization by introducing the mortar element method and present the time discretization, whereas in Section 3, we describe the most important implementation aspects of the method. Finally, Section 4 provides some numerical results.

The continuous problem

In this section, we present the mathematical model of the problem we are going to study, by expressing it in three sequential formulations. The first formulation is classical and follows from Maxwell equations; the second is a more appropriate version of the first one when dealing with moving geometries and, the last is the variational form of the second for the finite element approximation.

Classical formulation

Let \mathcal{D} be a Lipschitz open set in \mathbf{R}^3 . We fix on it a system of cartesian coordinates, say (x, y, z) and we suppose that \mathcal{D} is infinitely long in the z direction. Moreover, we assume that any (x, y) section of \mathcal{D} is invariant with respect to z (\mathcal{D} is a cylinder). Mathematically speaking we have that all sets $\Omega_{\bar{z}} = \mathcal{D} \cap \{z = \bar{z}\}$ do not depend on the chosen values of \bar{z} and we will denote by Ω one of these sets. Using the bold style to denote vectors, Maxwell equations in \mathcal{D} for industrial frequencies, where the displacement currents are neglected, read as follows:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \mathbf{curl}(\mathbf{E}) = -\frac{\partial(\mu \mathbf{H})}{\partial t} && \text{in } \mathcal{D} \\
 (b) \quad & \mathbf{curl}(\mathbf{H}) = \sigma \mathbf{E} && \text{in } \mathcal{D} \\
 (c) \quad & \text{div}(\mu \mathbf{H}) = 0 && \text{in } \mathcal{D} \\
 (d) \quad & \text{initial conditions} && \text{in } \mathcal{D} \\
 (e) \quad & \text{boundary conditions} && \text{on } \partial\mathcal{D}
 \end{aligned} \tag{1}$$

In (1), \mathbf{E} and \mathbf{H} are the electric and magnetic fields, μ is the magnetic permeability and σ the electric conductivity. We assume that μ and σ are scalar functions, not tensors, and that they respect the symmetry of the domain ($\mu(x, y, z) = \mu(x, y)$, $\sigma(x, y, z) = \sigma(x, y)$).

It is to be mentioned that equations (1) allow the computation of the field \mathbf{H} everywhere in Ω but they do not allow to univoquely compute the field \mathbf{E} in the non conducting regions. For the well posedness of the problem, we suppose that there exists a $\bar{\mu}$ such that $\mu \geq \bar{\mu} > 0$ and $\sigma > 0$ in Ω .

Thanks to its symmetry and under the previous hypotheses, problem (1) can be reduced to a scalar one. Assuming that $\mathbf{E} = (E_x(x, y, t), E_y(x, y, t), 0)$ it can be derived from equation (1)(a) that \mathbf{H} takes the form $\mathbf{H} = (0, 0, H(x, y, t))$. The elimination of \mathbf{E} in (1)(a) by means of equation (1)(b), results in

$$\frac{\partial(\mu H)}{\partial t} - \text{div}(\sigma^{-1} \text{grad}(H)) = 0. \tag{2}$$

Equation (2) has a unique solution under suitable boundary conditions. The magnetic field, obtained by solving equation (2), is then inserted into equation (1)(b) to compute the electric field.

Moving geometries formulation

When dealing with moving structures, it is more useful to write (2) in a transmission form. By choosing Lagrangian variables, the movement is expressed by time dependent transmission conditions.

We work in Ω , a bounded open subset of \mathbf{R}^2 . Let the rotor domain Ω_1 be a subset of Ω and O a point in it such that $\Gamma := \partial\Omega_1$ is a circle with centre O . We denote by Ω_2 the stator domain $\Omega \setminus \Omega_1$.

We call $r_t : \Omega_1 \rightarrow \Omega_1$ the rotation operator at time t which rotates the domain Ω_1 with angle $\theta = \omega t$, ω being the given rotation speed, and r_{-t} the inverse operator. We denote by $\Omega_1(t) := r_t\Omega_1(0)$: we remark that the set is always the same, but, this equality has to be seen as a change in the system of coordinates which is naturally defined in Ω_1 . Since Maxwell equations are formulated in Lagrangian variables, set $\Omega(0) = \Omega_1(0) \cup \Omega_2$, the most natural choice is to look for a function $u : \Omega(0) \times [0, T[\rightarrow \mathbf{R}$ which is the third magnetic field component in Lagrangian variables: this means that $u(\mathbf{x}, t)$ is the value at time t of the magnetic field associated to the *material* point which was in \mathbf{x} at $t = 0$. From now on we will denote u by a couple (u_1, u_2) , where u_i is the restriction of u to Ω_i ($i=1,2$). Equation

(2) can be rewritten as

$$\begin{aligned}
(E_i) \quad & \frac{\partial(\mu u_i)}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \operatorname{div}(\sigma^{-1} \operatorname{grad}(u_i))(\mathbf{x}, t) = 0 && \text{in } \Omega_i, i = 1, 2 \\
(TC_1) \quad & u_1(r_{-t} \mathbf{x}, t) = u_2(\mathbf{x}, t) && \text{on } \Gamma \\
(TC_2) \quad & \sigma^{-1}(r_{-t} \mathbf{x}) \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}}(r_{-t} \mathbf{x}, t) = \sigma^{-1}(\mathbf{x}) \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) && \text{on } \Gamma \\
(BC) \quad & u(\mathbf{x}, t) = u_d(\mathbf{x}, t) \text{ on } \Gamma_D, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ on } \Gamma_N && \text{on } \partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \\
(IC) \quad & u(\mathbf{x}, 0) = 0 && \text{in } \Omega_1 \cup \Omega_2
\end{aligned} \tag{3}$$

where the partial differential equation (E_i) is in the sense of distributions in Ω_i ($i=1,2$), $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ is, at every $\mathbf{x} \in \Gamma$, the normal unit vector outward to Ω_2 and u_d is a known function. The case with more general boundary conditions can be treated by means of the same tools.

The transmission conditions (TC_1) and (TC_2) respectively describe the conservation of the tangential component of the magnetic and electric fields across the sliding interface Γ . In these conditions, function u_1 as well as its normal derivative are considered at the point $(r_{-t} \mathbf{x}, t)$ because the problem is solved in the system configuration at time $t = 0$.

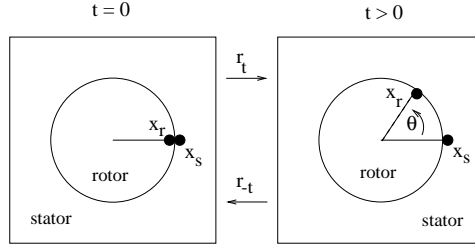


Figure 1: In the moving geometries formulation, the system configuration at time $t = 0$ is taken as reference configuration for the problem solution: at time $t > 0$, the rotor domain has rotated with an angle $\theta = \omega t$ and we go back to the reference configuration thanks to the operator r_{-t} . In particular, $\mathbf{x}_r(t) = r_t(\mathbf{x}_r(0))$ and $\mathbf{x}_r(0) = r_{-t}(\mathbf{x}_r(t))$.

In a more detailed way, let \mathbf{x} be a point on Γ denoted as \mathbf{x}_s when seen from the stator domain and \mathbf{x}_r when seen from the rotor domain (as shown in Figure 1). At time $t = 0$, \mathbf{x}_s and \mathbf{x}_r are materially equal. At time $t > 0$, \mathbf{x}_r has rotated with an angle $\theta = \omega t$ and in front of \mathbf{x}_s there is another material rotor point. Since we always refer to the initial configuration $\Omega(0)$, we have to consider the (TC_1) and (TC_2) left hand sides evaluated at $(r_{-t} \mathbf{x}_r, t)$.

Variational formulation

To apply the finite element method to our problem we first have to write (3) in a variational form. Let us introduce the following time dependent functional space

$$\mathcal{U}(t) = \{u := (u_1, u_2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2) \mid u_1(r_{-t} \mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in \Gamma\}. \tag{4}$$

For every fixed value of t , $\mathcal{U}(t)$ is a closed subspace of $H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$ and so an Hilbert space with the natural norm $\|u\|_{\mathbf{x}}^2 = \|u_1\|_{1,\Omega_1}^2 + \|u_2\|_{1,\Omega_2}^2$.

In the following, \mathcal{U} stands for $\mathcal{U}(t)$ and a similar notation will be applied to any functional space related to \mathcal{U} . Moreover we denote by $\mathcal{U}^0 = \{u \in \mathcal{U} \mid u|_{\Gamma_D} = 0\}$ and by $\mathcal{U}^d = \{u \in \mathcal{U} \mid u|_{\Gamma_D} = u_d\}$. By classical reasoning the following variational formulation in the sense of distributions, is obtained

$$\text{Find } u(\cdot, \cdot) \in L^2(0, T, \mathcal{U}^d) \cap C^0(0, T, L^2(\Omega)) \text{ such that} \quad (5)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\mu u)}{\partial t} v \, d\Omega + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \sigma^{-1} \operatorname{grad}(u_i) \cdot \operatorname{grad}(v_i) \, d\Omega = 0 \quad \forall v = (v_1, v_2) \in \mathcal{U}^0.$$

The discrete problem

The continuous problem has been proved to be well-posed in Buffa *et al.* (1999) and we now discretize it in space by a finite element method and in time by a finite difference scheme. For the spatial discretization, the use of a standard Galerkin method, makes the time depending transmission condition (TC_1) in (3) be exactly verified. Unfortunately, this process is computationally very demanding, since it is necessary to modify the mesh at every time step or impose a constraint between the temporal and spatial discretization step.

Herein, the non-conforming approximation proposed and mathematically analysed by Buffa *et al.* (1999) is applied to problem (5): non-matching grids at every time step are used and the transmission condition is weakly imposed by means of a mortar element method technique (Bernardi *et al.*, 1990).

Spatial discretization

Let \mathcal{T}_{i,h_i} be a family of triangulations of Ω_i ($i=1,2$), with $h_i = \max\{\operatorname{diam}(K) \mid K \in \mathcal{T}_{i,h_i}\}$. We assume that they are regular in the sense of Ciarlet (Ciarlet, 1978 and Quarteroni *et al.*, 1993), non-matching at the interface Γ . It can a priori happen that $h_1 \neq h_2$.

With curved geometries we need to introduce non-affine finite element spaces. According to Ciarlet (1978), we denote by \hat{K} the reference triangle and for every $K \in \mathcal{T}_{1,h_1} \cup \mathcal{T}_{2,h_2}$ we define the application $F_K : K \rightarrow \hat{K}$. Thanks to the regularity of Γ it is easy to see that all these applications are regular and invertible. We introduce the following spaces of finite elements (with k_1 and k_2 two non negative integers)

$$X_{i,h_i} = \{v_{i,h_i} \in C^0(\overline{\Omega_i}) \mid v_{i,h_i}|_{\Gamma_D} = 0 \quad \text{and} \quad v_{i,h_i}|_K \circ F_K^{-1} \in \mathcal{P}_{k_i}(\hat{K}) \quad \forall K \in \mathcal{T}_{i,h_i}\} \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

In order to weakly impose the transmission condition (TC_1) , we have to define a suitable space of mortar functions. We denote by $\mathcal{T}_{i,h_i}^\Gamma$ the discretization of Γ obtained by taking the traces of \mathcal{T}_{i,h_i} on Γ . For every $K \in \mathcal{T}_{2,h_2}$ adjacent to Γ , we denote by $e = \overline{K} \cap \Gamma$ and $f_e = F_K|_\Gamma$. We choose the space of mortar functions as

$$M_h = \{\varphi_h \in C^0(\Gamma) \mid \varphi_h|_e \circ f_e \in \mathcal{P}_{k_2}([0, 1]) \quad \forall e \in \mathcal{T}_{2,h_2}^\Gamma\} \quad (7)$$

where $h = \max\{h_1, h_2\}$. In the mortar element method terminology, this means that we choose the rotor as *master* and the stator as *slave*. The definition of M_h involving $\mathcal{T}_{1,h_1}^\Gamma$ gives a different but similar method. According to Anagnostou *et al.* (1991), at every fixed time t , we define the following approximation space

$$\mathcal{U}_h = \{v_h = (v_{1,h}, v_{2,h}) \in X_{1,h} \times X_{2,h} \quad \text{such that} \quad \int_{\Gamma} (v_{1,h}(r-t\mathbf{x}) - v_{2,h}(\mathbf{x})) \varphi_h(\mathbf{x}) \, d\Gamma = 0 \quad \forall \varphi_h \in M_h\}. \quad (8)$$

The time dependent constraint (8) is the discrete weak version of the transmission condition (TC_1) in the continuous problem (3). Let us introduce $\mathcal{U}_h^0 = \{v_h \in \mathcal{U}_h \mid v_h|_{\Gamma_D} = 0\}$ and $\mathcal{U}_h^d = \{v_h \in \mathcal{U}_h \mid v_h|_{\Gamma_D} = u_d\}$; we now look for a solution of the following variational problem

$$\text{Find } u_h(\cdot, \cdot) \in L^2(0, T, \mathcal{U}_h^d) \cap C^0(0, T, L^2(\Omega)) \text{ such that :} \quad (9)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\mu u_h)}{\partial t} v_h d\Omega + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \sigma^{-1} \text{grad}(u_{i,h}) \cdot \text{grad}(v_{i,h}) d\Omega = 0 \quad \forall v_h \in \mathcal{U}_h^0.$$

For the approximation properties of the family of discrete spaces $\mathcal{U}_h^0, \mathcal{U}_h^d$ and for the coercivity of the involved bilinear form with respect to the norm $\|\cdot\|_*$, we refer to Bernardi *et al.* (1990).

Temporal discretization

The second step in the approximation of problem (5) is its temporal discretization in the interval $[0, T]$ with $T > 0$. Let Δt be the time step and N an integer such that $T = N\Delta t$. Since the time discretization of the temporal derivative also involves a time “discretization” of the resolution spaces and test functions, we will simplify our notation in the following way:

$$t^n = n \Delta t \quad , \quad v_h^n = v_h(t^n) \quad , \quad \mathcal{U}_h(n) = \mathcal{U}_h(t^n).$$

By applying a first order implicit Euler scheme, our fully discrete problem becomes

$$\forall n = 0..N-1, \quad \text{find } u_h^{n+1} \in \mathcal{U}_h^d(n+1) \text{ such that } \forall v_h^{n+1} \in \mathcal{U}_h^0(n+1) : \quad (10)$$

$$\int_{\Omega} \mu \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} v_h^{n+1} d\Omega + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \sigma^{-1} \text{grad}(u_{i,h}^{n+1}) \cdot \text{grad}(v_{i,h}^{n+1}) d\Omega = 0.$$

Implementation aspects

Concerning the spatial discretization, we have presented the correct finite element framework for curved geometries. Now we analyse the most interesting implementation aspects of the method when standard P_1 finite elements are used in both domains: the involved finite element spaces are affine as well as the applications $F_K : K \rightarrow \hat{K}$. We focus our attention on the numerical treatment of constraint (8), involved in the definition of a basis for space \mathcal{U}_h^0 , and on the matrix form of problem (10).

A basis for space \mathcal{U}_h^0

To rewrite problem (10) in a matrix form, we need to construct a basis of the approximation space \mathcal{U}_h^0 : this construction involves a set of linear systems whose solutions represent the columns of a matrix called Q . The matrix Q allows us to couple at the interface the information coming from the stator and rotor domains and hence its construction is a crucial point in the method implementation. Moreover, when the rotor stands still, matrix Q does not depend on time but when the rotor moves, Q is time-dependent in the sense that it has to be rebuilt at each new configuration of the system. What follows, refers to the system configuration at an instant $t \in [0, T]$.

Two meshes composed of triangles with straight edges are used to discretize the stator and rotor domains. The discrete subspaces X_{i,h_i} are defined in (6) with $k_i = 1$ and we introduce the spaces

$$X_i^0 := \{v_{i,h_i} \in X_{i,h_i} \mid v_{i,h_i} = 0 \text{ on } \partial\Omega_i \setminus \Gamma\}.$$

The degrees of freedom are the values of u at the vertices of mesh triangles. We denote by \mathbf{a}_K the nodes of triangle K , and we define the sets of global nodes Ξ_i

$$\Xi_i = \{\mathbf{a}_K \mid K \in \mathcal{T}_{i,h_i}\},$$

and its subset Ξ_i^0 as

$$\Xi_i^0 := \{\mathbf{a}_K \mid K \in \mathcal{T}_{i,h_i}, \mathbf{a}_K \notin \partial\Omega_i \setminus \Gamma\}.$$

In defining the sets Ξ_h and Ξ_h^0 , an assembly process has taken place and in the global numeration we will write the nodes as \mathbf{a} . The two sets of nodes on the interface will be denoted as follows

$$\xi^i = \{\mathbf{a} \in \Xi_i^0 \cap \Gamma\}$$

and we denote by m_Γ^i and m^i the number of elements belonging to ξ^i and Ξ_i respectively.

Let $\varphi_j \in X_{1,h_1}$ be the basis function associated to the j^{th} node of Ξ_1^0 and $\psi_j \in X_{2,h_2}$ the basis function associated to the j^{th} node of Ξ_2^0 defined by

$$\varphi_j(\mathbf{a}_s) = \delta_{js} \quad \forall \mathbf{a}_s \in X_{1,h_1}, \quad \psi_j(\mathbf{a}_s) = \delta_{js} \quad \forall \mathbf{a}_s \in X_{2,h_2}$$

where δ_{js} is the Kronecker symbol ($\delta_{js} = 0$ for $j \neq s$ and $\delta_{jj} = 1$).

We suppose that a basis \mathcal{B} for \mathcal{U}_h^0 can be written as $\mathcal{B} = \mathcal{B}^1 \cup \mathcal{B}^2 \cup \mathcal{B}^\Gamma$ where the sets of functions \mathcal{B}^1 , \mathcal{B}^2 , and \mathcal{B}^Γ are defined as follows. The functions in \mathcal{B}^1 are zero in $\overline{\Omega^2}$, the functions in \mathcal{B}^2 are zero in $\overline{\Omega^1}$, and the functions in \mathcal{B}^Γ have their support in the union of *mortar* elements. These elements are the union of the rotor and stator mesh triangles having at least one vertex lying on Γ . Due to the properties of the considered basis functions, we set

$$\mathcal{B}^1 = \{(\varphi_j, 0) \mid j : \mathbf{a}_j \in \Xi_1^0 \setminus \xi^1\},$$

$$\mathcal{B}^2 = \{(0, \psi_r) \mid r : \mathbf{a}_r \in \Xi_2^0 \setminus \xi^2\},$$

and a possible choice for the basis functions centered at the nodes lying on the interface is

$$\mathcal{B}^\Gamma = \left\{ (\varphi_j, \sum_{r: \mathbf{a}_r \in \xi^2} q_r^j \psi_r) \mid j : \mathbf{a}_j \in \xi^1, q_r^j \in \mathbf{R} \right\}.$$

For each of the m_Γ^1 indices j , the coefficients q_r^j , for $r = 1, \dots, m_\Gamma^2$, are determined by imposing the integral matching condition

$$\int_\Gamma (\varphi_j - \sum_{r: \mathbf{a}_r \in \xi^2} q_r^j \psi_r) \psi_i d\Gamma = 0 \quad \forall i : \mathbf{a}_i \in \xi^2, \forall j : \mathbf{a}_j \in \xi^1. \quad (11)$$

Each of these m_Γ^1 sets of m_Γ^2 equations can be put into the following matrix form

$$C \mathbf{q}^j = \mathbf{D}^j \quad (12)$$

where

$$(\mathbf{q}^j)^T = (q_1^j, \dots, q_{m_\Gamma^2}^j),$$

$$C(r, i) = \int_\Gamma \psi_r \psi_i d\Gamma \quad r, i : \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_i \in \xi^2, \quad (13)$$

$$\mathbf{D}^j(i) = \int_{\Gamma} \varphi_j \psi_i d\Gamma \quad j : \mathbf{a}_j \in \xi^1, i : \mathbf{a}_i \in \xi^2. \quad (14)$$

System (12) allows us to determine, $\forall j : \mathbf{a}_j \in \xi^1$, the vector \mathbf{q}^j and thus the set of basis functions on the interface. For the matrix form of problem (10), it is useful to define the rectangular matrix Q of dimension $m_{\Gamma}^2 \times m_{\Gamma}^1$

$$Q = C^{-1}D$$

Let us remark that in condition (8), the line integral over Γ is well defined. In equation (11) as well as in definitions (13) and (14), the line integrals over Γ have no more sense due to the involved functions. They have been denoted by \int_{Γ} to simplify the presentation and have to be intended as we are going to explain. Moreover, we will see how these integrals can be easily numerically computed by using an adapted one dimensional quadrature formula defined on the interface discretization segments, unless an exact computation is available.

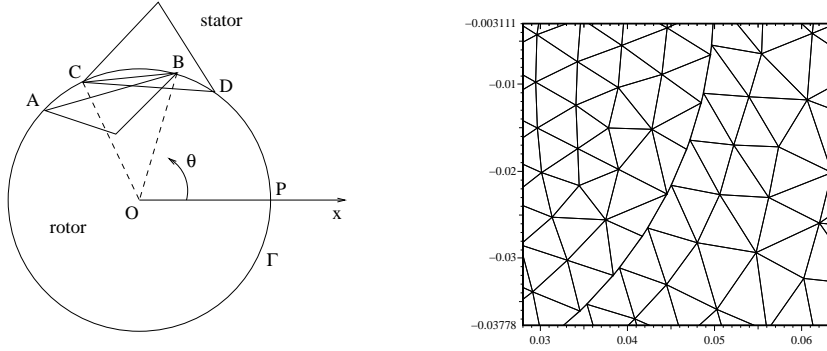


Figure 2: Meshes intersection at the stator-rotor interface. (a) A simplified situation, with only two mesh triangles one belonging to the stator and the other to the rotor mesh and (b) a real situation where an enlargement of the global mesh in a neighbourhood of the interface is presented.

When generated independently one with respect to the other, the rotor and the stator meshes provide two different and not necessarily matching discretizations $\mathcal{T}_{1,h_1}^{\Gamma}$ and $\mathcal{T}_{2,h_2}^{\Gamma}$ of interface Γ . Due to the use in both domains of meshes composed of triangles with straight sides, $\mathcal{T}_{i,h_i}^{\Gamma}$ ($i = 1, 2$) are polygons. These two facts can be observed by looking at Figure 2(b). Furthermore, at the curved interface Γ , the stator mesh penetrates that of the rotor and viceversa: this geometric phenomenon is reproduced in a simplified case in Figure 2(a). To avoid preferring $\mathcal{T}_{1,h_1}^{\Gamma}$ to $\mathcal{T}_{2,h_2}^{\Gamma}$, we define a third polygon Γ_h whose nodes are all the stator and rotor mesh nodes lying on Γ . The polygon Γ_h is the "intersection" between $\mathcal{T}_{1,h_1}^{\Gamma}$ and $\mathcal{T}_{2,h_2}^{\Gamma}$: its sides are all the segments intersections of rotor and stator mesh sides with extremities on Γ .

Due to the circular geometry of the interface, all the mesh nodes lying on Γ are equally distant from the rotor centre. Each of these nodes can be located on the interface by the angle θ between the x-axis and the line centre-node in a polar system of coordinates with origin in the rotor centre.

In Figure 2(a), the line with extremities C and B represents the side C-B of Γ_h , intersection between the mesh sides A-B and C-D. This side is defined starting from the angle interval $(\theta_B, \theta_C) = (\theta_B, \theta_A) \cap$

(θ_D, θ_C) bounded by the dashed lines. If intervals (θ_B, θ_A) and (θ_D, θ_C) are disjoint, the intersection segment is an empty set. If one angle interval is a subset of the other (for example, $(\theta_B, \theta_A) \subset (\theta_D, \theta_C)$), the intersection segment (in this case A-B) is defined as the one associated to the smallest angle interval (in this case (θ_B, θ_A)).

Now, considering Figure 2(a), let us denote by φ_A and φ_B the basis functions associated to nodes A and B of the rotor mesh triangle and by ψ_C and ψ_D those associated to nodes C and D of the stator mesh triangle. Among the line integrals in (14) with reference to the situation displayed in the Figure 2 we have

$$\int_{\Gamma} \varphi^B \psi^C d\Gamma.$$

The nodes ξ_k of the chosen quadrature formula are defined on the Γ_h side C-B and orthogonally projected on both the mesh sides A-B and C-D. The weights ω_k of the formula are modified depending on the length of C-B. Denoted by x_k the orthogonal projection of ξ_k on A-B and by y_k the orthogonal projection of ξ_k on C-D, the considered integral is then computed, with no negative effects on the method overall accuracy, by the formula

$$\sum_{k \mid \xi_k \in \text{seg } CB} \varphi_B(x_k) \psi_C(y_k) \omega_k.$$

Matrix form of the fully discretized problem

The system we solve to get numerical results can be built directly by expanding $u_h = (u_{1,h}, u_{2,h})$ in terms of the basis functions of \mathcal{B} and inserting this expansion in (10).

Herein, we prefer to construct the final system with a different two-step procedure: the first step consists in writing, in each domain, the final system associated to (10) with homogeneous Neumann conditions on the interface Γ . In the second step the two systems are coupled by means of the mortar condition. This procedure is easier to be understood and involves few modifications in an already existing finite element code. Now, let us go through it in a more detailed way.

We expand the numerical approximation $u_h = (u_{1,h_1}, u_{2,h_2})$ of the solution u in terms of the basis functions of X_{i,h_i} :

$$\begin{aligned} u_{1,h_1}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{j: \mathbf{a}_j \in \Xi_1^0} u_j^1(t) \varphi_j(\mathbf{x}), \\ u_{2,h_2}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{r: \mathbf{a}_r \in \Xi_2^0} u_r^2(t) \psi_r(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

where we have used m^1 coefficients u_i^1 and m^2 coefficients u_r^2 . Among these $m^1 + m^2$ coefficients, only $m^1 + m^2 - m_\Gamma^2$ are real unknowns. The m_Γ^1 coefficients associated to nodes in ξ^1 are linked to the m_Γ^2 coefficients associated to nodes in ξ^2 through the integral matching condition (8). To detail this fact, we separate the unknowns in each domain into two blocks with assigned names in parentheses: the first block (\mathbf{u}_Γ) contains the unknowns associated to the m_Γ^j nodes lying on Γ and the second one (\mathbf{u}_i) those associated to the $m^j - m_\Gamma^j$ nodes inside the domain. The unknown vector at time t_{n+1} , is then

$$\mathbf{u}_{n+1} = (\mathbf{u}_\Gamma^2, \mathbf{u}_i^2, \mathbf{u}_\Gamma^1, \mathbf{u}_i^1)^T(t_{n+1})$$

where the exponent T stands for the transpose operator. The vector of independent unknowns at time t_{n+1} is

$$\mathbf{w}_{n+1} = (\mathbf{u}_i^2, \mathbf{u}_\Gamma^1, \mathbf{u}_i^1)^T(t_{n+1})$$

since the two sets of values \mathbf{u}_Γ^1 and \mathbf{u}_Γ^2 at the interface nodes are linked one to the other by the mortar matching condition. In particular, having chosen the traces on Γ of the stator shape functions as mortar elements, we have that

$$Q_{n+1} \mathbf{u}_\Gamma^1(t_{n+1}) = \mathbf{u}_\Gamma^2(t_{n+1})$$

where Q_{n+1} is the rectangular m_Γ^2 per m_Γ^1 full matrix obtained from the matching condition discretization at time t_{n+1} . The relation between vectors \mathbf{u}_{n+1} and \mathbf{w}_{n+1} is

$$\mathbf{u}_{n+1} = \tilde{Q}_{n+1} \mathbf{w}_{n+1} \quad \text{where} \quad \tilde{Q}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & Q_{n+1} & 0 \\ Id & 0 & 0 \\ 0 & Id & 0 \\ 0 & 0 & Id \end{pmatrix}.$$

The approximation of the physical solution is computed via the solution of the sytem

$$\tilde{Q}_{n+1}^T \left(A + \frac{M}{\Delta t} \right) \tilde{Q}_{n+1} \mathbf{w}_{n+1} = \tilde{Q}_{n+1}^T \frac{M}{\Delta t} \tilde{Q}_n \mathbf{w}_n \quad (15)$$

where

$$A = \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ 0 & A^1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad M = \begin{pmatrix} M^2 & 0 \\ 0 & M^1 \end{pmatrix}$$

and A^i , M^i ($i=1,2$) are respectively the stiffness and mass matrices related to the discretization in the domain Ω_i of equation (10) with homogeneous Neumann conditions at the interface Γ . In particular, set $N = (A + \frac{M}{\Delta t})$, the left-hand side matrix can be represented in a block-displayed structure as follows

$$\tilde{Q}_{n+1}^T N \tilde{Q}_{n+1} = \begin{pmatrix} N_{i,i}^2 & N_{i,\Gamma}^2 Q_{n+1} & 0 \\ Q_{n+1}^T N_{\Gamma,i}^2 & Q_{n+1}^T N_{\Gamma,\Gamma}^2 Q_{n+1} + N_{\Gamma,\Gamma}^1 & N_{\Gamma,i}^1 \\ 0 & N_{i,\Gamma}^1 & N_{i,i}^1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

The final matrix (16), stored in skyline format, is symmetric, since for both domains we have that $N_{i,\Gamma} = (N_{\Gamma,i})^T$, and positive definite. The final system (15) can be solved either by a direct method such as the Cholesky factorization or by an iterative one such as the Conjugate Gradient procedure (Quarteroni *et al.*, 1993). In the second case, residuals can be computed in parallel thanks to the mortar method philosophy.

Concerning the way the mortar and the final system matrices are built, there are no structural differences between the case in which the rotor domain is fixed and the case where the rotor domain rotates around its centre. In the first case, the matrix Q is constructed once at the exterior of the temporal loop while in the second case, it is built at each time step: the intersection between the stator and rotor meshes at the interface changes from one time iteration to the next one and so the elements of Q do. The stiffness and the mass matrices, instead, do not depend on time; the computation of their elements is standard and relies on the use of quadrature formulas defined on the reference triangle and transported on the current triangle K by the application F_K .

Numerical results

In this section, we are going to present some numerical results related to problem (3) with mixed Dirichlet-Neumann boundary conditions on $\partial\Omega$. We primarily want to analyse the influence of the rotor movement on current distribution and estimate the power losses in dependence of the rotor angular speed.

Geometry and simulation parameters

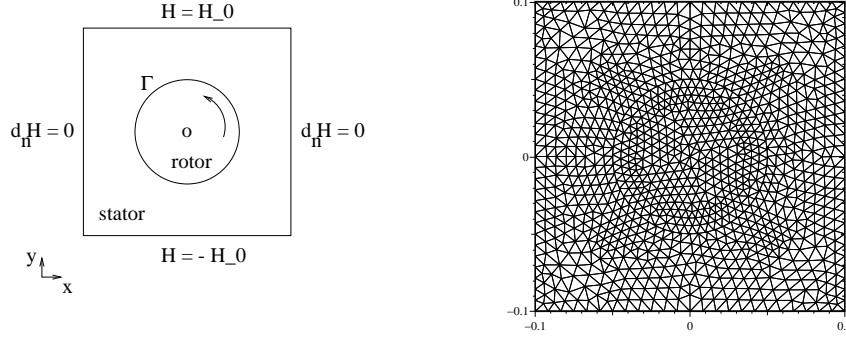


Figure 3: (a) The geometry of the problem together with the considered boundary conditions and (b) an example of triangular discretization of the domain.

We consider the situation displayed in Figure 3(a). The rotor is a circle of radius $\rho = 5 \text{ cm}$ and center at the origin of the (x, y) coordinates system and the stator is a square of side $L = 20 \text{ cm}$ minus the contained rotor part.

The source is represented by a constant magnetic field parallel to z -axis, applied to the stator external horizontal boundary sides and of intensity $-H_0$ at the bottom and H_0 at the top, with $H_0 = 10^6 \text{ A/m}$; homogeneous Neumann conditions are considered on the stator external vertical sides. This boundary data configuration corresponds to the physical situation where a constant source current of intensity $I = 2 H_0 \text{ A}$ flows, in the x -axis direction, through the (y, z) section of the domain. When the rotor stands still, a constant current density $J = \frac{2 H_0}{L} \text{ A/m}^2$ is uniformly distributed on the (x, y) section of the stator-rotor system. If the rotor moves with a prescribed constant angular speed, the conducting current distribution changes due to the presence of induced currents.

For the spatial discretization, we use linear finite elements. The stator mesh is composed of 825 nodes and 1490 triangles whereas the rotor one has 333 nodes and 608 triangles (see Figure 3(b)). In Figure 2(b) is presented an enlargement of the global mesh in a neighbourhood of the interface: as it can be seen, the stator and rotor discretizations do not match on Γ .

A first order implicit Euler scheme is finally applied to discretize the temporal derivative.

A characteristic dimension of the problem is the depth of penetration of the magnetic field in the domain

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu_0 \sigma f}}.$$

If v is the rotation tangential speed, the rotation angular speed is $\omega = \frac{v}{\rho}$ to which it corresponds a frequency $f = \frac{v}{2\pi\rho}$. The value $v = v_1 \approx (18\pi\rho)^{-1}$ has been chosen by supposing that

$$\sigma = 10^7 \text{ S/m} \quad , \quad \mu = \mu_0 \quad , \quad \delta \approx 3\rho.$$

To have the rotor cycling once in 40 time iterations, we set the rotation angle at each time step equal to 9° . In this case we have

$$\Delta t = \Delta t_1 = \frac{9\pi}{180\omega_1} \approx 0.025 \text{ s}.$$

The increase of the rotor angular speed is obtained considering for v multiples greater than one of the initial speed v_1 . The results we present are related to the following parameter choices:

- (1) $\sigma_1 = \sigma_2$, $\Delta t = \Delta t_1$, $v = v_1$;
- (2) $\sigma_1 = \sigma_2$, $\Delta t = \Delta t_1/10$, $v = 10 v_1$;
- (3) $\sigma_1 = \sigma_2$, $\Delta t = \Delta t_1/10^2$, $v = 10^2 v_1$;
- (4) $\sigma_1 = \sigma_2$, $\Delta t = \Delta t_1/10^3$, $v = 10^3 v_1$;
- (5) $\sigma_1 \ll \sigma_2$, $\Delta t = \Delta t_1/10^3$, $v = 0$.

In cases (1)-(4), both domains are characterized by the same value of conductivity that is $\sigma_1 = \sigma_2 = 10^7 S/m$. In case (5), $\sigma_1 \ll \sigma_2$ with $\sigma_1 = 10^4 S/m$ and $\sigma_2 = 10^7 S/m$. We will refer to case (5) as the situation in which the rotor is made of an electrically almost non-conducting material: we will use the term "insolant" for abbreviation purposes, underlining that this term is not used with reference to $\sigma_1 = 0$ (incompatible with (2)) but when $\sigma_1 \ll \sigma_2$.

In all simulations, we have initialized the solution of the magneto-dynamic problem (2) with the solution of the magneto-static one described by equation (2) without the time derivative term; the latter solution is obtained after two program iterations. In other terms, the rotor starts moving only after that the conducting currents are uniformly distributed in the (x,y) section.

Current density distribution

The following figures present the computed current density distributions corresponding to the considered cases at the steady-state. In particular, we chose $t = 0.025$ s as reference instant when the steady-state is already reached in all cases. The arrows represent the current density vectors evaluated at each element's barycentre. In all figures, the arrow length is adapted automatically with respect to the maximum current density value.

Now, as the rotor rotates slowly (cases (1) and (2)), current density distribution changes but remains uniform as can be seen in Figures 4. When the rotor moves quickly (cases (3) and (4)), currents circulate mostly in the stator part of the domain as it can be observed from Figure 5. In the rotor, they concentrate near the sliding interface creating a boundary layer that becomes thinner as the angular speed increases. This can be explained by noting that increasing the angular speed, the penetration depth of currents into the rotor domain decreases. Moreover, the eddy current distribution is such to create an angular momentum that contrasts the rotation. It is expected that, when the steady-state is achieved, current distribution is time independent, something also confirmed by the results.

Figure 6 demonstrates the current distribution corresponding to the case of an insolant rotor which does not move. Looking at Figure 5(b) and at Figure 6, we can see a "physical" equivalence between cases (4) and (5). The current distribution in the overall system, with a very fast rotating conducting rotor, is similar to that of a standing still insolant rotor.

Finally, this application has been chosen with the purpose of treating the unusual case of an electric sliding contact. We would like to draw the reader's attention to the continuity of the current flux at the stator-rotor interface. This confirms the ability of the mortar element method to reproduce a physical solution ("continuous" at the interface) even when the stator and rotor discretizations do not match at the interface.

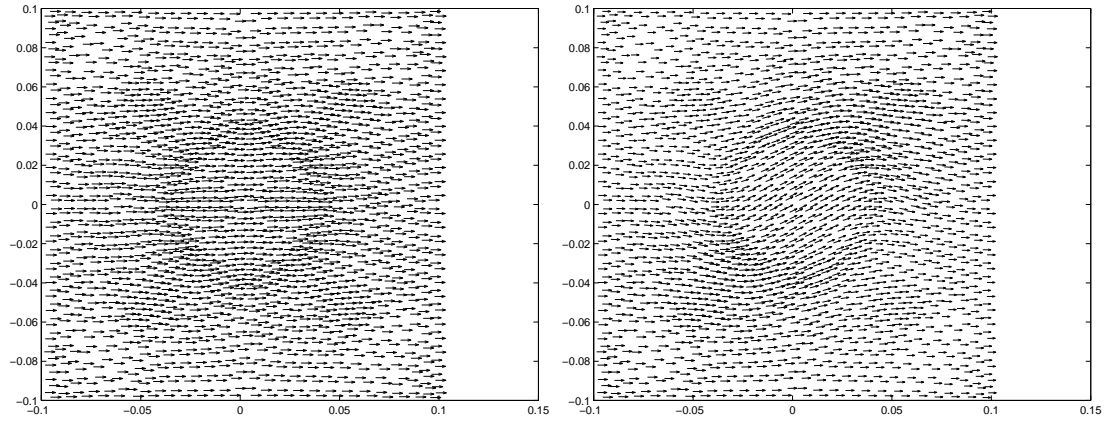


Figure 4: Current density distributions at the steady-state (after respectively 1 and 10 time steps), corresponding to (a) case (1) and (b) case (2). The rotor is rotating at low speed: currents flow in the whole domain and they are uniformly distributed in the (x,y) section.

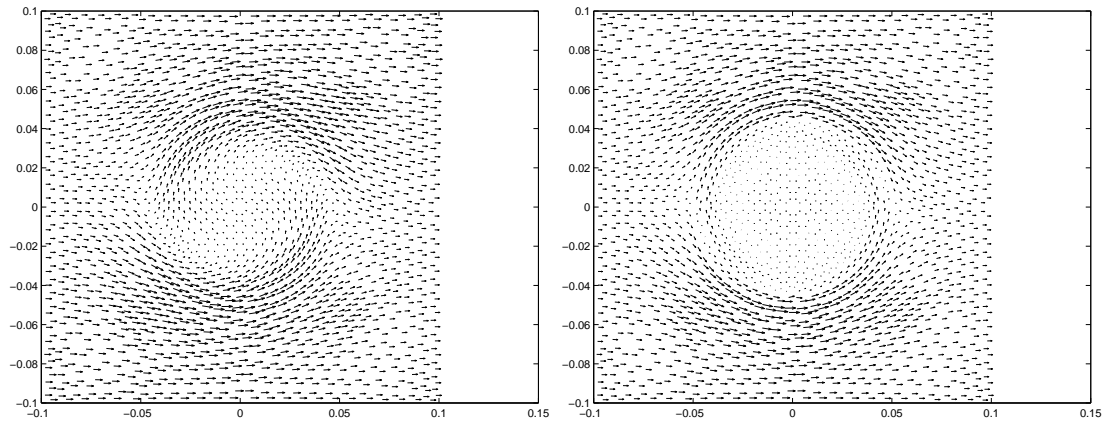


Figure 5: Current density distributions at the steady-state (after respectively 100 and 1000 time steps), corresponding to (a) case (3) and (b) case (4). The rotor is rotating at high speed: currents flow mainly in the stator domain and in the rotor, they concentrate near the interface due to the smaller depth of penetration.

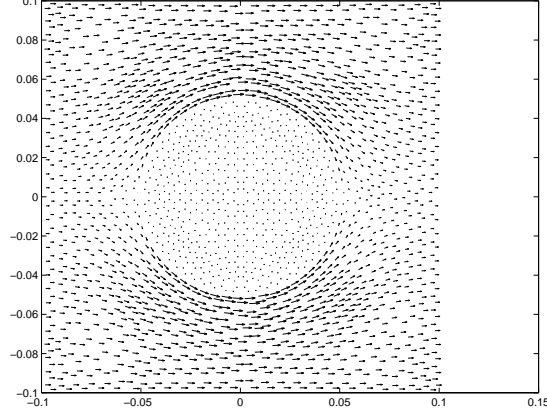


Figure 6: Current density distribution corresponding to case (5) at the steady-state (after 1000 time steps). The rotor is an insulant and stands still: currents flow only in the stator domain.

Power losses computation

In this subsection we are going to analyse the effects of the rotor movement on the power dissipated by the system. In general, if we consider a space portion of volume V containing an electromagnetic field and electric currents, an amount of electric power P is dissipated because of the Joule effect. The power expression is

$$P = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (17)$$

In homogeneous conducting media, the Ohm law holds. In Lagrangian variables this law has the form $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, which by substitution to (17) gives

$$P = \int_V \frac{|\mathbf{J}|^2}{\sigma} dV. \quad (18)$$

The total power per unit length (P_{ul}) can be numerically computed using the mid-point quadrature formula in the following way

$$P_{ul}(t) = \int_{\Omega(t)} \frac{|\mathbf{J}(t)|^2}{\sigma} dS = \sum_{K \in \mathcal{T}_{1,h_1} \cup \mathcal{T}_{2,h_2}} \frac{|\mathbf{J}(t)_G|^2}{\sigma_G} |K| \quad (19)$$

where the subscript “ G ” indicates the value at the elements' barycentres.

The following figures show the value (in Watt/m) of the power losses per unit length in the global system (Figure 7), in the rotor part (Figure 8) and in the stator part (Figure 9), depending on the angular speed of the rotor. To explain these figures, we observe that a uniform distribution of current I corresponds to an imposed constant magnetic field. The dissipated power through Joule effect in a

conducting block with cross-section S and length l , is

$$P = R I^2 \quad \text{with} \quad R = \frac{l}{\sigma S}$$

and per unit length

$$P_{ul} = R_{ul} I^2 \quad \text{with} \quad R_{ul} = \frac{l}{\sigma L}$$

The domain under consideration can be imagined as a sequence of resistances r_{ul} connected in series, of length L' and $R_{ul} = \sum r_{ul}$. If the rotor rotates slowly (cases (1) and (2)), eddy currents freely move in the whole domain as we have seen in Figures 4. The surface engaged with the power losses is the union of the stator and rotor corresponding areas. As it can be seen, the intensity of the total dissipated power is low (see dotted and dashed lines in Figure 7) and all resistances r_{ul} have the same value because $L' = L$ everywhere. When the rotor moves quickly (cases (3) and (4)), we have seen in Figure 5 that currents circulate mostly in the stator domain. The surface engaged with the power losses is then smaller but the intensity of the total dissipated power increases (see long dashed and dot dashed lines in Figure 7). In fact, resistance r_{ul} varies with x-coordinate. Near the domain boundary it has the same value since $L' = L$, as for cases (1) and (2) but in the middle (rotor) $L' < L$ and so its value is bigger.

In Figure 7, the dark line represent the power losses in the system related to the case (5) where the rotor is an insulant. Complete equivalence between cases (4) and (5) in terms of current distributions as well as in terms of power losses is observed. The faster the rotor moves, the more the total power loss curve corresponding to case (4) approaches that of case (5) where the resistance has its maximum value.

Figure 8 depicts the power losses in the rotor domain. In case (5), as the rotor is an insulant, the energy dissipated by Joule effect is low. Now, as Figure 5 shows, the faster the rotor moves, the more the eddy currents circulate only in the stator. The power losses in the rotor decrease as the rotation speed increases and the corresponding lines in Figure 8 approach the one related to case (5). An inverted but similar reasoning explains Figure 9 where the power losses in the stator domain are shown.

For low rotation speeds, the values of the computed power are coincident with the expected ones given by the following formulas

$$P_{ul}^{rot} = P_{ul} \frac{\pi \rho^2}{L^2} \quad ; \quad P_{ul}^{sta} = P_{ul} \frac{L^2 - \pi \rho^2}{L^2}.$$

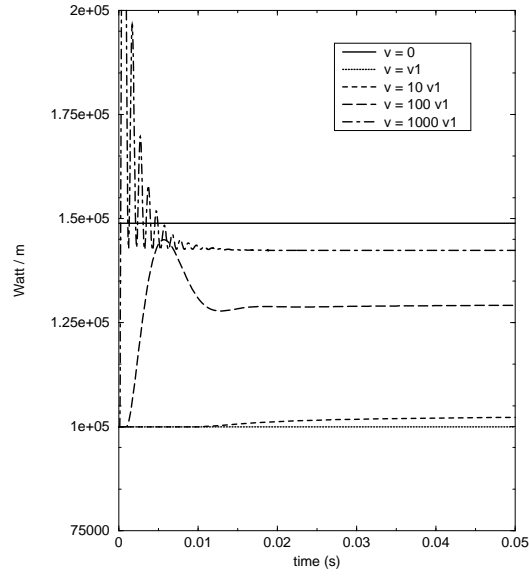


Figure 7: Power losses per unit length in the stator-rotor system, for the considered cases, during the transient and steady-state intervals (for $t < 0.025$ s and $t > 0.025$ s respectively). The origin of the time scale on the x-axis coincides with the instant when the rotor starts rotating.

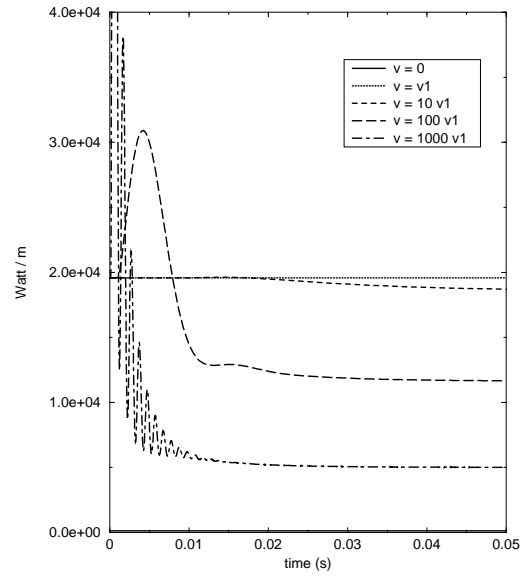


Figure 8: Power losses per unit length in the rotor system for the considered cases, during the transient and steady-state intervals.

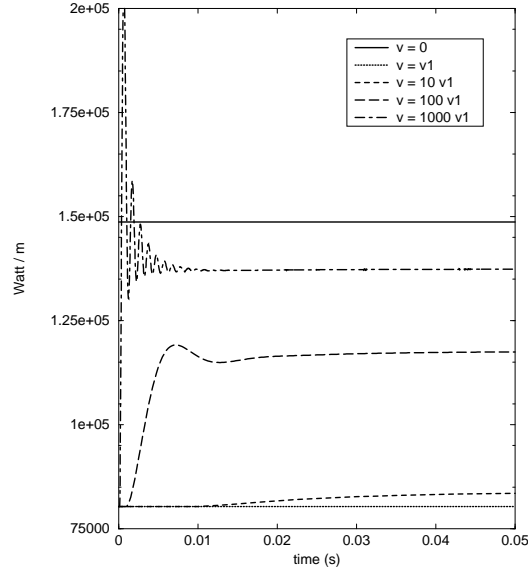


Figure 9: Power losses per unit length in the stator for the considered cases, during the transient and steady-state intervals.

Conclusions

A non-conforming approximation of the eddy current problem in moving geometries has been briefly presented and analysed from the implementation point of view. Based on the sliding-mesh mortar element method, this approximation has allowed to work in a very elegant way with domain discretizations that do not match at the interface and treat the unusual case of a sliding electric contact. The interest of the proposed method is focused on the following issues: (1) the imposition at a discrete level of the transmission condition for the unknown function values across the sliding interface, is done without any constraint between the temporal and the spatial steps; (2) the system of the discretized problem has a symmetric and positive definite matrix. Due to the satisfying results obtained for two dimensional approximations, the sliding-mesh mortar methodology should allow for three dimensional simulations and work is progressing in this direction.

Acknowledgements

The authors thank Prof. Alain Bossavit for his helpful suggestions. This work has been developed on computers belonging to the A.S.C.I. (Applications Scientifiques du Calcul Intensif) and L.G.E.P. (Laboratoire Genie Electrique de Paris) laboratories and it has the financial support of the European Community (TMR Contract number ERB4001GT965424).

References

- Anagnostou, G., Patera, A.T. and Maday, Y. (1991), "A sliding mesh method for partial differential equations in nonstationary geometries: application to the incompressible Navier-Stokes equations", technical report of the Laboratoire d'Analyse Numérique (Université de Paris VI), No. R91024.
- Bernardi, C., Maday, Y. and Patera, A.T. (1990), "A new conforming approach to domain decomposition: the mortar element method", *Non Linear Partial Differential Equations and Applications*, Collège de France Seminar, Pitman, pp. 13-51.
- Bossavit, A. (1986), *Electromagnetisme en vue de la modelisation*, Springer-Verlag, France.
- Bouillault, F., Buffa, A., Maday, Y. and Rapetti, F. (1999), " Sliding-mesh mortar element method for a coupled magneto-mechanical system ", ISEF'99 conference proceeding.
- Buffa, A., Maday, Y. and Rapetti, F. (1999), "A sliding mesh-mortar method for a two dimensional eddy currents model of electric engines", technical report of the Laboratoire d'Analyse Numérique (Université de Paris VI), No. R99002 (submitted to M^2AN).
- Ciarlet, P. (1978), *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam.
- Davat, B., Ren, Z. and Lajoie-Mazenc, M. (1985), "The movement in field modeling", IEEE Trans. Mag., Vol. 21, pp. 2296-2298.
- Emson, C. R. I., Riley, C. P., Walsh, D. A., Ueda, K., Kumano, T. (1998), " Modelling eddy currents induced in rotating systems ", IEEE Trans. Mag., Vol. 34, pp. 2593-2596.
- Marechal, Y., Meunier, G., Coulomb, J. L., Magnin, H. (1992), " A general purpose tool for restoring inter-element continuity ", IEEE Trans. Mag., Vol. 28, pp. 1728-1731.
- Nicolet, A., Delincé, F., Genon, A. and Legros, W. (1992), "Finite elements - boundary elements coupling for the movement modeling in two dimensional structures", J. de Phys.III, Vol. 2, pp. 2035-2044.
- Quarteroni, A. and Valli, A. (1993), *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, Vol. 23 of *Series in computational mathematics*, Springer-Verlag, Germany.
- Razek, A., Coulomb, J., Felliachi, M. and Sobonnadière, J. (1982), " Conception of an air-gap element for dynamic analysis of the electromagnetic fields in electric machines", IEEE Trans. Mag., Vol. 18, pp. 655-659.
- Rodger, D., Lai, H. C., Leonard, P. J. (1990), " Coupled elements for problems involving movement ", IEEE Trans. Mag., Vol. 26, pp. 548-550.
- Tsukerman, I. J. (1992), " Overlapping finite elements for problems with movement ", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 28, pp. 2247-2249.

6.3 Modélisation d'un système couplé magnéto-mécanique

6.3.1 Calcul de forces électromagnétiques

Dans les dispositifs électrotechniques, le phénomène électromagnétique est souvent accompagné d'autres phénomènes physiques tels que thermiques et mécaniques dont dépendent étroitement les caractéristiques électromagnétiques. L'étude d'un tel système nécessite une analyse complète des différentes caractéristiques et conduit à la modélisation des différents phénomènes couplés [91].

Le but de notre étude consiste à modéliser un exemple de système magnéto-mécanique, dans lequel les forces engendrées par le champ électromagnétique sont responsables des mouvements de la structure mécanique. L'efficacité de la modélisation dépend essentiellement de la précision du calcul de forces électromagnétiques [32].

Les forces électromagnétiques

Ces forces sont un phénomène microscopique. Une charge de quantité q qui se déplace dans un champ électromagnétique avec une vitesse \mathbf{v} subit une force électrique $q\mathbf{E}$ (force de Coulomb) dans la direction du champ électrique \mathbf{E} et une force magnétique $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ (force de Lorentz) dans la direction orthogonale à la vitesse \mathbf{v} et au champ \mathbf{B} . Ce qui nous intéresse sont les phénomènes macroscopiques. Il s'agit de la moyenne des forces microscopiques appliquées à la structure cristalline du matériau. Dans un milieu continu non magnétisable et non polarisable portant une densité de charge ρ et une densité de courant \mathbf{J} volumique, la densité volumique des forces est déterminée par la formule de Laplace

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}.$$

C'est une expression locale des forces; la force globale s'obtient en intégrant ces forces élémentaires sur le volume considéré. Les différentes formules pour le calcul de forces électromagnétiques sont déduites et appliquées pour des problèmes simples dans le Chapitre 6 de l'ouvrage [74]: nous y trouvons la formulation basée sur la formule de Lorentz, celle basée sur le principe de travaux virtuels, la méthode du tenseur de Maxwell et autres. La méthode adoptée dans les articles [38, 110, 39] pour le calcul des forces électromagnétiques est basée sur l'approche "énergétique".

Rappelons que la densité volumique d'énergie magnétique est fonction du champ magnétique \mathbf{B} et des divers paramètres α_i ($i = 1, N_p$) décrivant les caractéristiques du matériau, i.e. $W = W(\mathbf{B}, \alpha_1, \dots, \alpha_{N_p})$. Considérons un volume Ω borné par $\partial\Omega$. Dans le cas où le flux est constant sur $\partial\Omega$ lors d'un déplacement $d\mathbf{u}$, nous avons l'équation

d'équilibre suivante:

$$\int_{\Omega} (dW + \mathbf{f} \cdot d\mathbf{u}) d\Omega = 0.$$

Pour un système incompressible, la force volumique est donnée par:

$$\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \sum_{i=1}^{N_p} \alpha_i \text{grad} \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \right).$$

Dans un matériau isotrope, incompressible et non homogène, la densité volumique de force [31] est donnée par:

$$\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{1}{2} |\mathbf{H}|^2 \text{grad} \mu + \mathbf{f}'$$

où le terme $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ est dû au courant macroscopique, le terme $-\frac{1}{2} |\mathbf{H}|^2 \text{grad} \mu$ représente la force due à la magnétisation qui dépend du gradient de la perméabilité magnétique et \mathbf{f}' correspond aux forces de magnétostriction qui sont localement équilibrées avec les contraintes mécaniques. Dans un matériau peu magnétostrictif, ce terme est souvent négligé. Cette expression se trouve également dans les ouvrages [84, 119, 126].

6.3.2 Modélisation des phénomènes couplés magnéto-mécanique

Dans un système magnéto-mécanique, la force due au champ magnétique engendre la déformation ou le mouvement de la structure mécanique. La variation de la structure mécanique modifie la distribution du champ magnétique ainsi que la force. L'interaction fait que les phénomènes magnétiques et mécaniques ne peuvent pas être étudiés de façon indépendante les uns des autres. La modélisation de ces phénomènes couplés nécessite une résolution simultanée des équations magnétiques et mécaniques.

Dans la section précédente, nous avons présenté la méthode adoptée pour le calcul des forces magnétiques. Sous l'action de ces forces, la structure mécanique subit un déplacement rigide ou une déformation élastique selon la caractéristique de la structure. L'utilisation d'un modèle de couplage plutôt qu'un autre dépend de l'importance de l'interaction des phénomènes magnétiques et mécaniques et des constantes de temps en jeu. Dans cette section nous présentons quatre modèles de couplage magnéto-mécanique dont la méthode du couplage indirect adoptée dans les articles [38, 110, 39]. Nous remarquons que la prise en compte du mouvement est indispensable dans un modèle de couplage magnéto-mécanique.

Problème mécanique - rappel des équations

Dans le cas d'une déformation élastique, le déplacement de la structure est décrit par une équation aux dérivées partielles en temps et en espace. Cette équation est discrétisée en espace par la méthode des éléments finis en prenant en compte les conditions aux limites spécifiées sur la frontière du domaine. Cette discrétisation spatiale du problème, dans le cas des déformations linéaires, aboutit à une équation différentielle ordinaire en termes du déplacement en temps de la forme suivante:

$$M \frac{d^2}{dt^2} U + K U = F \quad (6.1)$$

où M est la matrice de masse, K la matrice de raideur, U le vecteur de déplacements et F le vecteur associé aux forces (volumiques et surfaciques) qui agissent sur la structure. Cette équation dynamique sera résolue avec des conditions initiales appropriées à l'aide d'un algorithme de discrétisation temporelle basé sur la méthode des différences finies [88].

Pour une analyse complète d'un système dynamique, il est nécessaire d'introduire dans l'équation précédente les forces d'amortissement. Malgré la difficulté de caractériser les termes d'amortissement de façon générale, dans beaucoup de cas on peut se contenter de les considérer comme forces qui correspondent à un frottement proportionnel à la vitesse. Dans ce cas, l'équation dynamique devient

$$M \frac{d^2}{dt^2} U + C \frac{d}{dt} U + K U = F \quad (6.2)$$

où C représente la matrice d'amortissement.

On s'intéresse qu'à des structures qui subissent un déplacement rigide (de rotation et/ou de translation). Le déplacement de la structure est donc décrit par des équations différentielles ordinaires en temps qui dérivent directement des équations cardinales de la dynamique

$$\frac{dQ}{dt} = R, \quad \frac{d\Gamma_O}{dt} = M_O + Q \times v_O$$

où Q représente la quantité du mouvement de la structure Ω ($Q = mv_G$ avec v_G la vitesse du barycentre G et m la masse totale de Ω), R la résultante de forces externes qui agissent sur Ω , M_O le moment de forces externes par rapport à un point fixe $O \in \mathbb{R}^3$, Γ_O le moment angulaire par rapport au même point O et v_O le vecteur vitesse du point O . Si $v_O \equiv 0$ ou $v_O \parallel v_G$ ou $O \equiv G$, le produit vectoriel $Q \times v_O$ est nul. Si v est la vitesse du point $P \in \Omega$, ces quantités sont définies comme dans la suite

$$\begin{aligned} Q &= \int_{\Omega} \rho v \, d\Omega, & R &= \int_{\Omega} f \, d\Omega \\ M_O &= \int_{\Omega} (P - O) \times f \, d\Omega, & \Gamma_O &= \int_{\Omega} (P - O) \times \rho v \, d\Omega. \end{aligned}$$

Dans le cas d'un déplacement rigide de la structure, les équations différentielles ordinaires en temps ont la forme général (6.2) où M est la matrice d'inertie et U est le vecteur de déplacements angulaires et/ou de translation.

Même si nous ne le traitons pas, on peut avoir un couplage du champ magnétique avec un circuit électrique comme pour des dispositifs électro-mécaniques alimentés en tension. Dans ces cas, les courants électriques dans les enroulements, sources du champ magnétique, sont en général inconnus. Pour la modélisation de ces systèmes, il est nécessaire de développer un modèle couplé du circuit électrique et du champ magnétique. La plupart des modèles consistent à réaliser une solution simultanée des deux types d'équations (voir par exemple [65, 72, 132]).

Modèle non couplé

Ce type de "couplage" est conseillé dans le cas où les propriétés magnétiques et mécaniques sont faiblement couplés. Il suffit ainsi de calculer séparément la distribution du champ magnétique, la répartition des forces magnétiques et les déplacements qui en résultent. Ce modèle s'adapte bien à l'étude des vibrations d'origine magnétique dans les structures ferromagnétiques (par exemple, les moteurs) [90].

Modèle de couplage paramétrique

Le champ magnétique est décrit par le flux vis à vis du circuit électrique et par les forces vis à vis du système mécanique. Connaissant la variation de ces grandeurs en fonction des paramètres variables tels que le courant et le déplacement, les équations du circuit électrique et du mouvement mécanique peuvent être résolues indépendamment du champ magnétique. Le modèle paramétrique est constitué de deux étapes.

- Etape de paramétrisation: l'étude paramétrique du système à l'aide du calcul numérique (méthode des éléments finis) du champ magnétique. Il s'agit de déterminer la variation des flux et des forces en fonction de l'état de saturation magnétique, du mouvement relatif de la structure, de la température, etc. Cela s'effectue dans l'ensemble de la variation possible des courants et des déplacements.
- Etape de résolution: la résolution des équations du circuit électrique et du système mécanique en tenant compte des paramètres magnétiques (flux et forces) précalculés.

Dans le cas d'un système accompagné de déformation élastique ou des courants de Foucault, la complexité de la dépendance des flux et des forces vis à vis d'un nombre important de paramètres différentes fait que la paramétrisation du système devient difficilement praticable. Ce modèle s'applique alors essentiellement à un système en mouvement rigide tel que la rotation des machines électriques, les déplacements des électroaimants. Les méthodes classiques de l'analyse des dispositifs électriques reposent sur ce modèle.

Modèle du couplage direct

Dans ce modèle, les équations magnétique et mécanique sont résolues simultanément [115]. Le recours à ce modèle se justifie dans le cas d’une interaction importante entre les phénomènes magnétiques et mécaniques.

La difficulté d’un tel couplage est que le système d’équations matricielles est non linéaire et non symétrique. Le système peut être symétrisé: un exemple est donné dans [115] où le calcul des forces est basé sur l’application locale du principe de travaux virtuels et la linéarisation de la matrice d’éléments finis non linéaire par rapport au déplacement est basée sur la méthode de Newton-Rapson.

Modèle du couplage indirect

Le modèle de couplage indirect consiste à résoudre alternativement les équations du champ magnétique (avec les équations du circuit électrique, s’il s’agit d’une alimentation en tension) et les équations du système mécanique. Il permet de modéliser des phénomènes couplés à niveau d’interaction important et s’applique en présence de déplacement rigide comme en présence de déformation et au problème statique comme au problème dynamique.

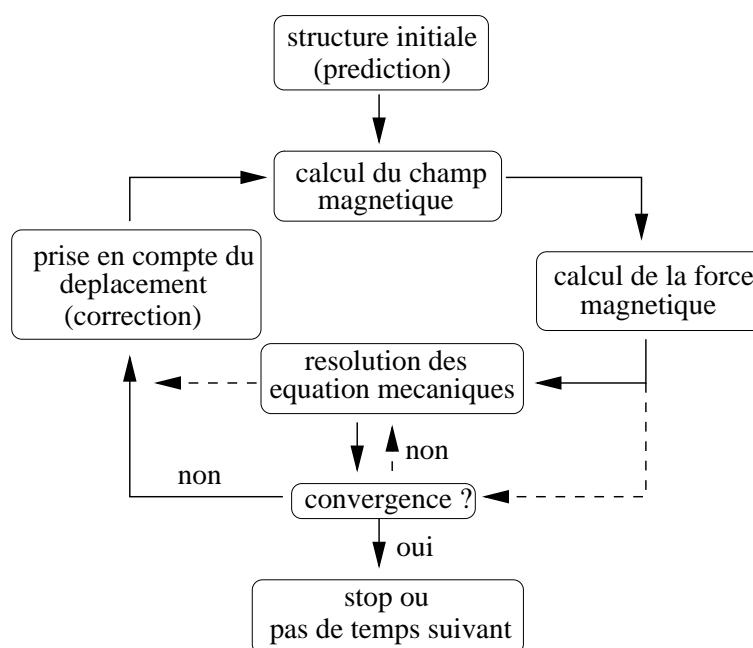


Figure 6.1: Processus de couplage indirect.

Le modèle de couplage indirect nécessite bien souvent un processus itératif de “prédiction-correction” (voir Figure 6.1) selon l’importance de l’interaction des phénomènes magnéto-

mécaniques. Partant d'une configuration de structure initiale (ou celle du pas de temps précédent s'il s'agit d'un problème dynamique) (phase de prédiction), on calcule le champ magnétique ainsi que la force magnétique qu'il engendre. Cette dernière sera incorporée dans l'équation magnétique pour calculer le déplacement qui, lui, sera pris en compte dans l'équation magnétique pour l'itération suivante (phase de correction). Le contrôle de la convergence s'effectue soit en comparant les valeurs du déplacement de deux itérations successives comme l'indique le chemin en trait plein soit en comparant les valeurs de la force comme l'indique le chemin en pointillé.

Pour un problème dynamique, ce processus d'itération interne à chaque pas de temps n'est pas indispensable si le pas de temps est choisi suffisamment petit, tel que les valeurs de force du pas précédent ne soient pas très différentes des valeurs présentes. Ceci permet une simplification considérable du modèle (et l'on parle de procédure itérative "explicite"): le temps de calcul est réduit sans perdre en précision.

Le couplage indirect est un modèle de conception simple et fréquemment employé pour l'étude de ce type de problèmes et il a été appliqué avec succès dans [38, 110, 39]. Le désavantage de ce modèle est la nécessité du contrôle de la convergence dans le cas d'un pas de temps relativement grand [131]. Dans le cas d'un problème de déformation, le choix de l'algorithme du contrôle (la correction) est difficile pour obtenir la convergence vers une solution d'équilibre stable.

6.3.3 *Article 3* – Simulation of a magneto-mechanical damping machine: analysis, discretization and results

par *F. Bowillault, A. Buffa, Y. Maday, F. Rapetti*
en préparation.

Simulation of a magneto-mechanical damping machine: analysis, discretization, results

F. BOUILLAUT[§], A. BUFFA^{*}, Y. MADAY^{††}, F. RAPETTI^{‡§}

Abstract

This paper presents and analyzes a method for the simulation of the dynamical behavior of a coupled magneto-mechanical system such as a damping machine. We consider a two-dimensional model based on the transverse magnetic formulation of the eddy currents problem for the electro-magnetic part and on the motion equation of a rotating rigid body for the mechanical part.

The magnetic system is discretized in space by means of Lagrangian finite elements and the sliding mesh mortar method is used to account for the rotation. In time, a one step Euler method is used, implicit for the magnetic and velocity equations.

The coupled differential system is solved with an explicit procedure.

Key words. domain decomposition method, magneto-mechanical coupled problem, non-conforming finite element approximation, mortar element method, moving systems

AMS(MOS) subject classifications. 70E55, 78A55, 78M10, 65M15, 65M12, 68U20

Introduction

The full simulation of electro-magnetic devices involves the solution of systems of linear or non-linear partial and ordinary differential equations. There is a well-known interaction among the electro-magnetic field distribution, the heating and the dynamics of the device. Although the models of each separated phenomenon can be chosen linear, the coupling is, in general, non-linear. Few analysis and/or numerical methods are available in this context and they strongly depend on the application. We refer, e.g., to [12]-[13] for the analysis of a coupled electromagnetic-heating system and to [11] for the simulation of a magneto-mechanical system.

In this paper we are concerned with the modeling, the analysis and the simulation of a damping machine as the one presented in Figure 1.

The forces resulting from the magnetic field make the structure move. The variation in the configuration of the structure modifies the distribution of the magnetic field and consequently of the induced forces. Therefore, the interaction between magnetic and mechanical phenomena cannot be simulated independently and, in this article, we propose a simulation of the coupled problem. As an example we study a system composed of two solid parts: the stator, which stands still, and the rotor, which can turn around a given rotation axis.

^{*}Dipartimento di Matematica, Università di Pavia, Via Ferrata 1, 27100 Pavia, Italy

[†]Laboratoire d'analyse numérique BC187 Université Pierre et Marie Curie 4, place Jussieu 75252 Paris cedex 05, France

[‡]ASCI - UPR 9029 CNRS, Bat. 506, Université Paris Sud, 91403 Orsay cedex, France

[§]LGEP - UMR 8507 CNRS, Supélec, Plateau de Moulon, 91192 Gif-Sur-Yvette cedex, France

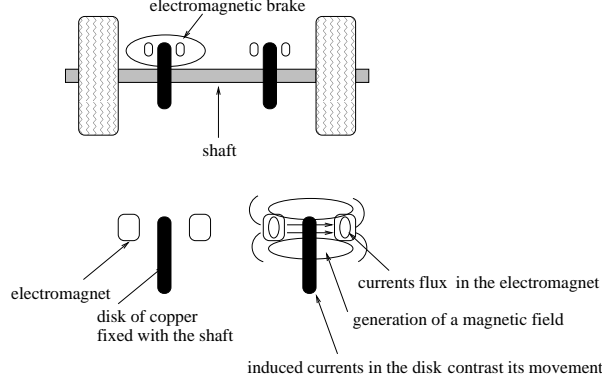


Figure 1: Simplified example of an electromagnetic brake. Conducting disks are installed on the axes of the vehicle and electromagnets are placed around them such that the disks move in the gap of the electromagnets. When the mechanical brakes are applied, a current is passed through the electromagnet and the braking effects of the mechanical and magnetic brakes are added together. We note, however, that the braking effect assumes a non-zero speed for the disks. For this reason, electromagnetic brakes can not be used to completely stop the vehicle, only to slow it down.

For the electromagnetic part, we consider a two-dimensional model resulting from the following assumptions.

- The electric field is a vector, orthogonal to the section of the physical system we are analyzing: we consider the transverse magnetic (TM) formulation of the problem.
- The displacement currents are neglected with respect to the conducting ones: we have to solve a degenerate parabolic problem.
- The magneto-mechanical interaction is here analyzed when the rotor moves: we work in the time-dependent domain.

Concerning the spatial system of coordinates, since Maxwell equations are naturally stated in Lagrangian variables, we choose this system in order to avoid the presence of a convective term in our equations. Among the possible variables to describe the involved phenomena, we select the *magnetic vector potential*.

A similar problem has already been presented, without a rigorous mathematical analysis, in [11] where the moving band technique has been used to take into account the rotor movement. In this paper, we adopt a discretization based on the mortar finite element method in space and we analyze the convergence of the complete system.

The coupling is obtained by means of Lagrange multipliers and the problem is set in the constrained space (the Lagrange multipliers are eliminated). This method is now known in the literature as mortar element method. It has been first introduced in [5] and intensively studied in the last ten years. See [6], [7] or [1] and the references therein for a list of papers on the subject. For what concerns the discrete problem, the weak coupling between the solution in the stator and rotor part allows for non-matching grids at the interface.

This technique leads naturally to a sliding mesh method which has several advantages with respect to other approaches:

- re-meshing and interpolation procedures are avoided,
- no heavy constraints are imposed among the time step δt , the spatial parameter h and the rotation angle at every time step.

For the mechanical part, the motion of the rotor (a rigid rotating body) is the solution of a second order ordinary differential equation. Its coefficients depend on the mechanical features of the system such as the inertial momentum of the rotor, the friction coefficient and, more importantly here, the global magnetic torque acting on the rotor axis due to the induced electromagnetic forces.

To analyze the magneto-mechanical system we have to solve simultaneously the electromagnetic and the mechanical equations. It is then necessary to evaluate the global magnetic torque acting on the moving part of the structure through the numerical computation of the magnetic field. The algorithm we consider is based on an "explicit" coupling procedure that consists in solving alternatively the magnetic equations and the mechanical ones. At each time step, the magnetic force obtained from the field solution is inserted in the mechanical equation to compute the displacement. The latter is imposed to the moving part for the next step of the magnetic field calculation. A procedure to check the convergence of either the force or the displacement is necessary.

Concerning the structure of the paper, Section 1 is devoted to the derivation of a model problem both for the magnetic equation and the mechanical one. The coupled problem is also stated. In Section 2 the well-posedness of the problem is analyzed together with the regularity of the solution of the model problem. Section 3 concerns then the discretization of the involved equations (linear PDEs and ODEs). The discrete scheme is proved to be stable and an optimal error estimate for the coupled problem is provided. Finally, in Section 4, the results of the numerical simulations are presented: the first set describes, through mechanical quantities, the phenomena taking place in a damping machine. Through the second set of results, we analyze the accuracy of the adopted method when applied to this coupled problem.

1 The model of a damping machine

In this paper we consider a simplified model of a real induction engine. The physical system is modeled as an infinitely long cylinder \mathcal{D} in \mathbb{R}^3 with Lipschitz transverse section Ω . We fix a system of coordinates (x, y, z) such that the transverse ones are (x, y) . The system is composed of materials whose characteristics will be specified later and there is an internal, infinitely long cylinder with circular section which is allowed to turn around its axis. According to that, the section Ω is split as $\Omega = \bar{\Omega}_1 \cup \Omega_2$ where Ω_1 is the moving part, Ω_2 the static one and $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. The magnetic permeability μ is supposed to be constant and we set $\nu = \mu^{-1}$. The conductivity σ belongs to $L^\infty(\mathcal{D})$ and it respects the symmetry of the domain $\sigma(x, y, z) = \sigma(x, y)$. We call \mathcal{C} the set $\text{supp}\{\sigma|_\Omega\}$ and we suppose that $\bar{\mathcal{C}} \subset \Omega_1$. The system of Maxwell equations in \mathcal{D} for industrial frequencies, when the displacement currents are neglected, reads

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \mathbf{curl} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && \text{in } \mathcal{D} \\
 (b) \quad & \mathbf{curl} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_s && \text{in } \mathcal{D} \\
 (c) \quad & \text{div } \mathbf{B} = 0 && \text{in } \mathcal{D} \\
 (d) \quad & \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} && \text{in } \mathcal{D} \\
 (e) \quad & \text{initial conditions} && \text{in } \mathcal{D} \\
 (f) \quad & \text{boundary conditions} && \text{on } \partial\mathcal{D}
 \end{aligned} \tag{1}$$

where \mathbf{E} and \mathbf{H} are the electric and magnetic fields, \mathbf{B} is the magnetic induction and \mathbf{J}_s is the source currents density. We assume that $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$, $\mathbf{J}_s = (0, 0, J_z)$ and $\mathbf{H} = (H_x, H_y, 0)$ and we denote by curl_2 and \mathbf{curl}_2 , respectively, the *scalar* and *vector* operators

$$\text{curl}_2 \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{curl}_2 s = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial y} \\ -\frac{\partial s}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

So we have that

$$\text{curl}_2 \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} = \sigma E_z + J_z; \quad (2)$$

$$\mathbf{curl}_2 E_z = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Let us introduce the magnetic vector potential \mathbf{A} such that

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_z \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \mu \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} = \mathbf{curl}_2 A_z \quad \text{and} \quad A_z = -\int_0^t E_z(t') dt'.$$

If we integrate (3) on $[0, t]$ we obtain

$$\mathbf{curl}_2 A_z = \mu \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Applying the curl_2 operator to both sides of (4), we obtain:

$$\text{curl}_2(\nu \mathbf{curl}_2 A_z) = \text{curl}_2 \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix}. \quad (5)$$

We use (2) in (5)

$$\text{curl}_2(\nu \mathbf{curl}_2 A_z) = \sigma E_z + J_z.$$

Finally, using the definition of A_z we have

$$\sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} + \text{curl}_2(\nu \mathbf{curl}_2 A_z) = J_z;$$

that can be written as

$$\sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} - \nabla \cdot (\nu \nabla A_z) = J_z. \quad (6)$$

The system of Maxwell equations has been rewritten as a scalar equation for the third and only non-zero component of the magnetic vector potential. For a complete derivation of this equation from the system of Maxwell equations we refer to [10] and it is also briefly recalled in [8].

Equation (6) is expressed in Lagrangian variables and it is important when dealing with non-stationary geometries. It is standard to see that with Dirichlet, Dirichlet-Neumann, Neumann boundary conditions, this equation admits a unique solution.

The presence of a magnetic field in the physical system described above generates an induced electromagnetic force which acts as a torque on the moving part, Ω_1 . In particular the magnetic field induces an electric field and, consequently, dissipative currents $\sigma \mathbf{E}$. The electromagnetic force \mathbf{F} is

$$\mathbf{F} = (\sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_s) \times \mu \mathbf{H} - \frac{1}{2} |\mathbf{H}|^2 \nabla \mu.$$

Since simulations are led with μ constant everywhere in Ω , the expression of the force density in terms of the magnetic vector potential becomes

$$\mathbf{F} = (-\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{J}_s) \times \mathbf{curl} \mathbf{A}$$

and it produces a torque which is parallel to the cylinder axis

$$\mathbf{T}_m = \int_{\Omega_1} \mathbf{r} \times \mathbf{F} d\Omega$$

where \mathbf{r} is the radial vector (with respect to the center of Ω_1). In our system of coordinates, it reads $\mathbf{T}_m = (0, 0, T_m)$ and from now on we shall refer to a *scalar* magnetic torque T_m .

Now, when a torque is present, the moving part of the system turns around its geometrical center with the following law:

$$J \frac{d\omega}{dt} + k \omega = T_m \quad , \quad \omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (7)$$

with initial conditions $\omega(0) = \omega_0$ and $\theta(0) = \theta_0$ and where

- ω is the angular speed and θ the rotation angle,
- J is the inertial momentum of the rotor per unit of length,
- k is the friction constant ($k > 0$),
- T_m is the magnetic torque value.

Now, we can state the coupled magneto-mechanical problem. We denote by $r_t : \Omega_1 \rightarrow \Omega_1$ the rotation operator which turns the moving part around its axis of an angle $\theta = \theta(t)$ solution of (7). We adopt the notation $\Omega_1(t) = r_t \Omega_1(0)$ where $\Omega_1(0)$ is of course the initial configuration of Ω_1 . Moreover, from now on, we denote the third component A_z of the magnetic vector potential \mathbf{A} by u or, when useful, by the couple (u_1, u_2) where u_1 and u_2 denote the restrictions of u to Ω_1 and Ω_2 respectively.

Finally the magnetic potential depends on the rotation speed of the moving part: this means that the Maxwell equations and the structure equations are coupled. Then the law of behavior of the system is the following non-linear system of partial differential equations:

$$\begin{array}{lll} (E_1) & \sigma(\mathbf{x}) \frac{\partial u_1}{\partial t} - \nabla \cdot (\nu \nabla u_1) = J_z & \Omega_1(0) \times]0, T[\\ (E_2) & -\nabla \cdot (\nu \nabla u_2) = J_z & \Omega_2 \times]0, T[\\ (E_3) & T_m = \int_{\Omega_1} (-\sigma \frac{\partial u_1}{\partial t} + J_z) \mathbf{r} \cdot \mathbf{curl}_2 u_1 d\Omega & \\ (E_4) & J \frac{d\omega}{dt} + k \omega = T_m \quad , \quad \omega = \frac{d\theta}{dt} &]0, T[\\ (IC_1) & u_1(r_{-t} \mathbf{x}, t) = u_2(\mathbf{x}, t) & \Gamma \times]0, T[\\ (IC_2) & \nu(r_{-t} \mathbf{x}) \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}}(r_{-t} \mathbf{x}, t) = \nu(\mathbf{x}) \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) & \Gamma \times]0, T[\\ (IC_3) & \omega(0) = 0 \quad , \quad \theta(0) = \theta_0 & \\ (BC) & u_2(\mathbf{x}, t) = 0 & \partial\Omega \times]0, T[\\ (0C) & u(\mathbf{x}, 0) = 0 & \mathcal{C} \times \{0\} \end{array} \quad (8)$$

where $\mathbf{x} = (x, y)$, T is the final time, the partial differential equation (E_i) is in the sense of distributions in $\Omega_i \times]0, T[$ ($i=1,2$), \mathbf{n} is at every $\mathbf{x} \in \Gamma$ the unit vector normal outward to Ω_2 and $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ the unit vector normal outward to Ω . Concerning the physical interpretation for the interface conditions (IC_1) and (IC_2) , we refer to [8].

Remark 1.1 *Here we impose homogeneous Dirichlet boundary conditions only for the sake of clarity in the theoretical analysis. Any other boundary condition (Neumann, mixed Dirichlet-Neumann) are allowed and physically significant. The theory that we develop applies almost unchanged to these cases. In truth, the regularity results fall in the general case of mixed boundary conditions, but, without any loss, they can be replaced by local regularity results on the rotor and on a neighborhood of it.*

2 Well-posedness of the continuous problem (8)

We are going to use a fixed point theorem of Schauder type in order to prove that (8) admits at least one solution. To this aim, we first fix a rotation speed $\omega \in C^0(0, T)$ and we analyze the existence and regularity of the magnetic potential u resulting from (E_1) , (E_2) , (IC_1) , (IC_2) , (BC) and (OC) . Above all, we need a variational formulation of this problem and, following [8], we introduce the notation:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(\Omega) &= H^s(\Omega_1) \times H^s(\Omega_2) & s > 0; \\ \|u\|_{\star, s}^2 &= \|u_1\|_{s, \Omega_1}^2 + \|u_2\|_{s, \Omega_2}^2 & \forall u \in \mathcal{H}^s(\Omega) \quad (\text{broken norm}); \\ |u|_{\star, s}^2 &= |u_1|_{s, \Omega_1}^2 + |u_2|_{s, \Omega_2}^2 & \forall u \in \mathcal{H}^s(\Omega) \quad (\text{broken semi-norm}). \end{aligned} \quad (9)$$

Of course $\mathcal{H}^s(\Omega)$ are Hilbert spaces with the natural norms and semi-norms (9). We abbreviate the notation $\|\cdot\|_{\star, 1}$ as $\|\cdot\|_{\star}$.

We set:

$$\mathcal{U}^t = \{u := (u_1, u_2) \in \mathcal{H}^1(\Omega) \text{ such that } u_2|_{\partial\Omega} = 0, \ u_1(r_{-t}\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}) \text{ a.e. } \mathbf{x} \in \Gamma\}. \quad (10)$$

Clearly \mathcal{U}^t is a time-dependent space and, for every fixed value of t , it is a closed subspace of $\mathcal{H}^1(\Omega)$. Moreover it is isomorphic to $H^1(\Omega)$ through the mapping

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{-t} : \quad \mathcal{U}^t &\rightarrow H^1(\Omega) \\ (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t)) &\rightarrow (u_1(r_{-t}\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t)). \end{aligned}$$

We denote by $(\mathcal{U}^t)'$ its dual space with $L^2(\Omega)$ as pivot space and the corresponding duality is defined by:

$$\langle \phi, \psi \rangle_{\Omega(t)} = {}_{H^{-1}(\Omega)} \langle \mathcal{R}_{-t}\phi, \mathcal{R}_{-t}\psi \rangle_{H^1(\Omega)}.$$

Finally, the space $L^2(0, T, \mathcal{U}^t)$ is the set of functions v in $L^2(0, T, \mathcal{H}^1(\Omega))$ which, for almost every t in $]0, T[$, belong to \mathcal{U}^t . This is an Hilbert space provided with the norm:

$$\|v\|_{\mathcal{U}^t} := \left(\int_0^T \|v(\cdot, \cdot)\|_{\star}^2 dt \right)^{1/2}.$$

By standard arguments [10], integrating formally, we obtain the following variational formulation:

$$\begin{aligned} \text{Find } u(\cdot, \cdot) \in L^2(0, T, \mathcal{U}^t) \cap C^0(0, T, L^2(\mathcal{C})) \text{ such that } \sigma \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T, (\mathcal{U}^t)') \text{ and } \forall v \in \mathcal{U}^t : \\ \left\langle \sigma \frac{\partial u}{\partial t}, v \right\rangle_{\Omega(t)} + \int_{\Omega_1} \nu \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 d\Omega + \int_{\Omega_2} \nu \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 d\Omega = (J_z, v)_{\Omega}. \end{aligned} \quad (11)$$

Equation (11) can be intended in the sense of distributions in time (see [8]), $(\cdot, \cdot)_\Omega$ denotes the $L^2(\Omega)$ scalar product and J_z is the datum.

We adopt the notation:

$$a(u, v) = a_1(u_1, v_1) + a_2(u_2, v_2) = \int_{\Omega_1} \nu \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 \, d\Omega + \int_{\Omega_2} \nu \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 \, d\Omega. \quad (12)$$

The following Proposition is proved in [8].

Proposition 2.1 *Let $J_z \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$. The problem (11) is uniquely solvable and its solution u verifies (E_1) , (E_2) , (IC_1) , (IC_2) , (BC) and $(0C)$ in the sense of distributions.*

We pass now to study the regularity of the solution u of (11). We have:

Theorem 2.2 *Let $u \in L^2(0, T, \mathcal{U}^t) \cap C^0(0, T, L^2(\mathcal{C}))$ with $\sigma \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T, (\mathcal{U}^t)')$ be the solution of problem (11) for a given speed $\omega \in C^0(0, T)$. Let us suppose to be given with a convex domain. If $J_z \in H^1(0, T, L^2(\Omega_1))$, then we have:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T, L^2(\mathcal{C})) \text{ and } u \in L^2(0, T, \mathcal{H}^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, \mathcal{H}^1(\Omega)). \quad (13)$$

Moreover, assume $\sigma \in H^1(\Omega_1)$, $J_z \in H^1(0, T, \mathcal{H}^1(\Omega))$ and $w \in W^{1,1}(0, T)$, we have then:

$$u \in W^{1,\infty}(0, T, L^2(\mathcal{C})) \cap H^1(0, T, \mathcal{H}^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, \mathcal{H}^2(\Omega)). \quad (14)$$

Proof: For what concerns the proof of (13), we refer to Theorem 1.4 in [8] where it is proven that $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T, L^2(\mathcal{C}))$ and $u \in L^\infty(0, T, \mathcal{H}^1(\Omega))$. With these regularities, we get that any such solution of problem (11) is also a solution of (8). It remains to prove that actually $u \in L^2(0, T, \mathcal{H}^2(\Omega))$. Using the regularity of the datum and of the derivative in time of u in the equations (E_1) and (E_2) , we know that $\Delta u_i \in L^2(0, T, L^2(\Omega_i))$ for $i = 1, 2$. Now let

$$U(\mathbf{x}, t) = u(r_{-t}\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_1 \quad \text{and} \quad U(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_2. \quad (15)$$

The function U is the Eulerian transformation of u and, by using (IC_1) and (IC_2) of (8) together with the regularity of Δu_i , $i = 1, 2$, we obtain that $\Delta U \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$. Since the domain Ω is assumed to be convex, we have that $U \in L^2(0, T, H^2(\Omega))$.

Using again the transformation (15), we obtain then $u \in L^2(0, T, \mathcal{H}^2(\Omega))$.

PROOF OF (14). In order to prove this further regularity of the solution, we need to consider the equation verified by U . Computing the total derivatives with respect to time, we have

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla U$$

where \mathbf{V} is the speed associated to the rotor. The function U is the solution of the following problem:

$$\begin{aligned} \sigma_e \frac{\partial U}{\partial t} + \sigma_e \mathbf{V} \cdot \nabla U - \nu \Delta U &= J_e(\mathbf{x}, t) & \Omega \times]0, T[\\ U(\mathbf{x}, 0) &= 0 & \Omega \times \{0\} \\ U(\mathbf{x}, t) &= 0 & \partial\Omega \times]0, T[\end{aligned} \quad (16)$$

where, the first equation is intended in the sense of distribution and now the symbol ∂ stands for the Eulerian derivative, $\sigma_e(\mathbf{x}, t) = \sigma(r_{-t}\mathbf{x})$ and $J_e(\mathbf{x}, t) = J_z(r_{-t}\mathbf{x}, t)$ are the Eulerian transformation of σ and J_z respectively.

We set $\Psi = \frac{\partial U}{\partial t}$. The equation verified by Ψ can be found by derivating in time (16). We have:

$$\begin{aligned} \sigma_e \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_e}{\partial t} \Psi + \sigma_e \mathbf{V} \cdot \nabla \Psi - \nu \Delta \Psi &= \frac{\partial J_e}{\partial t} - \sigma_e \mathbf{A}_{\mathbf{V}} \cdot \nabla U - \frac{\partial \sigma_e}{\partial t} \mathbf{V} \cdot \nabla U & \Omega \times]0, T[\\ \sigma_e(\mathbf{x}, 0) \Psi(\mathbf{x}, 0) &= J_e(\mathbf{x}, 0) & \Omega_1 \times \{0\} \\ \Psi(\mathbf{x}, t) &= 0 & \partial \Omega \times]0, T[\end{aligned} \quad (17)$$

where $\mathbf{A}_{\mathbf{V}}$ is the derivative in time of the speed \mathbf{V} . Under our regularity assumptions on the data, problem (17) admits a unique solution $\Psi \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ with $\sigma_e \Psi \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$. By means of the variational formulation associated to problem (17), the following a-priori estimate holds:

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\sigma_e} \Psi\|_{L^\infty(0, T, L^2(\Omega_1))}^2 &+ \|\Psi\|_{L^2(0, T, H^1(\Omega))}^2 \leq \\ &C_1 \left[\|J_z\|_{H^1(0, T, H^1(\Omega))} + (|\omega|_{W^{1,1}(0, T)}^2 + \|\sigma\|_{H^1(\Omega_1)}) \|\nabla U\|_{L^\infty(0, T, L^2(\Omega))}^2 \right]. \end{aligned}$$

Recalling now the change of variables (15) and using the regularity result (13), we deduce that $u \in W^{1,\infty}(0, T, L^2(\mathcal{C})) \cap H^1(0, T, H^1(\Omega))$. Using then the same argument as at the beginning of the proof, we obtain also $u \in L^\infty(0, T, H^2(\Omega))$. \square

Since the existence of an angular speed verifying (E_4) and (IC_3) for a given torque in $L^1(0, T)$ is standard, we pass directly to the analysis of the coupled problem.

Theorem 2.3 *Let $J_z \in H^1(0, T, L^2(\Omega_1))$. The system of equations (8) admits at least one solution $(u, T_m, \omega) \in L^2(0, T, H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, H^1(\Omega)) \times L^2(0, T) \times C^0(0, T)$. For J large enough the solution is also unique.*

Proof: Let $T \in \mathbb{R}$ and $\mathcal{G} : C^0(0, T) \rightarrow C^0(0, T)$ be the open feedback operator, that associates to every angular speed $\bar{\omega} \in C^0(0, T)$, the angular speed ω calculated by means of (E_4) in (8) when the torque T_m is computed by means of the solution u of $(E_1), (E_2)$ associated with the speed $\bar{\omega}$.

Using the results obtained in Proposition 2.1, we know that the system $(E_1), (E_2), (IC_1), (IC_2), (BC), (0C)$ admits a unique solution $u \in L^2(0, T, \mathcal{U}^t) \cap C^0(0, T, L^2(\Omega))$. Now, thanks to the regularity results Theorem 2.2, in the “open feedback” system, for any $\bar{\omega} \in C^0(0, T)$, the integral in the equation (E_3) of (8) has meaning and moreover the resulting torque $T_m = T_m(t)$ belongs to $L^2(0, T)$.

Using finally (E_4) and (IC_3) , we find the angular speed ω which turns out to belong to $H^1(0, T)$. Moreover the following stability holds:

$$\|\omega\|_{H^1(0, T)} \leq C \|\bar{\omega}\|_{C^0(0, T)}.$$

Since the embedding $H^1(0, T) \hookrightarrow C^0(0, T)$ is compact the operator \mathcal{G} is also compact. By applying the Schauder fixed-point theorem (see [15]), we deduce that \mathcal{G} has at least one fixed point which corresponds to a solution of the system (8).

It is not difficult to see that, when J is large enough, the operator \mathcal{G} is also contractive and, by applying the Banach fixed-point theorem, we have that such a fixed point is also unique. \square

Remark 2.4 *Theorem 2.3 uses only the statement (13) and not (14). Actually (14) will be necessary in the proof of the convergence of the numerical method in the next Section.*

3 Discretization of (8)

In any discretized version of the coupled problem, the discrete solution at time $t = t^n$ is computed by means of the “calculated speed” and not of the exact one since this one is an unknown of the problem. The fact of using the wrong speed surely affects the accuracy of the approximation. This “error” depends on the stability of the solution of the problem (11) with respect to a “perturbation” of the rotation operator r_t involved in the definition of the space \mathcal{U}^t . In the next Lemma, we analyze this stability. In all what follows, we assume that $\sigma \in H^1(\Omega_1)$, $\mathbf{J}_z \in H^1(0, T, H^1(\Omega_1))$ and $\omega \in W^{1,1}(0, T)$.

Lemma 3.1 *Let $\omega, \tilde{\omega} \in C^0(0, T)$ be two different rotation speeds and $\theta, \tilde{\theta}$ be the corresponding rotation angles. Let \mathcal{U}^t and $\tilde{\mathcal{U}}^t$ be the two associated functional spaces defined by means of (10) and, u and \tilde{u} be the corresponding solution of (11). The following stability holds:*

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^2(0, T, \mathcal{H}^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T, L^2(C))}^2 \leq C \|\theta - \tilde{\theta}\|_{L^2([0, T])}^2. \quad (18)$$

Proof: In this proof, without loss of generality, we set $\nu = 1$. Let R_t be the rotation operator acting on functions, namely $R_t : H^1(\Omega_1) \rightarrow H^1(\Omega_1)$ defined as $R_t v(\mathbf{x}) = v(r_t \mathbf{x})$ a.e. $\mathbf{x} \in \Omega_1$. From (8) and (11), the solutions u and \tilde{u} verify respectively:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \sigma \frac{\partial u}{\partial t} v d\Omega + a(u, v) + \int_{\Gamma} \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}} (R_{-t} v_1 - v_2) d\Gamma &= (\mathbf{J}_z, v)_\Omega, \quad \forall v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega); \\ \int_{\Omega_1} \sigma \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} v d\Omega + a(\tilde{u}, v) + \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \mathbf{n}} (\tilde{R}_{-t} v_1 - v_2) d\Gamma &= (\mathbf{J}_z, v)_\Omega, \quad \forall v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Choosing in both equations $v = u - \tilde{u}$, taking the difference between the two equations and recalling that $\tilde{R}_{-t} \tilde{u}_1|_\Gamma = \tilde{u}_2|_\Gamma$ and $R_{-t} u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma$, we have:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \sigma (u - \tilde{u})^2 d\Omega + a(u - \tilde{u}, u - \tilde{u}) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}} (-R_{-t} \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \mathbf{n}} (\tilde{R}_{-t} u_1 - u_2) d\Gamma \quad (19)$$

We have now to estimate the right hand side (rhs) of (19); it is not hard to see that the following holds:

$$\text{rhs of (19)} = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}} \right) (\tilde{R}_{-t} u_1 - u_2) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}} (\tilde{R}_{-t} u_1 - u_2 + R_{-t} \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2) d\Gamma;$$

rearranging the terms, we obtain:

$$\text{rhs of (19)} \leq \left\| \frac{\partial(u_2 - \tilde{u}_2)}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{-1/2, \Gamma} \|\tilde{R}_{-t} u_1 - R_{-t} u_1\|_{1/2, \Gamma} + \int_{\Gamma} \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}} (\tilde{R}_{-t}(u_1 - \tilde{u}_1) - R_{-t}(u_1 - \tilde{u}_1)) d\Gamma. \quad (20)$$

Applying Lemma 3.4 in [8] to the function $u_2 - \tilde{u}_2$ and to its first derivative, by standard interpolation theory [3] and by the trace theorem, we obtain:

$$\|\tilde{R}_{-t} u_1 - R_{-t} u_1\|_{1/2, \Gamma} \leq C |\theta(t) - \tilde{\theta}(t)| \|u_1\|_{3/2, \Gamma} \leq C |\theta(t) - \tilde{\theta}(t)| \|u_1\|_{2, \Omega_1}.$$

Moreover, concerning the second term in the right hand side of (20), using again Lemma 3.4 in [8] and rearranging terms:

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}} (\tilde{R}_{-t}(u_1 - \tilde{u}_1) - R_{-t}(u_1 - \tilde{u}_1)) d\Gamma \leq C \left\| \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{0, \Gamma} |\theta(t) - \tilde{\theta}(t)| \|u_1 - \tilde{u}_1\|_{1, \Gamma};$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}} (\tilde{R}_{-t}(u_1 - \tilde{u}_1) - R_{-t}(u_1 - \tilde{u}_1)) d\Gamma &= \int_{\Gamma} (\tilde{R}_{-t} \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}} - R_{-t} \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}}) (u_1 - \tilde{u}_1) d\Gamma \\
&\leq C \left\| \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{1,\Gamma} |\theta(t) - \tilde{\theta}(t)| \|u_1 - \tilde{u}_1\|_{0,\Gamma}.
\end{aligned}$$

By standard interpolation theory [3] and using the Neumann transmission condition (IC_2) in (8):

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}} (\tilde{R}_{-t}(u_1 - \tilde{u}_1) - R_{-t}(u_1 - \tilde{u}_1)) d\Gamma \leq C \|u_1\|_{2,\Omega_1} |\theta(t) - \tilde{\theta}(t)| \|u_1 - \tilde{u}_1\|_{1/2,\Gamma}.$$

Collecting these inequalities, we obtain from (20):

$$\text{rhs of (19)} \leq C_1 \|u_2 - \tilde{u}_2\|_{1,\Omega_2} |\theta(t) - \tilde{\theta}(t)| \|u_1\|_{2,\Omega_1} + C_2 |\theta(t) - \tilde{\theta}(t)| \|u_1\|_{2,\Omega_1} \|u_1 - \tilde{u}_1\|_{1/2,\Gamma}; \quad (21)$$

and, by the same argument:

$$\|u_1 - \tilde{u}_1\|_{1/2,\Gamma} \leq \|u_2 - \tilde{u}_2\|_{1,\Omega_2} + C_3 |\theta(t) - \tilde{\theta}(t)| \|u_1\|_{2,\Omega_1}. \quad (22)$$

Using now (21) and (22) in (19) together with the Poincaré inequality, we get:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \sigma(u - \tilde{u})^2 d\Omega + \|u_1 - \tilde{u}_1\|_{1,\Omega_1}^2 + \|u_2 - \tilde{u}_2\|_{1,\Omega_2}^2 \\
&\leq C_4 \|u\|_{\mathcal{H}^2(\Omega)} |\theta(t) - \tilde{\theta}(t)| \|u_2 - \tilde{u}_2\|_{1,\Omega_2} + C_5 \|u\|_{\mathcal{H}^2(\Omega)}^2 |\theta(t) - \tilde{\theta}(t)|^2.
\end{aligned}$$

By the Cauchy-Schwartz inequality and integrating in time:

$$\int_{\Omega} \sigma(u - \tilde{u})^2 d\Omega + \int_0^t (\|u_1 - \tilde{u}_1\|_{1,\Omega_1}^2 dt + \|u_2 - \tilde{u}_2\|_{1,\Omega_2}^2) \leq C \int_0^t |\theta(t) - \tilde{\theta}(t)|^2 dt.$$

Using again (22), the proof is completed. \square

3.1 Spatial discretization of (E_1) , (E_2)

For what concerns the spatial discretization of (E_1) , (E_2) , we adopt the same technique which has been already presented in [8]. We repeat here only the definition of the discrete spaces as well as the main convergence theorems without proofs.

With the same notation as in Lemma 3.1, we call $\tilde{\omega}(t)$ and $\tilde{\theta}(t)$ a rotation speed and rotation angle, $\tilde{r}_t : \Omega_1 \rightarrow \Omega_1$ and $\tilde{R}_t : H^1(\Omega_1) \rightarrow H^1(\Omega_1)$ the associated rotation operators. These quantities will play the role of the computed rotation speed and angle afterwards. Accordingly, we make use of the functional space \tilde{U}^t defined as in (10), but by means of \tilde{r}_t .

Let $\mathcal{T}_{1,h}$ and $\mathcal{T}_{2,h}$ be two families of curved triangulations for Ω_1 and Ω_2 respectively such that:

$$\bigcup_{K \in \mathcal{T}_{1,h_1}} \bar{K} \equiv \bar{\Omega}_1 \quad \bigcup_{K \in \mathcal{T}_{2,h_2}} \bar{K} \equiv \bar{\Omega}_2.$$

We assume that only the triangles with one edge on Γ are curved and that $\mathcal{T}_{i,h}$, $i = 1, 2$ are regular in the sense of Ciarlet (see [9] for details), non-matching at the interface Γ . For the sake of simplicity we suppose that $\mathcal{T}_{1,h}$ and $\mathcal{T}_{2,h}$ have about the same mesh size, namely h . We refer to [4] for the analysis of the approximation properties of curved finite elements.

We denote by \hat{K} the reference triangle and for every $K \in \mathcal{T}_{1,h} \cup \mathcal{T}_{2,h}$ we define as application $F_K : \hat{K} \rightarrow K$. As it is standard, this application is affine for the triangles which do not have any edge on Γ . Thanks to the regularity of Γ , this application can be chosen regular and invertible for the triangles which have one (or more) edge(s) on Γ .

We introduce the following spaces of finite elements for $i = 1, 2$:

$$X_{i,h} = \{v_{i,h} \in C^0(\overline{\Omega}_i) \text{ such that } v_{2,h}|_{\partial\Omega} = 0 \text{ and } v_{i,h}|_K \circ F_K^{-1} \in \mathcal{P}_1(\hat{K}) \quad \forall K \in \mathcal{T}_{i,h}\}. \quad (23)$$

For the sake of simplicity, we consider only the case of P_1 polynomials, but the case of P_k polynomials is equivalent.

As in [8] we call M_h the space of traces of $X_{2,h}$ at Γ and we define the following approximation space:

$$\tilde{\mathcal{U}}_h^t = \{ \tilde{v}_h = (\tilde{v}_{1,h}, \tilde{v}_{2,h}) \in X_{1,h} \times X_{2,h} \text{ such that} \quad (24)$$

$$\int_{\Gamma} (\tilde{v}_{1,h}(\tilde{r}_{-t}\mathbf{x}) - \tilde{v}_{2,h}(\mathbf{x})) \varphi_h(\mathbf{x}) d\Gamma = 0 \quad \forall \varphi_h \in M_h \} \quad (25)$$

at every fixed time t . The constraint (25) is time-dependent and it is the discrete weak version of the interface condition (IC_1) in the continuous problem (8).

The semi-discrete variational problem reads:

$$\begin{aligned} \text{Find } \tilde{u}_h(\cdot, \cdot) \in L^2(0, T, \tilde{\mathcal{U}}_h^t) \cap C^0(0, T, L^2(\Omega)) \text{ such that :} \\ \int_{\Omega} \sigma \frac{\partial \tilde{u}_h}{\partial t} \tilde{v}_h d\Omega + a(\tilde{u}_h, \tilde{v}_h) = \int_{\Omega} \mathbf{J}_z \tilde{v}_h d\Omega \quad \forall \tilde{v}_h \in \tilde{\mathcal{U}}_h^t. \end{aligned} \quad (26)$$

For the approximation properties of the family of discrete spaces $\tilde{\mathcal{U}}_h^t$ and for the coerciveness of the bilinear form $a(\cdot, \cdot)$ defined in (12) with respect to the norm $\|\cdot\|_*$, we refer to [5] or [2].

Remark 3.2 According to [8], curved finite elements could be replaced by standard (flat) finite elements. In this case, the definition of the approximation space is slightly different since the integral (25) has no more sense. The error estimate in this case has been done in [8].

For the sake of simplicity, we refer here only to curved finite elements. In Section 4, the numerical results are instead related to a standard (flat) finite elements approximation.

3.2 Full discretization, coupled system

In this Section we construct the full discrete system. To this aim, we introduce a uniform partition of the time interval $[0, T]$. Let δt be the time step and N be an integer such that $T = N \delta t$. Since the time discretization involves also a “discretization” in time of the space of test functions and of the rotation operators, we shorten our notation in the following way:

$$\begin{aligned} t^n = n \delta t, \quad \tilde{\theta}(t^n) = \tilde{\theta}^n, \quad \tilde{r}_{t^n} = \tilde{r}_n \\ \tilde{u}^n \in \tilde{\mathcal{U}}^{t^n} = \tilde{\mathcal{U}}^n, \quad \tilde{u}_h^n \in \tilde{\mathcal{U}}_h^{t^n} = \tilde{\mathcal{U}}_h^n. \end{aligned}$$

We denote by u^n and \tilde{u}^n the solution of the continuous problem (11) stated in \mathcal{U}^t and in $\tilde{\mathcal{U}}^t$ respectively, evaluated at $t = t^n$. Figure 2 presents the “explicit” coupling procedure we use to solve problem (8).

At each time step, say $t = t^n$, we are given with the angle θ_h^n and the magnetic vector potential u_h^{n-1} at the previous time step. The space $\tilde{\mathcal{U}}_h^n$ is now set to be the space associated to the rotation

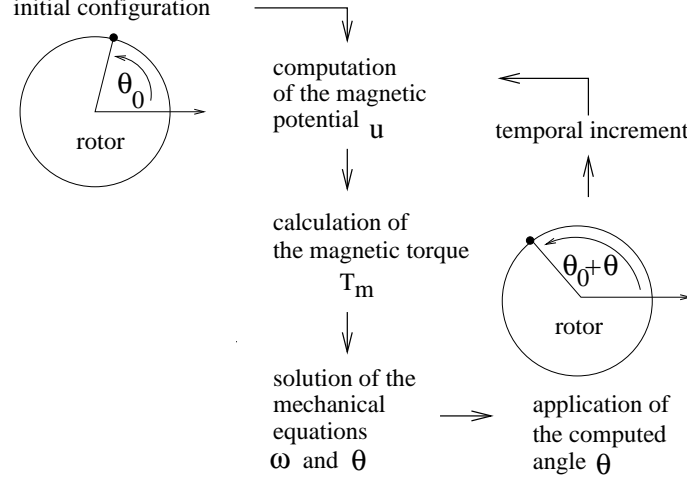


Figure 2: Flowchart of the “explicit” coupling procedure. The procedure ends when the rotor reaches the equilibrium position, corresponding to a zero-value for the acting magnetic torque T_m .

\tilde{r}_n of the angle θ_h^n . The magnetic vector potential is computed by means of the fully discrete equation which is obtained by using the implicit Euler method for the time discretization of (26):

$$\begin{aligned} &\text{find } \tilde{u}_h^n \in \tilde{\mathcal{U}}_h^n \text{ such that :} \\ &\int_{\mathcal{C}} \partial_{\delta t} \tilde{u}_h^n \tilde{v}_h^n d\Omega + a(\tilde{u}_h^n, \tilde{v}_h^n) = (J_z, \tilde{v}_h^n)_{\Omega_1} \quad \forall \tilde{v}_h^n \in \tilde{\mathcal{U}}_h^n. \end{aligned} \quad (27)$$

where $\partial_{\delta t} \tilde{u}_h^n$ stands for $\frac{\tilde{u}_h^n - \tilde{u}_h^{n-1}}{\delta t}$.

Now, the torque value at time t^n can be computed by means of known quantities as:

$$T_h^n = \int_{\Omega_1} (-\sigma \partial_{\delta t} \tilde{u}_h^n + J_z) \mathbf{r} \cdot \mathbf{curl}_2 \tilde{u}_h^n d\Omega. \quad (28)$$

Its value is used to compute the actual speed at $t = t^n$, by the equation obtained applying again the implicit Euler method to the equation (E_4) in (8):

$$\begin{aligned} &\text{Find } \omega_h^n \text{ such that} \\ &J \frac{\omega_h^n - \omega_h^{n-1}}{\delta t} + k \omega_h^n = T_h^n. \end{aligned} \quad (29)$$

Finally, once we have the angular speed the new angle is computed by the equation:

$$\theta_h^{n+1} = \theta_h^n + \delta t \omega_h^n. \quad (30)$$

Now the feedback in Figure 2 is closed and, starting again, the procedure allows the computation of the new value of the magnetic vector potential u_h^{n+1} at the further time step by induction.

4 Error analysis

Several errors have to be taken into account when we want to study the approximation properties of the procedure described in the previous Section. We start considering separately the discretization errors in the equations (27), (28), (29), (30). Then, all the obtained estimates will be collected in order to prove that the discrete coupled scheme is stable and an optimal error estimate holds (Theorem 4.4).

Let $\tilde{\omega}$ and $\tilde{\theta}$ be the piecewise linear continuous interpolants of the values ω_h^n and $\tilde{\theta}_h^n$ respectively. Namely we set $\tilde{\omega}(t^n) = \omega_h^n$ and $\tilde{\theta}(t^n) = \tilde{\theta}_h^n$ for any $n = 1, \dots, N$. The following convergence Theorem is proved in [8]:

Proposition 4.1 *Let $\tilde{u} \in L^2(0, T, \tilde{\mathcal{U}}^t) \cap C^0(0, T, L^2(\Omega))$ be the solution of problem (11) when \mathcal{U}^t is replaced by $\tilde{\mathcal{U}}^t$. Moreover we assume that:*

$$\tilde{u} \in L^\infty(0, T, \mathcal{H}^2(\Omega)) ; \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \in L^2(0, T, \mathcal{H}^2(\Omega)) ; \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \in L^2(0, T, L^2(\Omega)).$$

The following estimates hold:

$$(1 - \delta t) \|\sqrt{\sigma}(\tilde{u}^n - \tilde{u}_h^n)\|_{0,\Omega}^2 + \alpha \delta t \|\tilde{u}^n - \tilde{u}_h^n\|_\star^2 \leq \|\sqrt{\sigma}(\tilde{u}^{n-1} - \tilde{u}_h^{n-1})\|_{0,\Omega}^2 + C|\tilde{\omega}|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n)}^2 \delta t (h^2 + \delta t^2)$$

$$\|\tilde{u}^n - \tilde{u}_h^n\|_{0,\Omega}^2 + \alpha \sum_{i=1}^n \delta t \|\tilde{u}^i - \tilde{u}_h^i\|_\star^2 \leq C(T) |\tilde{\omega}|_{L^\infty(0, T)}^2 (h^2 + \delta t^2). \quad (31)$$

Coupling this result with a local (in time) version of the stability estimate given in Lemma 3.1, we directly obtain the following convergence theorem:

Theorem 4.2 *Let u be the solution of (11), $u^n = u(t^n)$, and \tilde{u}_h^n , $n = 1, \dots, N$ be the solution of (27). We assume that u verifies the regularity hypotheses of Proposition 4.1; then the following error estimate holds:*

$$(1 - \delta t) \|\sqrt{\sigma}(u^n - \tilde{u}_h^n)\|_{0,C}^2 + \alpha \int_{t^{n-1}}^{t^n} \|u - \tilde{u}_h\|_\star^2 dt \leq \|\sqrt{\sigma}(u^{n-1} - \tilde{u}_h^{n-1})\|_{0,C}^2 +$$

$$+ C |\tilde{\omega}|_{L^\infty(t^{n-1}, t^n)}^2 \delta t (h^2 + \delta t^2) + C^\star \int_{t^{n-1}}^{t^n} |\theta - \tilde{\theta}|^2(t) dt. \quad (32)$$

The proof of this theorem follows directly from Lemma 3.1 and Proposition 4.1.

Concerning the torque, we need some stability on the error between the exact torque at time t^n , $T_m(t^n) = T^n$, and the computed torque at the same time, namely T_h^n . The following Proposition holds:

Proposition 4.3 *Let T_m be the torque which is the solution of the continuous coupled problem (8), $T^n = T_m(t^n)$ and T_h^n be given by (28) where \tilde{u}_h^n is the solution of the problem (27).*

If $J_z \in H^1(0, T, L^2(\Omega_1))$, there exists a sufficiently small $h_0 \in \mathbb{R}$ such that for any $h \leq h_0$ the following estimate holds:

$$|T^n - T_h^n|^2 \leq C(\|u\|_{L^\infty(0, T, H^2(\Omega_1))}) [\|u^n - \tilde{u}_h^n\|_{1,\Omega_1}^2 + (h^2 + \delta t^2)]. \quad (33)$$

Proof: In this proof, we refer only to the non-linear part of the torque (the quadratic one) since the estimate (33) on the linear part is straightforward. That is, in this proof, we set $J_z \equiv 0$. Moreover we use the assumption (made at the beginning of Section 1) that the conductor is strictly included in

the rotating part Ω_1 . In the following we shorten our notation and we denote by $\partial_t u$ the derivative in time of u .

By standard arguments, we obtain:

$$|\mathbf{T}^n - \mathbf{T}_h^n|^2 \leq 2c \|\mathbf{curl}_2 u\|_{1,\Omega_1}^2 \|\sigma \partial_t u(t^n) - \sigma \partial_{\delta t} \tilde{u}_h^n\|_{-1,\Omega_1}^2 + 2 \|\sigma \partial_{\delta t} \tilde{u}_h^n\|_{0,\Omega_1}^2 \|u^n - \tilde{u}_h^n\|_{1,\Omega_1}^2 \quad (34)$$

where the constant c depends on the distance between $\partial\Omega_1$ and \mathcal{C} .

Rearranging terms, we have that:

$$|\mathbf{T}^n - \mathbf{T}_h^n|^2 \leq C (\|\mathbf{curl}_2 u\|_{1,\Omega_1}^2 + \|\sigma \partial_{\delta t} \tilde{u}_h^n\|_{0,\Omega_1}^2) (\|\sigma \partial_t u(t^n) - \sigma \partial_{\delta t} \tilde{u}_h^n\|_{-1,\Omega_1}^2 + \|u^n - \tilde{u}_h^n\|_{1,\Omega_1}^2).$$

Now, the proof is split into two steps:

- we prove that $\|\sigma \partial_{\delta t} \tilde{u}_h^n\|_{0,\Omega_1}^2$ is bounded uniformly with respect to h and δt ;
- we give an asymptotic bound for the quantity $\|\sigma \partial_t u(t^n) - \sigma \partial_{\delta t} \tilde{u}_h^n\|_{-1,\Omega_1}^2$ with respect to the H^1 -error.

- FIRST STEP - This is a delicate proof which involves the construction of a suitable projection operator.

We denote by $\{\varphi_k\}_{1 \leq k \leq K}$ the basis functions of the Lagrange finite element of degree one associated with the nodes $\{\mathbf{x}_k\}_{1 \leq k \leq K}$ of $\mathcal{T}_{1,h}$. We define an operator $\mathcal{P}_h : X_{1,h} \rightarrow X_{1,h} \cap H_0^1(\Omega_1)$ as $\mathcal{P}_h(\varphi_k) = I_h(\chi \varphi_k)$ where χ is a regular function from Ω to the interval $[0, 1]$ such that $\chi = 1$ on every triangle $T \in \mathcal{T}_{1,h}$ verifying $\bar{T} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ and $\chi = 0$ on any triangle $T \in \mathcal{T}_{1,h}$ verifying $\bar{T} \cap \partial\Omega_1 \neq \emptyset$. Thanks to the assumption $\partial\mathcal{C} \cap \partial\Omega_1 \neq \emptyset$ which has been done at the beginning of Section 1, the construction of such a function χ is possible when the mesh size is sufficiently small. Few layers of triangles are needed between $\partial\mathcal{C}$ and $\partial\Omega_1$.

It is not hard to see that \mathcal{P}_h is well-defined and continuous with respect to the L^2 -norm and the \mathcal{H}^1 -norm.

Let now $\mathcal{P}_h^* : X_{1,h} \cap H_0^1(\Omega_1) \rightarrow X_{1,h}$ be its adjoint operator with respect to the bilinear form $a_1(u_h, v_h)$ (see (12) for the definition). Namely, we have:

$$a_1(u_h, \mathcal{P}_h(v_h)) = a_1(\mathcal{P}_h^*(u_h), v_h).$$

We set $\mathcal{P}_h^*(\varphi_\ell) = \sum_{i=1}^K \alpha_i^* \varphi_i$ for any ℓ , ($1 \leq \ell \leq K$). Then, the following holds:

$$\begin{aligned} \forall \ell, \text{ if } (a_1(\varphi_\ell, \varphi_k) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{P}_h(\varphi_k) = \varphi_k), \text{ then } \mathcal{P}_h^*(\varphi_\ell) = \varphi_\ell \\ \forall \ell, \text{ if } (a_1(\varphi_\ell, \varphi_k) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{P}_h(\varphi_k) = 0), \text{ then } \mathcal{P}_h^*(\varphi_\ell) = 0. \end{aligned}$$

Thanks to our construction, this automatically implies that $\mathcal{P}_h^*(u_h) \in H_0^1(\Omega_1)$ and also $\mathcal{P}_h^*(u_h)|_{\mathcal{C}} \equiv u_h|_{\mathcal{C}}$.

Using now the equation (27) at time $t = t^n$ and $t = t^{n-1}$, we easily get:

$$\int_{\Omega_1} \sigma \partial_{\delta t} (\tilde{u}_h^n - \tilde{u}_h^{n-1}) v_h \, d\Omega + a_1(\tilde{u}_h^n - \tilde{u}_h^{n-1}, v_h) = \int_{\Omega_1} (J_z^n - J_z^{n-1}) v_h \, d\Omega \quad \forall v_h \in X_{1,h} \cap H_0^1(\Omega_1).$$

Choosing $v_h = \mathcal{P}_h^* \mathcal{P}_h(\partial_{\delta t} \tilde{u}_h^n)$ as the test function, we have:

$$\int_{\Omega_1} \sigma (\partial_{\delta t} \tilde{u}_h^n)^2 \, d\Omega + 2\alpha \delta t \|\mathcal{P}_h(\partial_{\delta t} \tilde{u}_h^n)\|_{1,\Omega_1}^2 \leq \int_{\Omega_1} \sigma (\partial_{\delta t} \tilde{u}_h^{n-1})^2 \, d\Omega + C \delta t \|\mathcal{P}_h(\partial_{\delta t} \tilde{u}_h^n)\|_{1,\Omega_1} \|\partial_{\delta t} J_z^n\|_{0,\Omega_1}$$

where C is the continuity constant of \mathcal{P}_h^* with respect to the \mathcal{H}^1 -norm. Now, we can apply the Young inequality to the last term in a way that the terms depending on the projector are simplified.

At the end, we obtain:

$$\int_{\Omega_1} \sigma(\partial_{\delta t} \tilde{u}_h^n)^2 d\Omega \leq C \sum_{n=1}^N \delta t \|\partial_{\delta t} J_z^n\|_{0,\Omega_1}^2 + \int_{\Omega_1} \sigma(\partial_{\delta t} \tilde{u}_h^1)^2 d\Omega$$

and the right hand side is asymptotically bounded every time that $J_z \in H^1(0, T, L^2(\Omega_1))$ (to compare with the regularity assumptions in Theorem 2.2).

- SECOND STEP - First of all note that, for any $w_h^n \in \tilde{U}_h^n$

$$\|\sigma \partial_t u(t^n) - \sigma \partial_{\delta t} \tilde{u}_h^n\|_{-1,\Omega_1}^2 \leq 2 \|\sigma \partial_{\delta t}(\tilde{u}_h^n - w_h^n)\|_{-1,\Omega_1}^2 + 2 \|\sigma \partial_t u(t^n) - \sigma \partial_{\delta t} w_h^n\|_{-1,\Omega_1}^2. \quad (35)$$

For what concerns the second term in the right hand side, since we are working only “inside” the rotating part, the error due to the rotation does not affect the estimate. This term can then be standardly estimated making use of the regularity stated in Theorem 2.2.

Concerning the first term, we use the variational formulation (27): let $\xi_h^n = \tilde{u}_h^n - w_h^n$, we have:

$$\int_{\Omega_1} \sigma \partial_{\delta t} \xi_h^n v_h d\Omega + a(\xi_h^n, v_h) = \int_{\Omega_1} \sigma(\partial_t u - \partial_{\delta t} w_h^n) v_h d\Omega + a(u - w_h^n, v_h) \quad \forall v_h \in X_{1,h} \cap H_0^1(\Omega_1). \quad (36)$$

Thanks to the quasi-uniformity of the mesh, it is not hard to see that the L^2 projector $\Pi_2 : L^2(\Omega_1) \rightarrow X_{1,h}$ is also continuous from $H_0^1(\Omega_1)$ to $H_0^1(\Omega_1) \cap X_{1,h}$. As a consequence, the following inequality holds:

$$\|\sigma \partial_{\delta t} \xi_h^n\|_{-1,\Omega_1} \leq \sup_{v_h \in X_{1,h} \cap H_0^1(\Omega_1)} \frac{\int_{\Omega_1} \sigma \partial_{\delta t} \xi_h^n v_h}{\|v_h\|_{1,\Omega_1}}.$$

From (36), we immediately have:

$$\|\sigma \partial_{\delta t}(\tilde{u}_h^n - w_h^n)\|_{-1,\Omega_1} \leq \sup_{v_h \in X_{1,h} \cap H_0^1(\Omega_1)} \frac{a(\xi_h^n, v_h)}{\|v_h\|_{1,\Omega_1}} + \|u - w_h^n\|_* + \|\sigma(\partial_t u(t^n) - \partial_{\delta t} w_h^n)\|_{-1,\Omega_1}.$$

By the same argument as before, we have:

$$\|\sigma \partial_{\delta t}(\tilde{u}_h^n - w_h^n)\|_{-1,\Omega_1} \leq C_1 \|\xi_h^n\|_{1,\Omega_1} + C_2(h + \delta t); \quad (37)$$

hence

$$\|\sigma(\partial_t u(t^n) - \partial_{\delta t} \tilde{u}_h^n)\|_{-1,\Omega_1} \leq C(\|u_h^n - \tilde{u}_h^n\|_{1,\Omega_1} + h + \delta t); \quad (38)$$

using (38) in (34), the proof is completed. \square

For what concerns now the computed angular speed w_h^n , we simply need to compare it with the (discrete) solution of the following problem:

$$\begin{aligned} \text{find } \omega^n, n = 1, \dots, N \text{ such that} \\ J \frac{\omega^n - \omega^{n-1}}{\delta t} + k\omega^n = T^n \end{aligned} \quad (39)$$

which corresponds to (29), but with an “exact” right hand side.

Since problems (39) and (29) are stable, it is immediate to see that

$$(J + \delta t(2k - \frac{1}{4\beta J}))|\omega^n - \omega_h^n|^2 \leq J \{|\omega^{n-1} - \omega_h^{n-1}|^2 + \beta \delta t |T^n - T_h^n|^2\}; \quad (40)$$

where the constant $\beta > 0$ can be chosen arbitrarily. By the Gronswall's lemma we also have that:

$$|\omega^n - \omega_h^n|^2 \leq C(T, \beta, J) \sum_{i=1}^n \delta t |\mathbf{T}^i - \mathbf{T}_h^i|^2. \quad (41)$$

Concerning the rotation angle, we set then $\theta^{n+1} = \theta^n + \delta t \omega^n$ and it can be easily shown that:

$$|\theta^{n+1} - \theta_h^{n+1}|^2 \leq (1 + \delta t) |\theta^n - \theta_h^n|^2 + 2\delta t |\omega^n - \omega_h^n|^2. \quad (42)$$

Collecting all the previous results, we obtain the stability and the convergence of the coupled discrete scheme proposed in Section 3.2. The following Theorem holds:

Theorem 4.4 *Under the assumptions of Theorem 4.2, the following error estimate holds:*

$$\|\sqrt{\sigma}(u^n - \tilde{u}_h^n)\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^n \delta t \|u^i - \tilde{u}_h^i\|_*^2 + |w^n - w_h^n|^2 + |\theta^{n+1} - \theta_h^{n+1}|^2 + \sum_{i=1}^n \delta t |\mathbf{T}^i - \mathbf{T}_h^i|^2 \leq C(h^2 + \delta t^2) \quad (43)$$

where the constants C is independent of h , δt and the rotation speed.

Proof: We simply need to collect the convergence and stability inequalities that we obtained previously. Namely, from Theorem 4.2, the inequalities (40), (42) and Proposition 4.3, we obtain the following system:

$$\begin{aligned} (1 - \delta t) \|\sqrt{\sigma}(u^n - \tilde{u}_h^n)\|_{0,\Omega}^2 + \alpha \delta t \|u^n - \tilde{u}_h^n\|_*^2 &\leq \|\sqrt{\sigma}(u^{n-1} - \tilde{u}_h^{n-1})\|_{0,\Omega}^2 + C|\omega_h^n|^2 \delta t (h^2 + \delta t^2) + C^* \delta t |\theta^n - \theta_h^n|^2; \\ (J + \delta t(2k - \frac{1}{4\beta J})) |w^n - w_h^n|^2 &\leq J|\omega^{n-1} - \omega_h^{n-1}|^2 + J\beta \delta t |\mathbf{T}^n - \mathbf{T}_h^n|^2; \\ |\theta^{n+1} - \theta_h^{n+1}|^2 &\leq (1 + \delta t) |\theta^n - \theta_h^n|^2 + 2\delta t |\omega^n - \omega_h^n|^2; \\ |\mathbf{T}^n - \mathbf{T}_h^n|^2 &\leq C_c [\|u^n - \tilde{u}_h^n\|_{1,\Omega_1}^2 + (h^2 + \delta t^2)]. \end{aligned} \quad (44)$$

Now, after setting $\gamma = \frac{1}{J}(2k - \frac{1}{4\beta})$, $\eta = \frac{\alpha}{4C_c}$, we make a suitable weighted sum and we obtain:

$$\begin{aligned} (1 - \delta t) \|\sqrt{\sigma}(u^n - \tilde{u}_h^n)\|_{0,\Omega}^2 + \alpha \delta t \|u^n - \tilde{u}_h^n\|_*^2 + (1 + \gamma \delta t) |\omega^n - \omega_h^n|^2 + |\theta^{n+1} - \theta_h^{n+1}|^2 + \eta \delta t |\mathbf{T}^n - \mathbf{T}_h^n|^2 \\ \leq \|\sqrt{\sigma}(u^{n-1} - \tilde{u}_h^{n-1})\|_{0,\Omega}^2 + C^* \delta t |\theta^n - \theta_h^n|^2 + 2C(|\omega^n - \omega_h^n|^2 + |w^n|^2) \delta t (h^2 + \delta t^2) \\ + |\omega^{n-1} - \omega_h^{n-1}|^2 + \beta \delta t |\mathbf{T}^n - \mathbf{T}_h^n|^2 + (1 + \delta t) |\theta^n - \theta_h^n|^2 + 2\delta t |\omega^n - \omega_h^n|^2 \\ + \frac{\alpha}{4} \delta t \|u^n - \tilde{u}_h^n\|_{1,\Omega_1}^2 + \frac{\alpha}{4} \delta t (h^2 + \delta t^2). \end{aligned} \quad (45)$$

Choosing $\beta = \eta/2$, and rearranging terms, we get:

$$\begin{aligned} (1 - \delta t) \|\sqrt{\sigma}(u^n - \tilde{u}_h^n)\|_{0,\Omega}^2 + c_1 \delta t \|u^n - \tilde{u}_h^n\|_*^2 + (1 + c_2 \delta t) |\omega^n - \omega_h^n|^2 + |\theta^{n+1} - \theta_h^{n+1}|^2 + c_3 \delta t |\mathbf{T}^n - \mathbf{T}_h^n|^2 \\ \leq \|\sqrt{\sigma}(u^{n-1} - \tilde{u}_h^{n-1})\|_{0,\Omega}^2 + |\omega^{n-1} - \omega_h^{n-1}|^2 + (1 + c_4 \delta t) |\theta^n - \theta_h^n|^2 + c_5 \delta t (\delta t^2 + h^2); \end{aligned} \quad (46)$$

where $c_i \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq 5$) are uniform positive constants. Finally, applying the Gronswall's lemma, we obtain the estimate (43). \square

Remark 4.5 *An immediate Corollary of the previous statement is that the explicit coupling procedure proposed in Section 3.2 is stable without any constraint between the time step and the spatial discretization parameter h .*

5 Numerical results

In this section, we present some numerical results related to the considered system. First, by varying the behavior of the mechanical entities (θ , ω , T_m), we describe how, in a damping machine, the induced currents slow down the movement of the rotating part. Since we are working with a 2D approximation of a 3D system, all measured quantities are to be intended as approximations per unit of length of the physical ones. Second, we present an analysis of the method precision, studying the dependence of the computed quantities on the space and time discretization steps.

5.1 Problem geometry and physical parameters

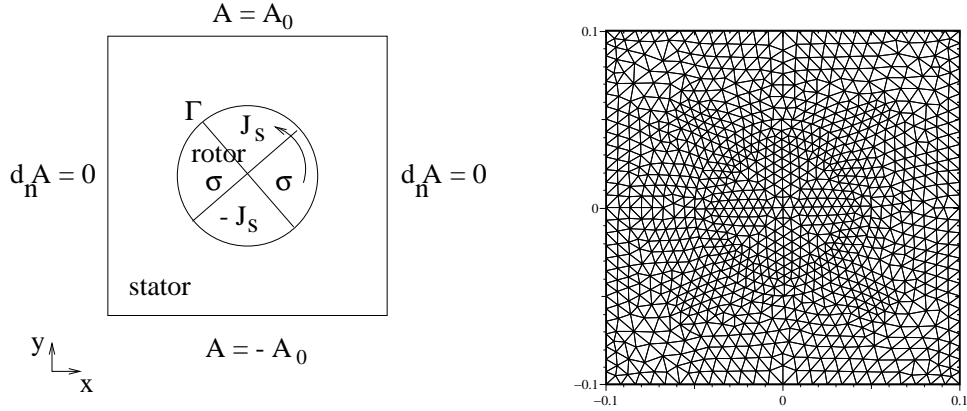


Figure 3: On the left, the problem geometry with boundary conditions and physical parameters distribution. The square edge is $L = 2 \cdot 10^{-1}$ m, the circle radius is $R = 5 \cdot 10^{-2}$ m and $A_0 = 2.5 \cdot 10^{-2}$ T/m. The magnetic permeability μ is equal to that of the vacuum both in the stator and rotor parts; the electric conductivity σ has a zero value in the stator part and a non-zero value, later specified, in the two rotor sectors labeled with σ in the Figure. Finally, a constant source of opposite current densities \mathbf{J}_s is considered in the two other rotor sectors with intensity 10^7 A/m and we assume that $\text{supp}\{\mathbf{J}_s\} \cap \text{supp}\{\sigma\} = \emptyset$. An example of stator-rotor mesh is presented on the right: the stator mesh is composed of 825 nodes and 1490 triangles whereas the rotor one has 333 nodes and 608 triangles.

Figure 3 (left) shows the geometry of the problem we are considering, together with its boundary conditions. We remark that the considered data configuration does not satisfy the assumptions required for the regularity of the solution of problem (8) and for the error bounds. Nevertheless, numerical simulations give, as we will see, an approximated solution whose “distance” from the analytical one is in agreement with that anticipated by the theoretical analysis.

The stator and rotor meshes are displayed on the right side of Figure 3. We remark that the discretizations induced by the stator and rotor meshes at the sliding interface do not match in any point.

5.2 Comparison between *static* and *dynamic* quantities

In this section we present the results of the comparison between *static* and *dynamic* quantities. The concerned quantities are the magnetic torque T_m , the rotation angle θ and the angular speed ω . The adjective *static* is used in relation to the model without eddy currents while the adjective *dynamic* is used with reference to the eddy currents model.

In the legends of those figures which display the results of the simulations led with different values of the electric conductivity σ , the notation $1.En$ has been adopted to indicate 10^n .

In all the previous equations, the symbol T_m has denoted the third component (and so modulus) of the global magnetic torque \mathbf{T}_m . To better understand the incoming results, we remark that the global torque can be seen as resulting from two contributions, $T_m = T_p + T_r$, where T_p represents the *propulsive* torque and T_r the *resistant* one. The term propulsive is used to indicate the part of the torque that moves the rotor back to its equilibrium position: from the mechanical point of view, this torque does not contrast the rotor movement but contributes to it. The term resistant indicates that part of the torque that acts as a non-linear friction: this torque tends to stop the rotor. The main contribution to the propulsive torque T_p is given by the force terms linked to the source currents density \mathbf{J}_s . The main contribution to the resistant torque T_r is given by the force terms linked to the induced currents $\sigma \mathbf{E}$ where $\sigma \neq 0$.

In all numerical simulations, the rotor is initially rotated of $\theta_0 = 80^\circ$ and then is let free to move. Starting from $t = 0$ s, we accomplish 400 time iterations with time step of length $\Delta t = 10^{-3}$ s and the used physical parameters are $J = 0.2$, $k = 5$.

Numerical results have shown that for $\sigma \leq 10^5$ S/m, due to the weak intensity of the eddy currents, the resistant torque T_r gives a contribution to the global torque which is negligible with respect to that given by the propulsive one. The global torque can be then considered as a static one.

In Figure 4 the magnetic torque value T_m is presented as a function of the rotation angle θ for different conductivity values. In the initial range ($15^\circ < \theta < 80^\circ$), for a fixed value of the angle (30° , for example), the higher σ is, the lower T_m is. Outside this range, the non-linear behavior of the coupled problem is more complex [14]. Moreover, when $\sigma \leq 10^7$ S/m, the torque value creates a small spiral around the zero value (for $\sigma = 10^5$ S/m the spiral has degenerated on the displayed line): in fact, the lower σ is, the longer will last the transient interval in which the torque value oscillates. This phenomenon is more visible in Figure 5 where the magnetic torque value T_m is presented as a function of time. In the considered simulation interval, the torque value has already reached is zero value when $\sigma > 10^7$ S/m but still oscillates for $\sigma \leq 10^7$ S/m.

Figures 6 and 7 are related to the rotation angle and to the angular speed, both represented as time functions. As we have seen, decreasing σ , the torque value oscillates more. This implies that it will take longer for the rotor to reach the equilibrium position corresponding to $\theta = 0^\circ$ (presented in Figure 3 (left)). This explains why, after 0.4 s, the rotation angle is equal to its final value when $\sigma > 10^7$ S/m but close to it when $\sigma \leq 10^7$ S/m. The behavior of the angular speed is presented in Figure 7. Increasing σ , the contrasting effect of the induced currents becomes more powerful as soon as the rotor starts moving. This is obvious in the rotation speed graph by remarking the decrease in the amplitude of the first oscillation.

Let us make some remarks on the behavior of the rotation angle θ and angular speed ω as functions of time (see Figures 6 and 7). Looking at Figure 4, we observe that, for $\sigma = 10^5$ S/m, the magnetic torque depends almost linearly on the rotation angle θ . The standard linearized approach gives results that are in accordance with our (more precise) numerical ones. The linearization of equation (7) consists in replacing the dynamic torque value T_m by the linear development $T_{ml} = a\theta + b$ where the coefficients

a and b are determined by imposing that $T_{ml}(0) = 0$ and $T_{ml}(\theta_0) = -T_{max}$. The linearized problem

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + k \frac{d\theta}{dt} + \frac{T_{max}}{\theta_0} \theta = 0 \quad (47)$$

has a solution that, for the chosen values of the parameters J , k and $T_{max} = 278$ N m, results of the following form

$$\theta(t) = e^{-z q t} (A_1 e^{i \alpha q t} + A_2 e^{-i \alpha q t}).$$

The two constants A_1 , A_2 are determined by the initial conditions $\theta(0) = \theta_0$, $\omega(0) = 0$ and the other involved parameters are

$$q = \sqrt{\frac{T_{max}}{\theta_0 J}}, \quad z = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\theta_0}{T_{max} J}}, \quad \alpha = \sqrt{1 - z^2}.$$

In this case ($z = 0.396$), the linearized analysis results in a damped oscillating behavior of $\theta(t)$ with a damping constant $zq \approx 12.4 \text{ s}^{-1}$ and an oscillation period $\tau = \frac{2\pi}{\alpha q} \approx 0.2 \text{ s}$.

This behavior is consistent with the results obtained in Figures 6 and 7 for $\sigma = 10^5 \text{ S/m}$ and the two values $\frac{1}{zq}$ and τ are consistent with the damping time interval (the time interval necessary to decrease θ of a factor equal to e) and oscillation period respectively. For larger values of σ , the non-linear behavior of the induced current modifies substantially the results and the previous linearization is no more accurate. In particular, it is very interesting to note in Figures 6 and 7 that, for $\sigma = 5 \cdot 10^7 \text{ S/m}$, the rotor is only slowed down in a non-uniform manner without oscillations (the rotation speed has *always* the same sign).

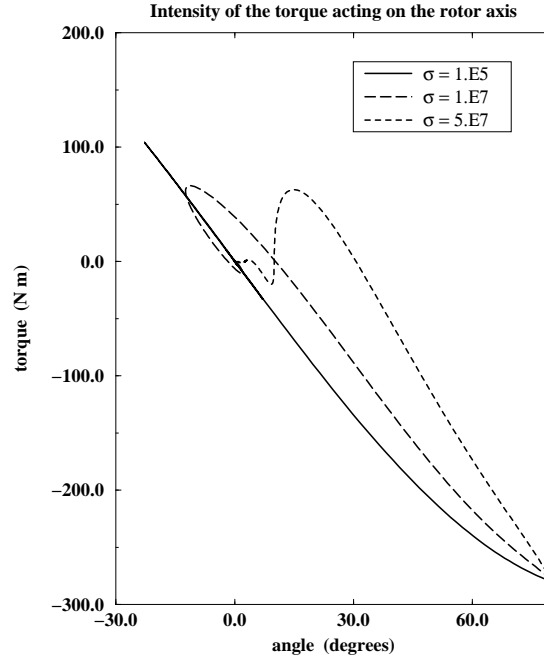


Figure 4: Magnetic torque value as function of the rotation angle.

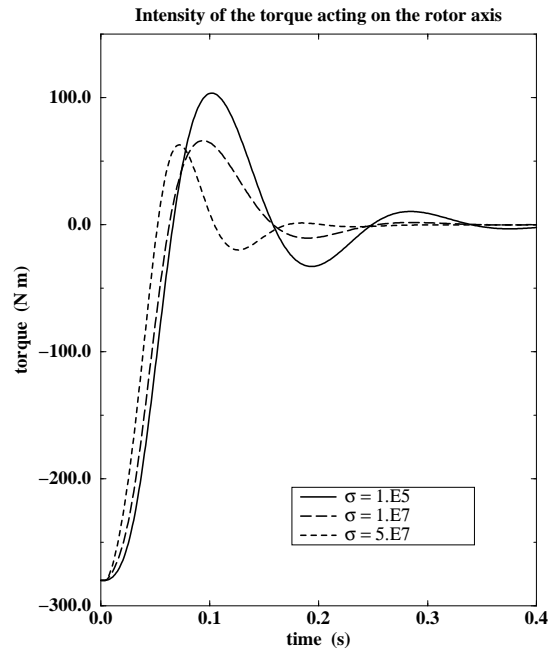


Figure 5: Magnetic torque value as time function.

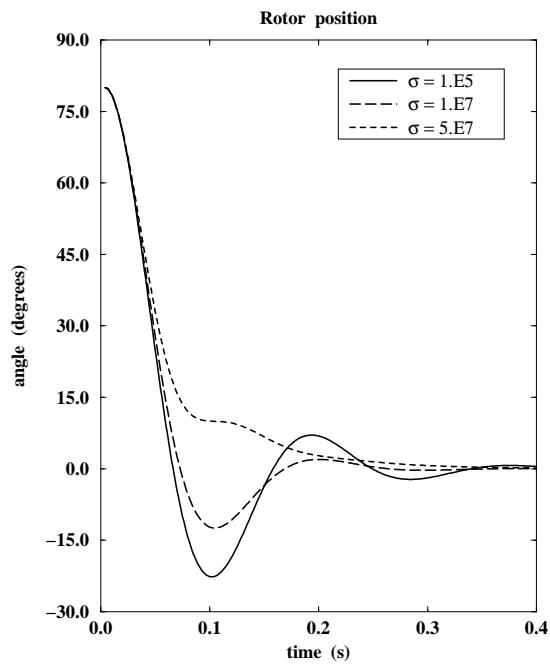


Figure 6: Rotation angle as time function.

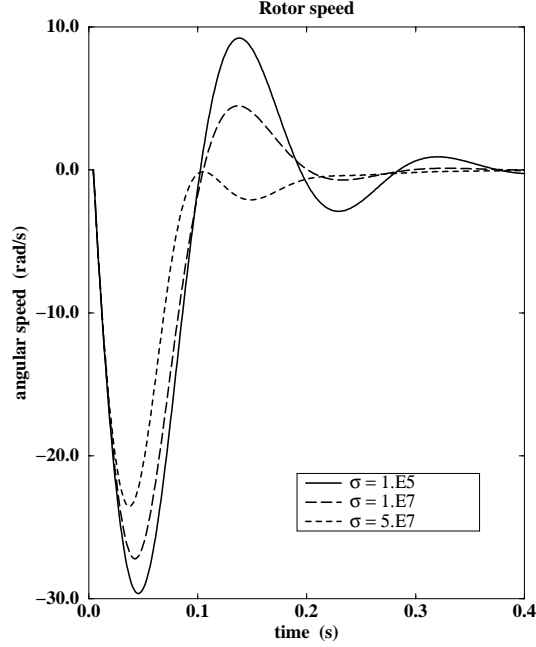


Figure 7: Angular speed as time function.

5.3 Accuracy of the method

The accuracy of the sliding-mesh mortar element method, when applied to compute the induced currents in a stator-rotor system as the one considered here, has been already analyzed in [8]. In this subsection we are going to analyze the accuracy of the same method when applied to the coupled problem. The concerned quantities are the magnetic torque T_m , the rotation angle θ and the angular speed ω . For these three quantities, we will make a comparison between the "exact value" (v) and the one (v_h) numerically computed with different time steps on different meshes, with the fixed value $\sigma = 10^7$ S/m. The term "exact value" actually refers to a numerical value computed on the finest mesh with the smallest time step.

Temporal error : it is given by

$$\|v - v_h\|_{L^\infty([0,T])} = \sup \{|v(t) - v_h(t)| \quad , \quad t \in [0, T]\}. \quad (48)$$

The considered time steps are $\delta t = 2^s \delta t_1$ with $s = 0, 1, 2, 3, 4$ and $\delta t_1 = 2.5 \cdot 10^{-4}$ s and all simulations are led on the mesh presented in Figure 3 (right). In Figures 8 and 9 are reported the time errors on the position and speed of the rotor with respect to the time step. Both figures show that the error depends linearly on the time step.

In Figure 10 are reported the time errors on the torque value with respect to the time step. Results confirm the theoretical linear dependence of the torque value on the time step.

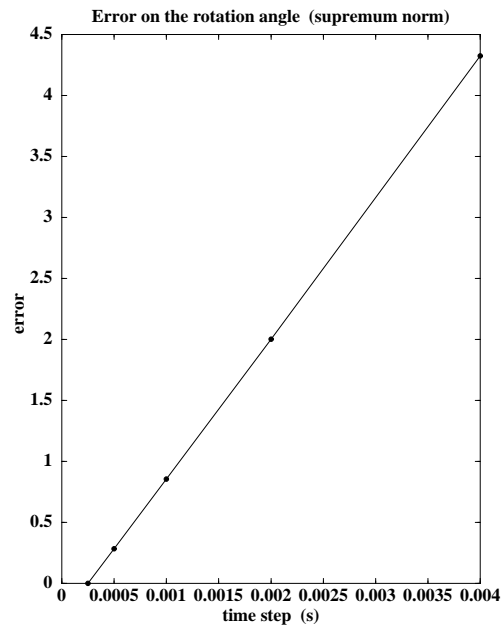


Figure 8: Temporal error on the rotor position θ .

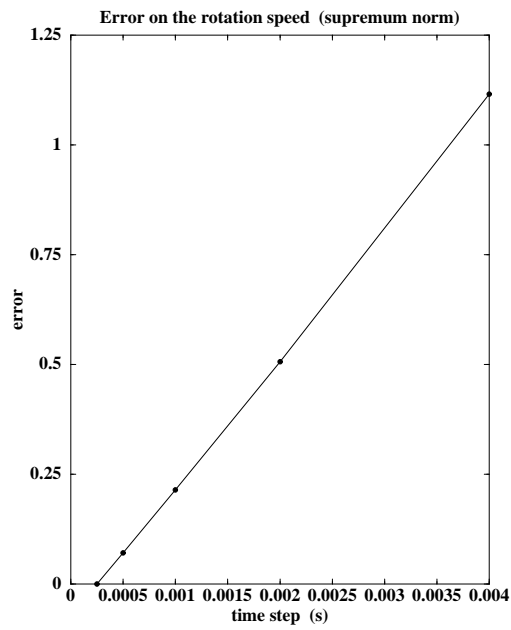


Figure 9: Temporal error on the rotor speed ω .

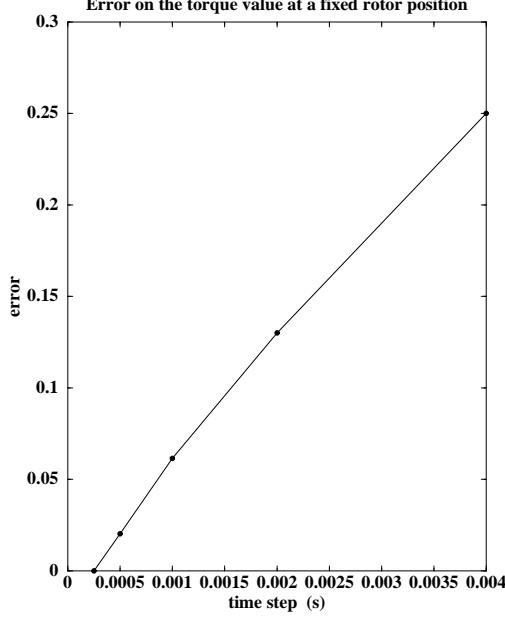


Figure 10: Temporal error on the magnetic torque T_m .

Spatial error : analyzed for the magnetic torque only, it shows the influence of the mesh triangles size h on the torque values. All simulations have been done with $\delta t = \delta t_1$ and using the same stator mesh. The considered rotor meshes have triangles of size $h = 2^r h_1$ with $h_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ m and $r = -2, -1, 0, 1, 2$.

The analysis that has been done in Section 3 on the coupled problem is related to the use of curved finite elements. Since we have used more simple “flat” finite elements we are facing additional errors. The first one is related to the resolution of the magnetic problem. As underlined in Remark 3.2 the corresponding error analysis is performed in [8]. The second one is related to the computation of the torque itself when the domain of integration is replaced by the polygon composed of all mesh triangles included in Ω_1 . The difference of the surface integral is naturally of order $O(h^2)$. The third source of error is due to the geometrical nature of the parameter distribution that is also not well represented by the triangulation: the domain when $\sigma > 0$ may be larger or smaller than the exact one. This is also a surface contribution that involves again an error of $O(h^2)$. These arguments are in agreement with the torque behavior displayed in Figures 11 and 12. In Figure 11 are presented the torque values, computed on three rotor meshes (corresponding to $h_1, 2h_1, 4h_1$), as a function of the rotation angle. Looking to Figure 11, we can see that, for a given rotor position (about 30° for example), the distance (i.e. the error in the L^∞ -norm) between the computed torque values on the meshes with elements of diameters $4h_1$ and $2h_1$ is roughly twice that between the computed torque values on the meshes with elements of diameters $2h_1$ and h_1 . This asymptotic first order accuracy in space of the proposed method can be observed also in Figure 12 where the relative error on the magnetic torque for the rotor position corresponding to $\theta = 30^\circ$ is displayed, in logarithm scale, with respect to the mesh element size h . The “analytical” value T_a is given by $T_{h_1/4}$, i.e. the one computed on the finest rotor mesh.

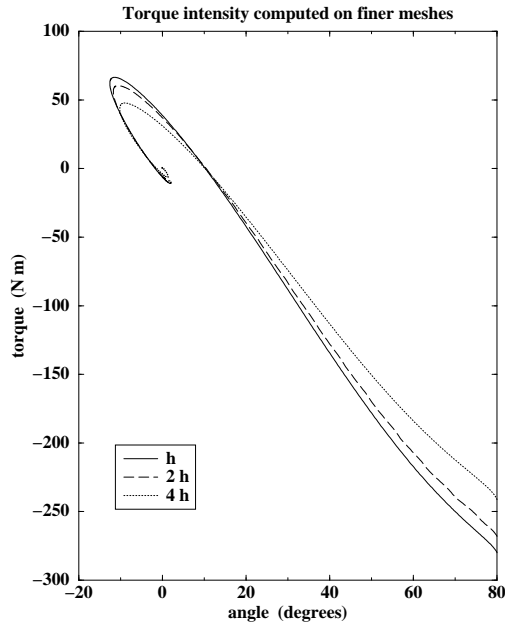


Figure 11: Influence of the spatial discretization step on the magnetic torque value T_m .

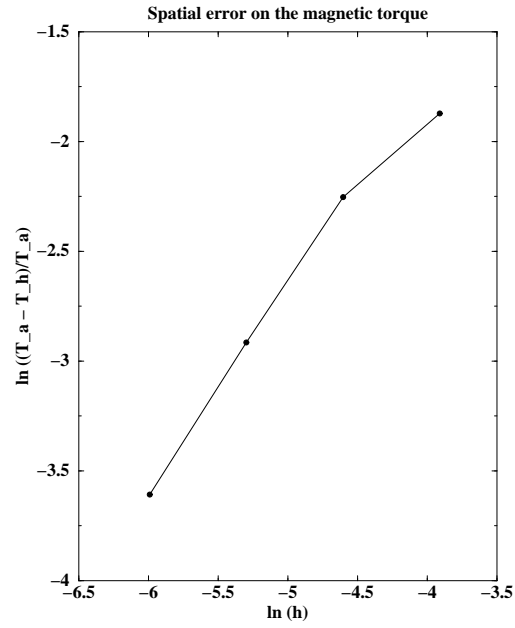


Figure 12: Spatial error on the magnetic torque value T_m for $\theta = 30^\circ$. The analytic value T_a is equal to the one computed on the finest rotor mesh with element size equal to $1.25 \cdot 10^{-3}$ m.

Appendix

Let us analyse the second order differential equation for the rotation angle θ derived from equation (7) in what follows:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + k \frac{d\theta}{dt} = T_m. \quad (49)$$

The linearized equation looks like

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + k \frac{d\theta}{dt} + \frac{T_{max}}{\theta_0} \theta = 0 \quad (50)$$

where the dynamic torque T_m has been replaced by the linear development $T_{ml} = a\theta + b$ with coefficients a and b are determined by imposing that $T_{ml}(0) = 0$ and $T_{ml}(\theta_0) = -T_{max}$. The solution of (50) is of the form

$$\theta(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \quad (51)$$

where the two constants A_1, A_2 are determined by the initial conditions $\theta(0) = \theta_0, \omega(0) = \omega_0$. By simple calculations, we get

$$A_1 = \frac{p_2 \theta_0 - \omega_0}{p_2 - p_1}, \quad A_2 = \frac{\omega_0 - p_1 \theta_0}{p_2 - p_1}.$$

The quantities p_1, p_2 are the zeros of the polynomious

$$p^2 + 2zqp + q^2 = 0$$

with

$$q = \sqrt{\frac{T_{max}}{\theta_0 J}}, \quad z = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\theta_0}{T_{max} J}}.$$

The system behaviour is characterized by two time constants

$$T_1 = \frac{1}{\text{Real}(p_1)} \quad \text{and} \quad T_2 = \frac{1}{\text{Real}(p_2)}.$$

and regarding the zeros p_1 and p_2 ,

- for $z > 1$, we have two different real negative zeros
 $p_1 = q(-z + \sqrt{z^2 - 1})$ and $p_2 = q(-z - \sqrt{z^2 - 1})$
 (the system is overdamped);
- for $z = 1$, we have two coincident real negative zeros
 $p_1 = -qz$ and $p_2 = p_1$.
 (the system is damped);
- for $z < 1$, we have two different complex zeros
 $p_1 = q(-z + i\sqrt{1 - z^2})$ and $p_2 = q(-z - i\sqrt{1 - z^2})$
 (the system is oscillating).

In the last case $z < 1$, set $\alpha = \sqrt{1 - z^2}$, we can write

$$\theta(t) = e^{-zqt} (A_1 e^{i\alpha qt} + A_2 e^{-i\alpha qt})$$

Moreover, using the Euler formula ($e^{\pm i s t} = \cos (s t) \pm i \sin (s t)$), the real part of $\theta(t)$ looks like

$$\operatorname{Real}(\theta(t)) = c_1 e^{-z q t} \cos (\alpha q t) + c_2 e^{-z q t} \sin (\alpha q t). \quad (52)$$

The oscillation periode of $\operatorname{Real}(\theta(t))$ is given by $\tau = \frac{2\pi}{\alpha q}$ and depends on T_{max} . Moreover, the oscillations amplitude decreases with the time passing and tends to zero for $t \rightarrow \infty$. The damping constant is $z q$ and depends on the friction constant k .

References

- [1] F. BEN BELGACEM, A. BUFFA, AND Y. MADAY, *The mortar element method for Maxwell equations: first results*, SIAM J. Num. Anal., (1999), submitted.
- [2] F. BEN BELGACEM AND Y. MADAY, *Non-conforming spectral element methodology tuned to parallel implementation*, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng, 116 (1994), pp. 59–67.
- [3] J. BERGH AND J. LÖFSTRÖM, *Interpolation Spaces, An introduction*, Springer Verlag, 1976.
- [4] C. BERNARDI, *Optimal finite element interpolation of curved domains*, SIAM J. Num. An., 26 (1989), pp. 1212–1240.
- [5] C. BERNARDI, Y. MADAY, AND A. PATERA, *A new nonconforming approach to domain decomposition: The mortar elements method*, in Nonlinear partial differential equations and their applications, H. Brezis and J. Lions, eds., Pitman, 1994, pp. 13–51.
- [6] S. BERTOLUZZA AND V. PERRIER, *The mortar method in wavelets context*, tech. rep., IAN-CNR, Italy, (1999).
- [7] D. BRAESS AND W. DAHMEN, *A multigrid algorithm for the mortar finite element method*, SIAM J. Num. Anal, 37 (1999), pp. 48–69.
- [8] A. BUFFA, Y. MADAY, AND F. RAPETTI, *A sliding mesh-mortar method for a two-dimensional eddy currents model of electric engines*, M^2AN , (1999), submitted.
- [9] P. CIARLET, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [10] R. DAUTRAY AND J. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, vol. 1, Modèles physiques, Masson, 1987.
- [11] B. GASPALOU, F. COLAMARTINO, C. MARCHAND, AND Z. REN, *Simulation of an electromagnetic actuator by a coupled magneto-mechanical modelling*, COMPEL, 14 (1995), pp. 203–206.
- [12] C. PARIETTI AND J. RAPPAZ, *A quasi-static two-dimensional induction heating problem. I. Modeling and analysis*, Math. Methods Models Appl. Sci., 8 (1998), pp. 1003–1021.
- [13] C. PARIETTI AND J. RAPPAZ, *A quasi-static two-dimensional induction heating. II. Numerical analysis*, Math. Methods Models Appl. Sci., 9 (1999), pp. 1333–1350.
- [14] F. Rapetti, A. Buffa, Y. Maday and F. Bouillault, *Simulation of a coupled magneto-mechanical system through the sliding-mesh mortar element method*, COMPEL, Vol.19, No.2, (2000), to appear.
- [15] E. ZEIDLER, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I - Fixed Point Theorems*, Springer-Verlag (New-York), 1991.

Chapitre 7

Applications de la méthode à éléments finis d'arêtes avec joints

L'objet de ce chapitre est la présentation des résultats numériques concernant l'application de la méthode de joints combinée avec les éléments finis d'arêtes au problème de la magnétostatique (2.22)-(2.24) et magnétodynamique (2.45)-(2.49). Le chapitre est structuré en trois parties.

La première partie a fait l'objet des articles [108, 109]: elle contient la description de l'approximation du problème magnétodynamique formulé en terme du champ électrique (2.57) par la méthode des joints couplée avec les éléments finis d'arête définis par (3.40). Nous allons décrire les aspects de la mise en œuvre de la méthode et présenter les résultats de l'approximation du champ électrique, qui, pour les hypothèses faites sur les champs et sur le domaine de calcul, est solution d'une équation vectorielle aux dérivées partielles en deux dimensions.

Dans la deuxième partie nous allons passer au problème magnétodynamique en trois dimensions formulé en terme du champ magnétique (2.50). Après avoir reformulé le problème à résoudre dans le cadre d'une décomposition du domaine de calcul pour la prise en compte de géométries avec une partie mobile, nous en proposons une approximation basée sur la méthode des joints couplée avec les éléments finis d'arête (3.24) et (3.43). Cet approche est optimal tant du point de vue théorique que numérique: en effet, il permet d'obtenir des majorations optimales de l'erreur d'approximation tout en restant moins coûteux en espace mémoire et temps de calcul par rapport au cas où on utiliserait partout les éléments (3.43). Dans cette section, l'accent est mis sur l'aspect théorique de la méthode; on présente de même quelques résultats numériques en magnétostatique pour montrer que l'approximation proposée ici est faisable.

Dans la troisième partie nous allons passer au problème magnétostatique en trois dimensions, formulé en terme du potentiel vecteur magnétique (2.37). L'approximation

de ce problème est basée sur la méthode présentée dans la Section 7.2 et dont nous analyserons plus en détail les aspects de la mise en œuvre de la méthode. Cette partie est complétée par la présentation de quelques résultats numériques qui montrent la flexibilité de la méthode et confirment les résultats théoriques d'optimalité donnés dans la Section 7.2. Nous avons choisi de traiter un problème magnétostatique puisque son approximation à l'aide de la méthode proposée fait intervenir toutes les difficultés qu'on aurait avec la discrétisation d'un problème magnétodynamique (parmi lesquelles on a le traitement des maillages et des espaces aux éléments finis en trois dimensions, la discrétisation de la condition de couplage, la projection sur les maillages existants des nœuds d'intégration calculés sur un maillage fin).

7.1 *Article 4* – The mortar edge element method on non-matching grids for eddy current calculations in moving structures

par *F. Rapetti*

soumis au Int. J. Num. Meth. in Engng. (IJNM) (1999).

The mortar edge element method on non-matching grids for eddy current calculations in moving structures

F. RAPETTI ^{*†}

Abstract

The subject presented in this paper concerns the approximation of the eddy current problem in non-stationary geometries with sliding interfaces. The physical system is supposed to be composed of two solid parts: a fixed one (stator) and a moving one (rotor) which slides in contact with the stator. We consider a two dimensional mathematical model based on the transverse electric formulation of the eddy currents problem in the time domain and the primary unknown is the *electric field vector*. The first order approximation of the problem that we propose here is based on the *mortar element method* combined with the edge element discretization in space and an implicit Euler scheme in time. Numerical results illustrate the accuracy of the method and allow to understand the influence of the rotor movement on the currents distribution.

Key words. domain decomposition method, eddy current problem, edge element approximation, electric field as primary variable, moving structures, non-matching grids

1 Introduction

The computation of the space and time distribution of induced currents in electromagnetic systems is of great importance for performance predictions and devices design. One important aspect to take into account is the presence of moving structures. The subject of our research activity is the development of simulation tools to effectively predict the induced current distribution in non-stationary geometries with sliding interfaces. In particular, we will focus our attention on the description of the eddy current flux in a domain composed of two solid parts, one (rotor) allowed to rotate in electric contact with the other (stator). In papers [1] and [2] the involved physical phenomena have been described through the magnetic field vector. A sliding-mesh mortar finite element method was presented in the node element framework and analysed in terms of precision and robustness.

The purpose of this article is to present the same method in the edge element framework. Still working with a two dimensional model of eddy currents, we will describe the related physical phenomena through the *electric field vector*. As we aim at studying the effect of the rotor movement on the current distribution, we will work in the time domain. Moreover, to avoid the presence of a convective term in the equations, we work in Lagrangian variables: the problem equations are solved in their own frames, that are one fixed with the stator and the other rotating with the rotor. We propose then a first order discretization based on the combination of the edge element method in space and of an implicit Euler scheme in time.

^{*}ASCI - UPR 9029 CNRS, Paris Sud University, Bat. 506, 91403 Orsay cedex, France

[†]LGEP - UMR 8507 CNRS, Supelec University, Plateau de Moulon, 91192 Gif-Sur-Yvette cedex, France

We remark that in a Lagrangian approach, the mesh nodes always coincide with the same material particles throughout the movement. Due to this feature, even if the stator and the rotor meshes have been generated in such a way that the two sets of nodes lying on the sliding interface coincide at the initial configuration, it could not be the case when the rotor part has moved. If the approximation method does not allow for non-matching grids at the interface, either a “lock-step” technique is adopted, i.e. the time step is defined depending on the rotation speed and element size at this slip interface as in [3], or the distortion of the elements has to be somehow faced. Classical remedies involve a partial or total re-meshing of the computational domain: this process and most of all the interpolation of the unknowns at the new mesh elements increase the computational cost of simulations and the implementation complexity. Since the 1980, a large variety of new methods has been developed in order to treat the movement with a minimal additional cost. Among them, we have the macro-element method [4] and the finite element-boundary element coupling [5], involving matrices that are no more sparse. Similarly, the moving layer method [6], based on the air-gap re-meshing for each new rotor position, leads to perturbations on the numerical solution due to the numerous changes in the elements connectivity. Other approaches rely on the use of Lagrangian multipliers [7, 8, 9], making the user solve a final algebraic system with a non definite matrix. The overlapping element method [10] involves the computation of the intersection area between two meshes, a complex task when dealing with triangular grids.

None of the previous methods is simultaneously characterized by involving sparse and definite matrices, avoiding re-meshing and difficult intersection procedures, imposing no constraint between the time step and the element size on the slip surface. Here, we will present a method that has all these features; moreover, it turns out to be robust, accurate and can be applied to systems with or without an air-gap.

In this paper, we consider a non-conforming (in space) approximation of the two dimensional electric field formulation of the eddy current problem based on the so called *mortar element method*, firstly defined in [11]. This method is a non-conforming non-overlapping domain decomposition technique which allows for independent (and thus, in general, non-matching at the interface) meshes in the stator and rotor domains. The idea of the mortar method is to weakly impose the transmission conditions at the sliding interface by means of Lagrangian multipliers that turn out to be different from those proposed in [7, 8]. The key argument is the explicit construction of a particular Lagrangian multipliers space in order to ensure good properties on the discrete problem. In the context of the edge element method, the space of Lagrangian multipliers is the space of the shape functions’ tangential traces at the sliding interface. The possibility of using such a method allows us to work with a whole mesh composed of a fixed part and a rotating one, without imposing heavy constraints between the mesh element size h at the interface and the rotation angle associated with each time step.

Concerning the paper organization, in Section 1 we deduce the model from the system of Maxwell equations and we write the variational formulation of the problem. In Section 2 we discuss the spatial discretization by introducing the mortar edge element method and we present the time discretization. In section 3 we describe the most important implementation aspects of the method, ending in Section 4 with some numerical results. Simulations test how the proposed method works and show the influence of the rotor movement on the electric field distribution.

The analysis of the well-posedness of the continuous problem as well as the convergence analysis and error estimates will be discussed in a forthcoming paper. This analysis is presented in [12] for two dimensional electromagnetic model problems in absence of geometric movement. Note also that recently, in [13] the mortar method for electromagnetic modelling in three dimensions by Nédélec type finite elements has been analysed and we are currently working to tackle three dimensional configurations.

2 The continuous problem

In this section, we present the mathematical model of the problem we are going to study, giving three sequential formulations of it. The first formulation is classical and follows from Maxwell equations; the second is a more appropriate version of the first one when dealing with moving structures and, the last one is the variational form of the second for the edge element approximation. When the structure stands still we can say that it moves with a zero speed: so, the mathematical model of the problem in the non-conforming stationary situation is a particular case of the unstationnary one.

2.1 Classical formulation

Let \mathcal{D} be a Lipschitz open set in \mathbb{R}^3 . We fix on it a system of Cartesian coordinates, say (x, y, z) and we suppose that \mathcal{D} is infinitely long in the z direction. Moreover, we assume that any (x, y) section of \mathcal{D} is invariant with respect to z (i.e. \mathcal{D} is a cylinder). Mathematically speaking we have that the sets $\Omega_{\bar{z}} = \mathcal{D} \cap \{z = \bar{z}\}$ do not depend on the chosen values of \bar{z} and we will denote by Ω one of these sets (see Figure 1).

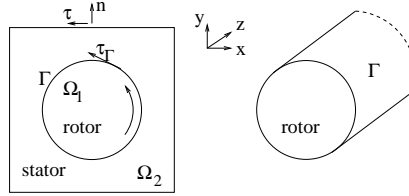


Figure 1: The stator-rotor system geometry: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

Using the bold style to denote vectors, Maxwell equations in \mathcal{D} in the low frequency approximation where the displacement currents are neglected, read as follows:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \mathbf{curl} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mu \mathbf{H}}{\partial t} && \text{in } \mathcal{D}, \\
 (b) \quad & \mathbf{curl} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} && \text{in } \mathcal{D}, \\
 (c) \quad & \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0 && \text{in } \mathcal{D}, \\
 (d) \quad & \text{initial conditions} && \text{in } \mathcal{D}, \\
 (e) \quad & \text{boundary conditions} && \text{on } \partial \mathcal{D}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

In (1), \mathbf{E} and \mathbf{H} are the electric and magnetic fields, μ is the magnetic permeability and σ the electric conductivity. We assume that μ and σ are scalar functions, not tensors, and that they respect the symmetry of the domain ($\mu(x, y, z) = \mu(x, y)$, $\sigma(x, y, z) = \sigma(x, y)$).

It is to be mentioned that equations (1) allow the computation of the field \mathbf{H} everywhere in Ω but they do not allow to univoquely compute the field \mathbf{E} in the non conducting regions. In fact, in the non-conducting regions, the electric field is defined up to the gradient of a scalar field. Denoted by ϵ the dielectric constant, in these regions, the electric field can be univoquely computed if the equation $\operatorname{div}(\epsilon \mathbf{E}) = 0$ (holding in absence of an electric charge density) is added to system (1). The question of the non-uniqueness of the electric field in the non-conducting regions goes beyond the purpose of this paper (see [15] for details) and in the following we suppose that $\sigma > 0$ everywhere in Ω . Moreover, for

the well posedness of the problem, we suppose that there exists a $\bar{\mu}$ such that $\mu \geq \bar{\mu} > 0$ in Ω and we define $\nu = 1/\mu$.

Thanks to the symmetry of the problem and under the previous hypotheses, problem (1) can be re-written in terms of the electric field as follows. Assuming that $\mathbf{E} = (E_x(x, y, t), E_y(x, y, t), 0)$, it can be derived from (1)(a) that \mathbf{H} takes the form $\mathbf{H} = (0, 0, H(x, y, t))$. We denote by curl and \mathbf{curl} , respectively, the *scalar* and *vectorial* operators

$$\text{curl } \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad , \quad \mathbf{curl } s = \left(\frac{\partial s}{\partial y}, -\frac{\partial s}{\partial x} \right).$$

We differentiate in time equation (1)(b) and we get

$$\mathbf{curl} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2)$$

We compute \mathbf{curl} (1)(a) obtaining

$$\mathbf{curl} (\nu \text{curl } \mathbf{E}) = -\mathbf{curl} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (3)$$

Finally, we replace (2) into (3)

$$\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{curl} (\nu \text{curl } \mathbf{E}) = \mathbf{0}. \quad (4)$$

With suitable initial and boundary conditions, equation (4) has a unique solution, for $\sigma > 0$. Once we have \mathbf{E} , we can compute the current density \mathbf{J} , the magnetic field \mathbf{H} and the magnetic induction \mathbf{B} by using respectively the Ohm law $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, equation (1)(b) and the relation $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ valid for linear isotropic materials.

Our choice of working with the electric field as primary variable has some intrinsic interests. First, we want to test the reliability of the mortar edge element method in order to prepare the generalization to three dimensional configurations. Second, at least in the two dimensional case, the system matrix of the fully discretized problem is more sparse than in the scalar case. Third, by looking at the existing literature on the eddy current subject, the description of the involved phenomena in terms of the electric field is of interest as well as that in terms of the magnetic field.

2.2 Moving structures formulation

The first step in the application of a domain decomposition method consists in dividing the considered domain into a finite number of subdomains. The initial problem is then reformulated in each subdomain: in this way, we obtain a finite number of subproblems. Searching the solution of the initial problem is equivalent to looking for the solutions of the subproblems which satisfy in addition some transmission conditions at the interfaces between adjacent subdomains. In the case of moving structures, we divide Ω into at least two subdomains (one always still and the other that can move) and problem (4) is then reformulated in a transmission form. We remark that by choosing Lagrangian variables, the movement is expressed by time dependent transmission conditions. Let us go into the details.

We work in Ω , a bounded open subset of \mathbb{R}^2 . Let the rotor domain Ω_1 be a subset of Ω and O a point in it such that $\Gamma := \partial\Omega_1$ is a circle with centre O . We denote by Ω_2 the stator domain $\Omega \setminus \Omega_1$ (as in Figure 1). We call $r_t : \Omega_1 \rightarrow \Omega_1$ the rotation operator at time t which rotates the domain Ω_1 of the angle $\theta = \omega t$ being ω the rotation speed, and r_{-t} the inverse operator. If the rotor domain does not move, r_t is the identity operator. We denote by $\Omega_1(t) := r_t\Omega_1(0)$: we remark that the set

is always the same, but, this equality has to be seen as a change in the system of coordinates which is naturally defined at Ω_1 . Since Maxwell equations are formulated in Lagrangian variables, defined $\Omega(0) = \Omega_1(0) \cup \Omega_2$, the most natural choice is to look for a function $\mathbf{u} : \Omega(0) \times [0, T[\rightarrow \mathbb{R}^2$ which is the electric field in Lagrangian variables, i.e. $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ is the value at time t of the electric field associated to the *material* point which was in \mathbf{x} at $t = 0$. From now on we will denote \mathbf{u} by a couple $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ where \mathbf{u}_i is the restriction of \mathbf{u} to Ω_i ($i=1,2$). Equation (4) can be rewritten as:

$$\begin{aligned}
(E_i) \quad & \sigma(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{curl} \left(\nu \mathbf{curl} \mathbf{u}_i \right)(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega_i \quad , \quad i = 1, 2 \\
(TC_1) \quad & \mathbf{u}_1(r_{-t}\mathbf{x}, t) \cdot \tau_\Gamma(r_{-t}\mathbf{x}) = \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t) \cdot \tau_\Gamma(\mathbf{x}) \quad \text{on } \Gamma \\
(TC_2) \quad & \nu(r_{-t}\mathbf{x}) \mathbf{curl} \mathbf{u}_1(r_{-t}\mathbf{x}, t) = \nu(\mathbf{x}) \mathbf{curl} \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t) \quad \text{on } \Gamma \\
(BC) \quad & \mathbf{u} \cdot \tau = u_d \text{ on } \Gamma_D \quad , \quad \mathbf{curl} \mathbf{u} = 0 \text{ on } \Gamma_N \\
(IC) \quad & \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega
\end{aligned} \tag{5}$$

where the partial differential equation (E_i) is in the sense of distributions in Ω_i , Γ_D is a subset of $\partial\Omega$ with positive measure and $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$. We denote by \mathbf{n} and τ the unit vectors, respectively, outward normal and tangent to $\partial\Omega$ and by \mathbf{n}_Γ and τ_Γ the unit vectors, respectively, outward normal (from Ω_1 to Ω_2) and tangent to Γ . In particular, if $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$, we define $\tau = (n_y, -n_x)$. Moreover, u_d is a known scalar function defined on Γ_D . The case of more general boundary conditions can be treated with the same tools. The transmission conditions (TC_1) and (TC_2) describe the conservation of the tangential component of, respectively, the electric and magnetic fields across the sliding interface Γ . In these conditions, all quantities when considered from the rotor side are valued at the point $(r_{-t}\mathbf{x}, t)$ because the problem is solved, as in [2], in the system configuration at time $t = 0$.

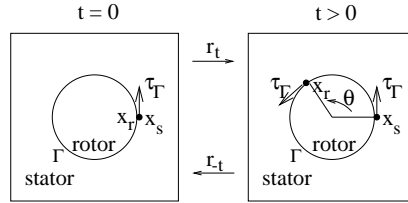


Figure 2: In the moving geometries formulation, the system configuration at time $t = 0$ is taken as reference configuration for the problem solution: at time $t > 0$, the rotor domain has rotated with an angle $\theta = \omega t$ and we go back to the reference configuration thanks to the operator r_{-t} . In particular, $\mathbf{x}_r(t) = r_t(\mathbf{x}_r(0))$ and $\mathbf{x}_r(0) = r_{-t}(\mathbf{x}_r(t))$ and similarly $\tau_\Gamma(\mathbf{x}_r(t)) = r_t \tau_\Gamma(\mathbf{x}_r(0))$ and $\tau_\Gamma(\mathbf{x}_r(0)) = r_{-t} \tau_\Gamma(\mathbf{x}_r(t))$.

In a more detailed way, let \mathbf{x} be a point on Γ denoted as \mathbf{x}_s when seen from the stator domain and \mathbf{x}_r when seen from the rotor domain (as shown in Figure 2). At time $t = 0$, \mathbf{x}_s and \mathbf{x}_r are materially equal and so are the tangent vectors to Γ in these points. At time $t > 0$, \mathbf{x}_r has rotated with an angle $\theta = \omega t$ and in front of \mathbf{x}_s there is another material rotor point. Since we always refer to the initial configuration $\Omega(0)$, we have to consider the (TC_1) and (TC_2) left hand sides evaluated at $(r_{-t}\mathbf{x}_r, t)$. In particular, for (TC_1) at time $t > 0$ we have that

$$\tau_\Gamma(\mathbf{x}_r(t)) = r_t \tau_\Gamma(r_{-t}\mathbf{x}_r(t))$$

and similarly for $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}_r(t), t)$. So,

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}_r(t), t) \cdot \tau_\Gamma(\mathbf{x}_r(t)) = r_t \mathbf{u}_1(r_{-t}\mathbf{x}_r(t), t) \cdot r_t \tau_\Gamma(r_{-t}\mathbf{x}_r(t))$$

and we get (TC_1) .

2.3 Variational formulation

The second step in the application of the mortar edge element method consists in re-writing problem (5) in a variational form. The integrals that are involved in it, can be written as sums of integrals on the subdomains. We remark that in this form, the solution is also sought for a pair $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ and only the transmission condition (TC_1) is explicitly enforced on both the solution and the test functions. The second transmission condition (TC_2) is imbedded in the variational formulation and can be recovered by integration by parts as it is classical for non-essential conditions. Going more into details, for any fixed time, let us introduce the following time dependent functional space:

$$\mathcal{U}(t) = \{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in H(\text{curl}, \Omega_1) \times H(\text{curl}, \Omega_2) \mid \mathbf{u}_1(r_{-t}\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma(r_{-t}\mathbf{x}) = \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \Gamma\}. \quad (6)$$

We remark that, for every fixed value of t , $\mathcal{U}(t)$ is a closed subspace of $H(\text{curl}, \Omega_1) \times H(\text{curl}, \Omega_2)$ and so an Hilbert space with the natural norm (usually called broken norm)

$$\|\mathbf{u}\|_\star^2 = \|\mathbf{u}_1\|_{H(\text{curl}, \Omega_1)}^2 + \|\mathbf{u}_2\|_{H(\text{curl}, \Omega_2)}^2. \quad (7)$$

We recall that $H(\text{curl}, \Omega_i) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega_i))^2, \text{curl } \mathbf{u} \in L^2(\Omega_i)\}$ and $\|\mathbf{u}\|_{H(\text{curl}, \Omega_i)}^2 = \|\mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega_i))^2}^2 + \|\text{curl } \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_i)}^2$. In the following, \mathcal{U} stands for $\mathcal{U}(t)$ and a similar notation will be applied to any functional space related to \mathcal{U} . Moreover, we denote by $\mathcal{U}^0 = \{\mathbf{u} \in \mathcal{U} \mid \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ on } \Gamma_D\}$ and by $\mathcal{U}^d = \{\mathbf{u} \in \mathcal{U} \mid \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = u_d \text{ on } \Gamma_D\}$. By classical reasoning we obtain the following variational formulation, to be intended in the sense of distributions:

$$\begin{aligned} \text{Find } \mathbf{u}(\cdot, \cdot) \in \mathcal{C}^0(0, T, \mathcal{U}^d) \cap \mathcal{C}^1(0, T, (L^2(\Omega))^2) \text{ such that :} \\ \sum_{i=1}^2 \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t}, \mathbf{v}_i \right)_{\Omega_i} + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathcal{U}^0 \end{aligned} \quad (8)$$

where $(\cdot, \cdot)_{\Omega_i}$ denotes the $(L^2(\Omega_i))^2$ scalar product and

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_1} \nu \text{curl } \mathbf{u}_1 \text{curl } \mathbf{v}_1 d\Omega + \int_{\Omega_2} \nu \text{curl } \mathbf{u}_2 \text{curl } \mathbf{v}_2 d\Omega. \quad (9)$$

The analysis of the well-posedness of the continuous problem in the time dependent situation will be discussed in a forthcoming paper.

3 The discrete problem

We now discretize (8) in each subdomain by applying edge elements in space and finite differences in time. For the spatial discretization, the use of a standard Galerkin method, makes the time dependent transmission condition (TC_1) in (5) be exactly verified. This fact is very demanding since it is necessary to modify the mesh used for the spatial discretization at every time step or to impose a constraint between the temporal discretization step and the spatial one.

Here, we adopt the method used in [1, 2] in the electromagnetic context, involving a non-conforming approximation of problem (8); non-matching grids at every time step are used and the transmission condition (TC_1) is weakly imposed by means of the mortar element method technique (see [12] for the method definition coupled with edge elements in two dimensions, where in particular the optimality of this non-conforming discretization is proven, and [11] for the general presentation).

3.1 Domain discretization

Let \mathcal{T}_{i,h_i} be a family of triangulations of $\overline{\Omega}_i$ ($i = 1, 2$) by means of an unstructured mesh composed of triangles K such that

$$\overline{\Omega}_i = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_{i,h_i}} K$$

with $h_i = \max \{ \text{diam}(K), K \in \mathcal{T}_{i,h_i} \}$. We assume that they are regular in the sense of Ciarlet (see [16]) and non-matching at the interface Γ . It can a priori happen that $h_1 \neq h_2$.

We assume that each element K of \mathcal{T}_{i,h_i} may be obtained as $K = \mathbf{F}_K(\hat{K})$, where \hat{K} is the reference triangle of vertices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ and $\mathbf{F}_K : \left\{ \begin{smallmatrix} \hat{K} \rightarrow K \\ \hat{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x} \end{smallmatrix} \right\}$ is a suitable regular and invertible transformation of the form

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}_K(\hat{\mathbf{x}}) = B_K \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_K, \quad B_K \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), \quad \det(B_K) \neq 0, \quad \mathbf{b}_K \in \mathbb{R}^2 \quad (10)$$

where B_K and \mathbf{b}_K depend on K . If K has vertices P_1, P_2, P_3 of coordinates $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ respectively, we may write

$$\mathbf{F}_K(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \hat{x} + \mathbf{a}_2 \hat{y}$$

where

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{r}_1 = \mathbf{b}_K, \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1.$$

Therefore, matrix B_K has the following expression

$$B_K = J_K^T = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial F_1}{\partial \hat{y}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial F_2}{\partial \hat{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1x} & a_{2x} \\ a_{1y} & a_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} \\ \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \end{pmatrix} \quad (11)$$

(where T denotes the transpose operator) and its determinant is given by

$$\det(B_K) = \det(J_K) = \left| \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \hat{\mathbf{t}}} \right| = |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|. \quad (12)$$

3.2 Spatial discretization

We aim at obtaining a non-conforming finite element space, adapted to domain decomposition, for the approximation of (8). To do this, we start by introducing the space of first order edge elements (see [17]) on the reference triangle \hat{K} represented by

$$\mathcal{P}(\hat{K}) = \{ \mathbf{u} = \alpha \oplus \beta \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \alpha \in (\mathcal{P}_0(\hat{K}))^2, \beta \in \mathcal{P}_0(\hat{K}) \}.$$

If we denote by $\hat{\mathbf{u}}$ a real vector of $\mathcal{P}(\hat{K})$ and by \mathbf{u} the corresponding vector in $\mathcal{P}(K)$, we have that

$$\mathbf{u} = J_K^{-1} \hat{\mathbf{u}} = (B_K)^{-T} \hat{\mathbf{u}}. \quad (13)$$

The transformation of the scalar curl operator that appears in (9) needs some care and is based on following matrix identity:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{pmatrix} = J_K^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{u}_{\hat{x}}}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial \hat{u}_{\hat{y}}}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial \hat{u}_{\hat{x}}}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial \hat{u}_{\hat{y}}}{\partial \hat{y}} \end{pmatrix} J_K^{-T}. \quad (14)$$

We then introduce the following finite dimensional spaces of edge elements

$$Y_{i,h_i} = \{\mathbf{v}_{i,h_i} \in H(\text{curl}, \Omega_i) \mid B_K(\mathbf{v}_{i,h_i}|_K \circ F_K) \in \mathcal{P}(\hat{K}), \forall K \in \mathcal{T}_{i,h_i}\} \quad , \quad i = 1, 2 \quad (15)$$

and we define

$$X_{i,h_i} = \{\mathbf{v}_{i,h_i} \in Y_{i,h_i} \mid \mathbf{v}_{i,h_i} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ on } \Gamma_D\} \quad , \quad i = 1, 2. \quad (16)$$

Since we deal with tangential traces of these vector fields, we introduce the sets

$$T_{i,h_i}|\Gamma = \{\mathbf{v}_{i,h_i} \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma, \mathbf{v}_{i,h_i} \in Y_{i,h_i}\} \quad , \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

We now study the discretization of the transmission condition (TC_1). When looking for a discrete counterpart of the space \mathcal{U} , the equality $\mathbf{u}_1(r_{-t}\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma(r_{-t}\mathbf{x}) = \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \Gamma$ becomes a too stringent condition since both fields are generally defined on different and non-matching grids. As a standard procedure for non-conforming domain decomposition methods, we impose the transmission condition (TC_1) in a weak form by means of a suitable space of Lagrangian multipliers. We denote by $\mathcal{T}_{i,h_i}^\Gamma$, $i = 1, 2$ the two discretizations of Γ composed of all edges belonging to triangles of \mathcal{T}_{1,h_1} and \mathcal{T}_{2,h_2} with end points on Γ . For every $K \in \mathcal{T}_{2,h_2}$ with two vertices on Γ , we denote by e the edge that ends in these two vertices. We choose the space of mortar functions as follows:

$$M_h = \{\varphi_h \in L^2(\Gamma) \mid \varphi_h|_e \in \mathcal{P}_0(e) \quad \forall e \in \mathcal{T}_{2,h_2}^\Gamma\} \subseteq T_{2,h_2}|\Gamma \quad (18)$$

where $h = \max\{h_1, h_2\}$. In the mortar element method terminology, this means that we choose the rotor as *master* and the stator as *slave*. The definition of M_h involving $\mathcal{T}_{1,h_1}^\Gamma$ gives a different but similar mortar method. We then define, at every fixed time t , the following approximation space:

$$\mathcal{U}_h = \{\mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_{1,h}, \mathbf{v}_{2,h}) \in X_{1,h} \times X_{2,h} \quad \text{such that} \quad \forall \varphi_h \in M_h \quad \int_\Gamma (\mathbf{v}_{1,h}(r_{-t}\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma(r_{-t}\mathbf{x}) - \mathbf{v}_{2,h}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma(\mathbf{x})) \varphi_h(\mathbf{x}) d\Gamma = 0\}. \quad (19)$$

The time dependent constraint (19) is the discrete weak version of the transmission condition (TC_1) in the continuous problem (5).

Let us introduce $\mathcal{U}_h^0 = \{\mathbf{v}_h \in \mathcal{U}_h \mid \mathbf{v}_h \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ on } \Gamma_D\}$ and $\mathcal{U}_h^d = \{\mathbf{v}_h \in \mathcal{U}_h \mid \mathbf{v}_h \cdot \boldsymbol{\tau} = u_d \text{ on } \Gamma_D\}$; we now look for a solution of the following variational problem:

$$\begin{aligned} \text{Find } \quad & \mathbf{u}_h(\cdot, \cdot) \in \mathcal{C}^0(0, T, \mathcal{U}_h^d) \cap \mathcal{C}^1(0, T, (L^2(\Omega))^2) \text{ such that :} \\ & \sum_{i=1}^2 \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{u}_{i,h}}{\partial t}, \mathbf{v}_{i,h} \right)_{\Omega_i} + a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{U}_h^0. \end{aligned} \quad (20)$$

3.3 Temporal discretization

The second step in the approximation of problem (8) is its temporal discretization in the interval $[0, T]$ with $T > 0$. Let Δt be the time step and N an integer such that $T = N \Delta t$. Since the time discretization involves also a time “discretization” of the resolution spaces and test functions, we will simplify our notation in the following way:

$$t^n = n \Delta t \quad , \quad \mathbf{v}_h^n = \mathbf{v}_h(t^n) \quad , \quad \mathcal{U}_h(n) = \mathcal{U}_h(t^n). \quad (21)$$

By applying a first order implicit Euler scheme, our fully discrete problem reads:

$\forall n = 0, \dots, N-1$, find $\mathbf{u}_h^{n+1} \in \mathcal{U}_h^d(n+1)$ such that :

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \sigma \frac{\mathbf{u}_{i,h}^{n+1} - \mathbf{u}_{i,h}^n}{\Delta t} \cdot \mathbf{v}_{i,h}^{n+1} d\Omega + a(\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h^{n+1}) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h^{n+1} \in \mathcal{U}_h^0(n+1). \quad (22)$$

The stability of the scheme will be analysed in a future paper. Note that this scheme has been proven stable in [1] for the scalar version.

4 Implementation aspects

In this section we go into the details of the two dimensional sliding-mesh mortar edge element method implementation. After a very brief recall concerning the edge elements, we focus our attention on the numerical treatment of the constraint (19) involved in the definition of the space \mathcal{U}_h . The differences with the nodal case are pointed out and the matrix form of the final system is presented.

4.1 Edge elements with three degrees of freedom per triangle

We now introduce the basis functions \mathbf{w}_i of the space \mathcal{P} that will be used later in the definition of a basis for \mathcal{U}_h . Given a triangle K , let \mathbf{r}_j ($j=1,3$) be the position vectors of its vertices and $\lambda_j(\mathbf{r})$ be the barycentric coordinate of a point $P \in K$ with respect to the vertex j . It is clear that $\lambda_j(\mathbf{r})$ is a linear function in the triangle with $\lambda_j(\mathbf{r}_k) = \delta_{jk}$ ($j, k \in \{1, 2, 3\}$). The vector basis function corresponding to an edge e_{ij} going from \mathbf{r}_i to \mathbf{r}_j , is given by

$$\mathbf{w}_{ij}(\mathbf{r}) = \lambda_i(\mathbf{r}) \text{ grad } \lambda_j(\mathbf{r}) - \lambda_j(\mathbf{r}) \text{ grad } \lambda_i(\mathbf{r}) \quad , \quad i, j = 1, 2, 3, i < j. \quad (23)$$

The interpolating function on K for the vectorial state variable \mathbf{u}_h has the following form

$$\mathbf{u}_h = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 \mathbf{w}_{ij} \alpha_{ij}(\mathbf{u}_h) \quad \text{with} \quad \alpha_{ij}(\mathbf{u}_h) = \int_{e_{ij}} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{t}_{e_{ij}} ds,$$

being $\mathbf{t}_{e_{ij}}$ the unit vector tangent to the edge e_{ij} and directed as e_{ij} . Usually, the basis functions are computed on the reference triangle \hat{K} as in (23) and transported on the mesh triangle K through the transformation (13). In the following, to alleviate the notation, e_k will denote the k^{th} edge of the mesh, τ_{e_k} the unit tangent vector directed as e_k and $\alpha_k(\cdot)$ the functional of A such that $\alpha_k(\mathbf{u}_h) = \int_{e_k} \mathbf{u}_h \cdot \tau_k ds$, $\forall \mathbf{u}_h \in \mathcal{P}$. The basis function associated to e_k will be denoted by \mathbf{w}_k . The edge element on K is defined by (K, \mathcal{P}, A) , where A is the set of the degrees of freedom given by the linear functionals α_k acting on \mathcal{P} . This finite element is unisolvent, i.e. $\forall \mathbf{p} \in \mathcal{P}$ such that $\alpha(\mathbf{p}) = 0 \quad \forall \alpha \in A$, we have $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, and conforming in $H(\text{curl})$, i.e. for any $\alpha \in A$ defined only on the edge e , the fact that $\alpha(\mathbf{p}) = 0$ with $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$, implies $\mathbf{t}_e \cdot \mathbf{p} = 0$ on e . The tangential component of \mathbf{u}_h at a common edge of two adjacent triangles depends only on the value associated to this edge, so the tangential continuity is exactly matched. Finally, this family of finite elements is invariant under affine transformations provided that we use the formula (13) to transform vectors. We remark that the degrees of freedom of a function \mathbf{u} in the edge element method involve only the tangential component of \mathbf{u} along the mesh edges. Since the weak form (19) of the transmission condition (TC_1) involves only the tangential component of a function \mathbf{u} on the mesh edges lying on the interface Γ , the edge element method has the right feature to be coupled with the mortar method.

4.2 A basis for the space \mathcal{U}_h^0

We now focus our attention on the numerical treatment of the constraint (19), involved in the definition of a basis for the space \mathcal{U}_h^0 , and on the matrix form of problem (22). The construction of a basis for the space \mathcal{U}_h^0 is equivalent to that we have presented in [2], provided that the nodal terminology is changed into the edge one. For precision's sake, we will describe this construction in order to indicate the differences with the nodal case. We anticipate that the elements of a basis for \mathcal{U}_h^0 in a neighbourhood of the interface are obtained from a suitable linear combination of the standard edge element basis functions. The coefficients of this linear combination depend on time in the sense that they depend on the current rotor position. The description we are going to present in the following refers to the system configuration at a time $t \in [0, T]$.

Two meshes \mathcal{T}_{i,h_i} composed of triangles with straight edges are used to discretize the stator and rotor domains. The discrete subspaces X_{i,h_i} are defined in (16) and the degrees of freedom are the values of the circulations of \mathbf{u} along the triangles' edges. We denote by e_K the edges of triangle K , and we define the sets Ξ_i

$$\Xi_i = \{e_K \mid K \in \mathcal{T}_{i,h_i}\}, \quad (24)$$

and its subset Ξ_i^0

$$\Xi_i^0 := \{e_K \mid K \in \mathcal{T}_{i,h_i}, e_K \notin \partial\Omega_i \setminus \Gamma\}. \quad (25)$$

In defining the sets Ξ_h and Ξ_h^0 , an assembly process has taken place and in the global numeration we will write the edges as e . In the following, we will say that one edge e lays on Γ (and we will note this by writing $e \in \Gamma$) iff its two end points belong to Γ . The two sets of edges lying on the interface will be denoted as follows

$$\xi^i = \{e \in \Xi_i^0 \cap \Gamma\} \quad (26)$$

and m_Γ^i and m^i are respectively the number of elements belonging to ξ^i and Ξ_i .

Let us denote by \mathbf{w}_j^1 the basis function associated to the j^{th} edge of Ξ_1^0 and by \mathbf{w}_j^2 the basis function associated to the j^{th} edge of Ξ_2^0 . These functions are the elements of the spaces X_{i,h_i} ($i=1,2$) of the form (23), such that

$$\alpha_s(\mathbf{w}_j^i) = \delta_{js} \quad \forall e_s \in \mathcal{T}_{i,h_i}$$

and $\alpha_s(\cdot)$ are the linear functionals previously defined. Let us denote by \mathcal{B} a basis for \mathcal{U}_h^0 : we suppose that

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^1 \cup \mathcal{B}^2 \cup \mathcal{B}^\Gamma \quad (27)$$

where the sets of functions \mathcal{B}^1 , \mathcal{B}^2 , and \mathcal{B}^Γ will be defined below.

The functions in \mathcal{B}^1 are zero in $\overline{\Omega^2}$, the functions in \mathcal{B}^2 are zero in $\overline{\Omega^1}$, and the functions in \mathcal{B}^Γ have their support in the union of the *mortar* elements, i.e. the rotor and stator mesh triangles having at least one edge lying on Γ . Due to the properties of the considered basis functions, we set

$$\mathcal{B}^1 = \{(\mathbf{w}_j^1, \mathbf{0}) \mid j : e_j \in \Xi_1^0 \setminus \xi^1\}, \quad (28)$$

$$\mathcal{B}^2 = \{(\mathbf{0}, \mathbf{w}_r^2) \mid r : e_r \in \Xi_2^0 \setminus \xi^2\}, \quad (29)$$

and a possible choice for the basis functions associated on edges lying on the interface is

$$\mathcal{B}^\Gamma = \left\{ (\mathbf{w}_j^1, \sum_{r: e_r \in \xi^2} q_r^j \mathbf{w}_r^2) \mid j : e_j \in \xi^1, q_r^j \in \mathbb{R} \right\}. \quad (30)$$

For each of the m_Γ^1 indices j , the coefficients q_r^j , $r = 1, \dots, m_\Gamma^2$, are determined by imposing the integral matching condition

$$\int_\Gamma [(\mathbf{w}_j^1 \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma) - \sum_{r: e_r \in \xi^2} q_r^j (\mathbf{w}_r^2 \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma)] (\mathbf{w}_i^2 \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma) d\Gamma = 0 \quad \forall i: e_i \in \xi^2, \forall j: e_j \in \xi^1. \quad (31)$$

Each of these m_Γ^1 sets of m_Γ^2 equations can be put into the following matricial form

$$C \mathbf{q}^j = D(\cdot, j) \quad (32)$$

where

$$(\mathbf{q}^j)^T = (q_1^j, \dots, q_{m_\Gamma^2}^j), \quad (33)$$

$$C(i, r) = \int_\Gamma (\mathbf{w}_r^2 \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma) (\mathbf{w}_i^2 \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma) d\Gamma \quad r, i: e_r, e_i \in \xi^2, \quad (34)$$

$$D(i, j) = \int_\Gamma (\mathbf{w}_j^1 \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma) (\mathbf{w}_i^2 \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma) d\Gamma \quad j: e_j \in \xi^1, i: e_i \in \xi^2. \quad (35)$$

The system (32) allows us to determine $\forall j: e_j \in \xi^1$ the vector \mathbf{q}^j , and thus the set of basis functions on the interface. For the matrix form of problem (22), it is useful to define the rectangular matrix Q of dimension $m_\Gamma^2 \times m_\Gamma^1$

$$Q = C^{-1} D.$$

The matrix Q allows to couple at the interface the information coming from the stator and rotor domains and its construction is a crucial point in the implementation of the method. Moreover, when the rotor stands still, the matrix Q does not depend on time but when the rotor moves, Q depends on time in the sense that it has to be rebuilt at each new configuration of the system. In the following, we explain how the involved integrals over Γ can be numerically computed and state the main differences with the nodal case.

As remarked in [2], due to the use in both domains of meshes composed of triangles with straight sides, the $\mathcal{T}_{i,h_i}^\Gamma$ ($i = 1, 2$) are polygons, as can be remarked by looking at Figure 3. It results that, at the curved interface Γ , the stator mesh penetrates that of the rotor and viceversa (without any negative effect on numerical results, as showed in [1]). Together with $\mathcal{T}_{1,h_1}^\Gamma$ and $\mathcal{T}_{2,h_2}^\Gamma$, we introduce a third polygon Γ_h "intersection" of $\mathcal{T}_{1,h_1}^\Gamma$ and $\mathcal{T}_{2,h_2}^\Gamma$ i.e. its sides are all the segments intersections of rotor and stator mesh sides lying on Γ . On this intersection segments we fix, for example, the clockwise orientation.

Let us see how the intersection between $\mathcal{T}_{1,h_1}^\Gamma$ and $\mathcal{T}_{2,h_2}^\Gamma$ can be computed. Due to the circular geometry of the interface, all the mesh nodes lying on Γ are equally distant from the rotor centre. Each of these nodes can be located on the interface by the angle θ between the x-axis and the line centre-node in a polar system of coordinates with origin in the rotor centre.

In Figure 3 (left), the line with end points C and B represents the side CB of Γ_h , intersection between the mesh sides AB and CD. This side is defined starting from the angular interval $(\theta_B, \theta_C) = (\theta_B, \theta_A) \cap (\theta_D, \theta_C)$ bounded by the dashed lines. If intervals (θ_B, θ_A) and (θ_D, θ_C) are disjoint, the intersection segment is an empty set. If one angles interval is a subset of the other (for example, $(\theta_B, \theta_A) \subset (\theta_D, \theta_C)$), the intersection segment (in this case AB) is defined as the one associated to the smallest angular interval (in this case (θ_B, θ_A)).

Now, considering Figure 3 (left), let us denote by \mathbf{w}_{AB}^1 the basis function associated to the edge AB of the drawn rotor mesh triangle and by \mathbf{w}_{CD}^2 that associated to the edge CD of the drawn stator mesh

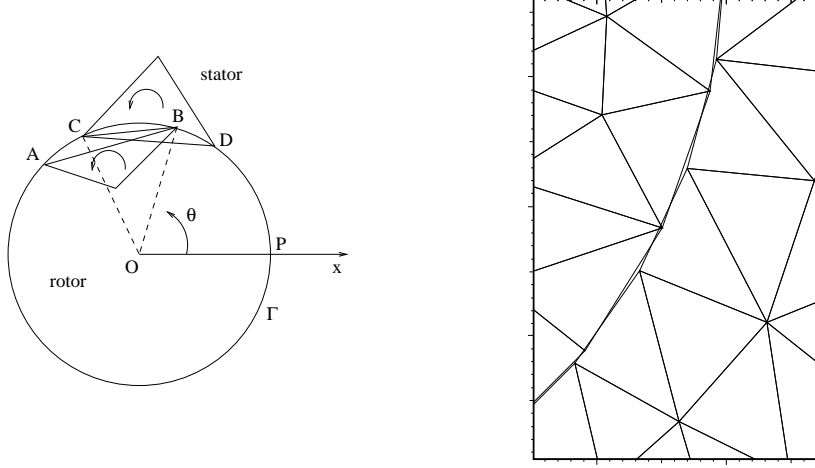


Figure 3: Meshes intersection at the stator-rotor interface: a simplified situation, with only two mesh triangles belonging one to the stator mesh and the other to the rotor mesh. On the right, an enlargement of a real mesh in a neighbourhood of the interface is presented.

triangle. One difference with the nodal case appears in the numerical computation of the elements of both matrices C and D : quadrature formulas can not be involved. If we chose to describe Γ by the polygon Γ_h , among the line integrals in (34) and (35) with reference to the situation displayed in the Figure we have respectively

$$\int_{\Gamma_h} (\mathbf{w}_{CD}^2 \cdot \tau_{\Gamma_h})^2 d\Gamma_h = \int_{CB} (\mathbf{w}_{CD}^2 \cdot \tau_{CB})^2 d\Gamma_h + \int_{BD} (\mathbf{w}_{CD}^2 \cdot \tau_{BD})^2 d\Gamma_h = \frac{|CB|}{|CD|^2} (\tau_{CD} \cdot \tau_{CB})^2 + \frac{|BD|}{|CD|^2} (\tau_{BD} \cdot \tau_{CD})^2$$

$$\int_{\Gamma_h} (\mathbf{w}_{AB}^1 \cdot \tau_{\Gamma_h}) (\mathbf{w}_{CD}^2 \cdot \tau_{\Gamma_h}) d\Gamma_h = \int_{CB} (\mathbf{w}_{AB}^1 \cdot \tau_{CB}) (\mathbf{w}_{CD}^2 \cdot \tau_{CB}) d\Gamma_h = \frac{|CB|}{|AB||CD|} (\tau_{AB} \cdot \tau_{CB}) (\tau_{CD} \cdot \tau_{CB})$$

where the quantities $|AB|$, $|CD|$, $|BC|$ are measured either by using the Cartesian coordinates of the segments' end nodes or by using their associated angles. All the tangent vectors τ have length one.

Another difference concerns the fact that, due to the features of the first order edge elements' basis functions, C is diagonal. The evaluation of $Q = C^{-1}D$ is then less expensive than in the nodal case since the inversion of the matrix C is for free. As an example, for a couple of parallel and intersecting rotor and stator mesh sides AB and CD , we have that

$$|Q(AB, CD)| = |CB|/|CD|.$$

4.3 Matrix form of the fully discretized problem

The system we solve to get numerical results is built exactly as explained in [2], provided that the nodal terminology is changed into the edge one. So, we start by writing, in each domain, the final system associated to equation (22) with homogeneous Neumann type conditions on the interface Γ . Then the two systems are coupled by means of the mortar condition. In particular, we have that the fully discrete

problem has the following matrix layout

$$\tilde{Q}_{n+1}^T (K + \frac{M}{\Delta t}) \tilde{Q}_{n+1} \mathbf{U}_{n+1} = \tilde{Q}_{n+1}^T \frac{M}{\Delta t} \tilde{Q}_n \mathbf{U}_n$$

where $\mathbf{U}_{n+1} = (\mathbf{U}_{n+1}^{2,Int}, \mathbf{U}_{n+1}^{1,\Gamma}, \mathbf{U}_{n+1}^{1,Int})$ are the real degrees of freedom since from (31) we have that $\mathbf{U}_{n+1}^{2,\Gamma} = Q_{n+1} \mathbf{U}_{n+1}^{1,\Gamma}$, being Q_{n+1} the matrix Q computed on the system configuration at time t_{n+1} . Here we have defined $\mathbf{U}_{n+1}^{i,Int}$ as the vector of unknowns at time t_{n+1} , associated to the mesh edges that are internal to domain Ω_i ; similarly, $\mathbf{U}_{n+1}^{i,\Gamma}$ is the vector of unknowns at time t_{n+1} , associated to the mesh edges lying on Γ and belonging to Ω_i . Moreover,

$$\tilde{Q}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & Q_{n+1} & 0 \\ Id & 0 & 0 \\ 0 & Id & 0 \\ 0 & 0 & Id \end{pmatrix}$$

is the coupling matrix at time t_{n+1} and K and M are, respectively, the standard stiffness and mass matrices. From relation $\mathbf{U}_{n+1}^{2,\Gamma} = Q_{n+1} \mathbf{U}_{n+1}^{1,\Gamma}$ it is clear why we say that the rotor is the master domain and the stator is the slave one: the stator values are determined in function of the rotor ones. The other choice would lead to an equivalent system.

The presented procedure involves only few modifications in an already existing edge element code. It is important to remark that, the final matrix is symmetric, positive definite and sparse as in the nodal case and the final system can be solved by the iterative Conjugate Gradient procedure.

For what concerns the way the mortar and the final system matrices are built, there are no differences in structure between the case in which the rotor domain is fixed and the case where the rotor domain rotates around its axis. In the first case, the matrix Q is constructed once at the exterior of the temporal loop. In the second case, it is built at each time step: the intersection between the stator and rotor meshes at the interface changes from one time iteration to the next one and so the elements of Q do. The stiffness and the mass matrices K , M , instead, do not depend on time and the computation of their elements is standard.

5 Numerical results

Now we are going to present some numerical results related to problem (5) with mixed Dirichlet boundary conditions on $\partial\Omega$. We will start by considering a simple stationary case in which the stator-rotor interface is a straight line and show how the method works. We will go on treating the case of a circular stator-rotor interface: first, we will show the ability of the method at reproducing the physical solution (with tangential component continuous across the interface), second, results obtained on the full domain geometry will be compared to the results led on a portion of it and, third, the influence of the rotor movement on the currents distribution will be analysed.

5.1 When the stator-rotor interface is a straight line

We consider a simple stationary situation where the stator and “rotor” are a couple of either squared or triangular domains: their sides’ lengths are equal to 2 m for the stator and 1 m for the “rotor” domain in the first case and 2 m and $2\sqrt{2}$ m for both domains in the second case. In Figures 4 (left) and 5 (left) are presented the spatial discretizations of the system geometry, with a finer mesh in one of the domains: as we can see, the two meshes do not match at the interface. Physical parameters are $\sigma_i = 10^2$ S/m and $\mu_i = \mu_0$ ($i=1,2$) and Dirichlet boundary conditions are imposed all along the external boundary, with $u_d = 0 \ \forall t \leq 0$ and, $\forall t > 0$, $u_d = 1$ on the horizontal sides and $u_d = 0$ on the vertical ones. We remark that with this boundary data configuration we have an electric field vector which is parallel to the x-axis and such that, if we consider a mesh edge e_{ij} going from $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$ to $\mathbf{r}_j = (x_j, y_j)$, the associated degree of freedom is given by $\int_{e_{ij}} \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau}_{e_{ij}} ds = x_j - x_i$.

In the right sides of Figures 4 and 5 are reported the electric field distributions at the steady-state, computed on the triangular meshes shown on the left sides. In both cases, we have done 100 temporal iterations with time step $\Delta t = 1.5$ s. Arrows represent the electric field vector evaluated at the elements’ barycentres and the arrows length is adapted automatically with respect to its maximum value by the plotting package itself. The intersection between stator and rotor mesh edges lying Γ is defined in terms of segments and the way the mortar matrix elements are computed simplifies with respect to the circular case since the stator and rotor mesh edges lying on Γ have all the same direction.

Despite the different mesh refinement level in the two domains ($h_1 > h_2$ in Figure 4 and $h_1 < h_2$ in Figure 5), the physical information is correctly transferred from one domain to the other, when the field flow is tangential or normal to the interface, as in Figure 4 (right) and when the field flow forms an angle of -45° with the interface line, as in Figure 5 (right). Situation presented in Figure 5 is more general than that presented in Figure 4 since the electric field has a tangential component on Γ neither zero nor equal to the field modulus. Note that the arrows displayed on the right-hand side of Figures 4 and 5 are somewhere non-parallel to the x-axis as it should be: this occurs only in correspondence of bad shaped mesh triangles and it is in any case linked to the adopted method.

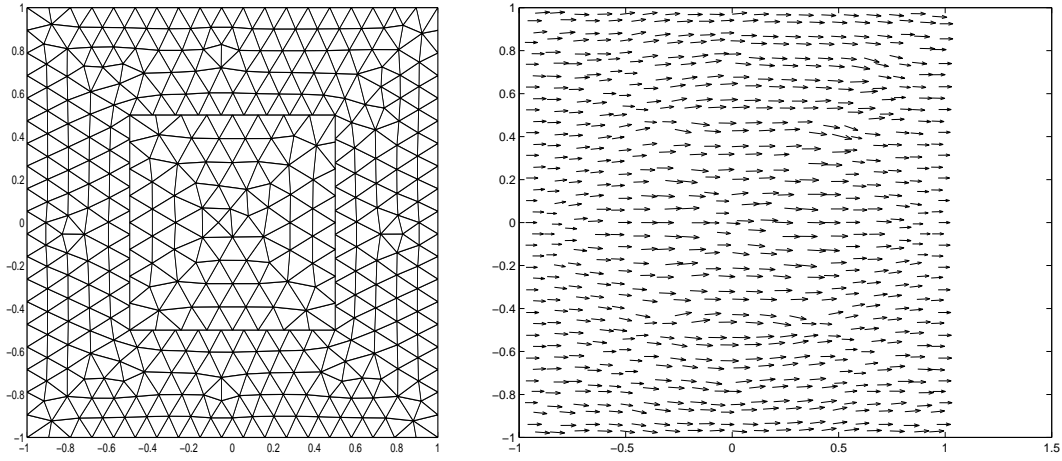


Figure 4: Triangular discretization of the computational domain and electric field distribution at the steady-state. The stator-rotor interface Γ is either normal or parallel to the flux lines.

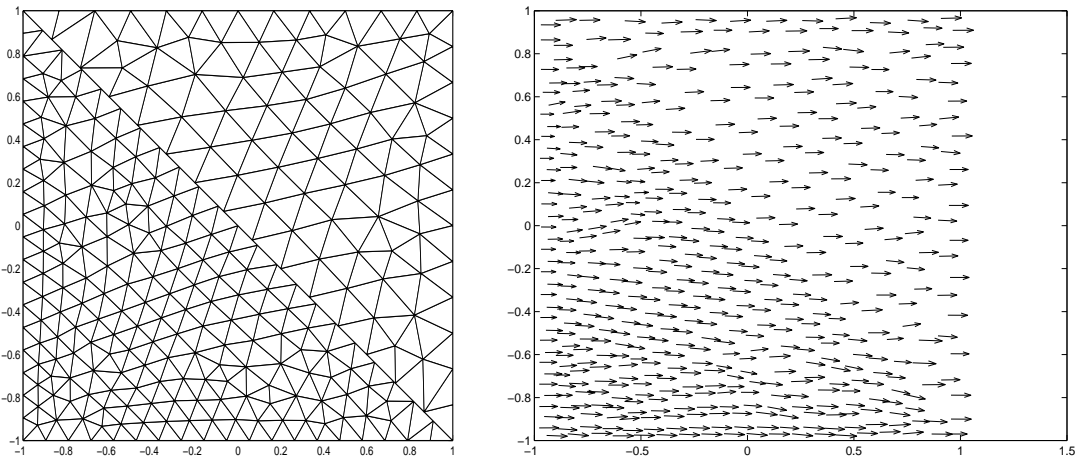


Figure 5: Triangular discretization of the computational domain and electric field distribution at the steady-state. The stator-rotor interface Γ forms an angle of -45° with the flux lines.

5.2 Working in a periodic section of the domain

Now we consider the stator-rotor system presented in Figure 6 (left). The rings' radii are, for the rotor part, $|OA| = 20$ cm, $|OB| = 50$ cm, and for the stator part, $|OB| = 50$ cm, $|OC| = 1$ m. Both rings are composed of the same material characterized by $\sigma_i = 10^2$ S/m and $\mu_i = \mu_0$ ($i=1,2$). Dirichlet conditions are imposed on the circular boundaries of radii $|OA|$ and $|OC|$: for $t \leq 0$ we set $u_d = 0$ on both circles whereas, for $t > 0$, we have $u_d = 1$ on the outer circle and $u_d = 0$ on the inner circle. At the steady-state, the considered boundary data distribution corresponds to a situation where there is a magnetic field flux across the surface between the circles of radii $|OA|$ and $|OC|$ which is uniform in the section and linearly varying in time. Consequently, the inner electric field intensity linearly decreases with the distance from the outer boundary and, for a fixed distance r from the rotor center O , it does not depend on time. In particular, we have $E(r) = (r - |OA|)/(|OC| - |OA|)$. In Figure 6 (right) is reported the electric field distribution at the steady-state in the considered system: arrows represent the computed vector at the elements' barycentres after 100 temporal iterations with time step $\Delta t = 1.5$ s. We note that, due to the circular geometry of the outer stator boundary, the electric field distribution presented in Figure 6 (right) and computed keeping the rotor still, does not change if, with the same physical and boundary parameters, we make the rotor move with a given angular speed.

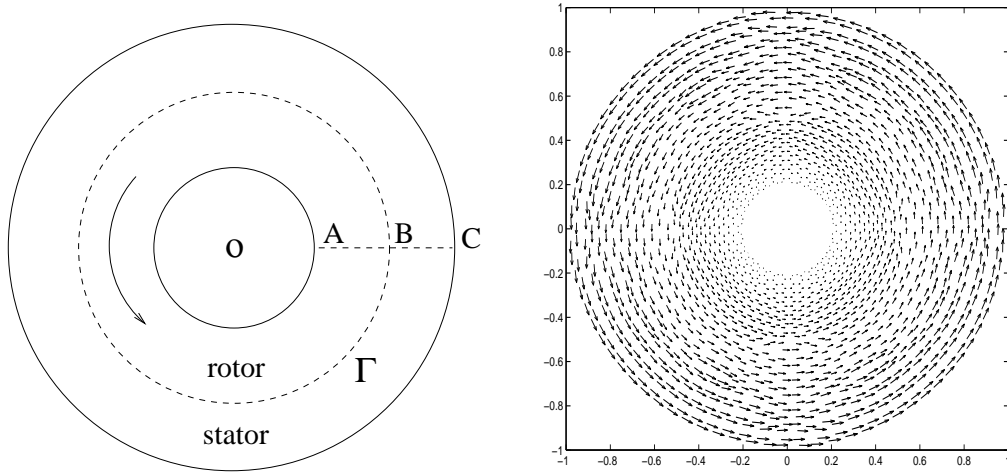


Figure 6: System geometry and electric field distribution at the steady-state.

The interest of this example relies on the possibility of describing the same physical phenomena through numerical results obtained at a minor computational cost. Indeed, using the symmetry both in the geometry and boundary conditions, the computation can be performed only on a portion of the whole domain Ω . With this philosophy, we now consider the case where the system is composed of two ring sectors of amplitude $\theta_{sect} \in (0^\circ, 180^\circ]$ in a polar system of coordinates with centre in the point O and polar axis coincident with the OC line. When the rotor moves, the mortar matrix Q has to be rebuilt at each configuration of the rotor and its elements depend on the interface edges' intersections. When dealing with a sector, the rotor position can be partially or totally outside the stator angles interval as displayed in Figures 7 and 8. In these case, the interface edges' intersections are evaluated

by supposing the rotor in two positions:

$$\theta_1 = \theta_{rot} - \text{isw} \cdot \text{INT} \left(\frac{\theta_{rot}}{\theta_{sect}} \right) \theta_{sect} \quad , \quad \theta_2 = \theta_{rot} - \text{isw} \cdot \text{INT} \left(\frac{\theta_{rot}}{\theta_{sect}} + 1 \right) \theta_{sect}$$

where $\text{isw} = \pm 1$ depending on the rotation sense (+1 if anticlockwise and -1 if clockwise) and INT is the function that returns the integer part of a real number. Figures 7 and 8 show the electric field distribution at the steady-state in the stator and rotor sectors of amplitude $\theta_{sect} = 90^\circ$ and $\theta_{sect} = 180^\circ$, for two positions of the rotor part. In these cases, the moving part rotates of 10° at each time step. These distributions coincide with that reported in Figure 6 (right) in the corresponding portions.

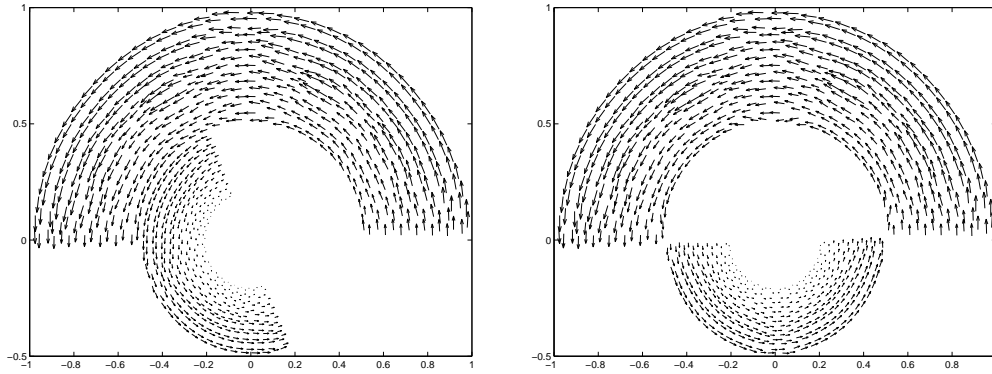


Figure 7: Electric field distributions at the steady-state for two positions of the rotor, when the sector amplitude is $\theta_{sect} = 180^\circ$.

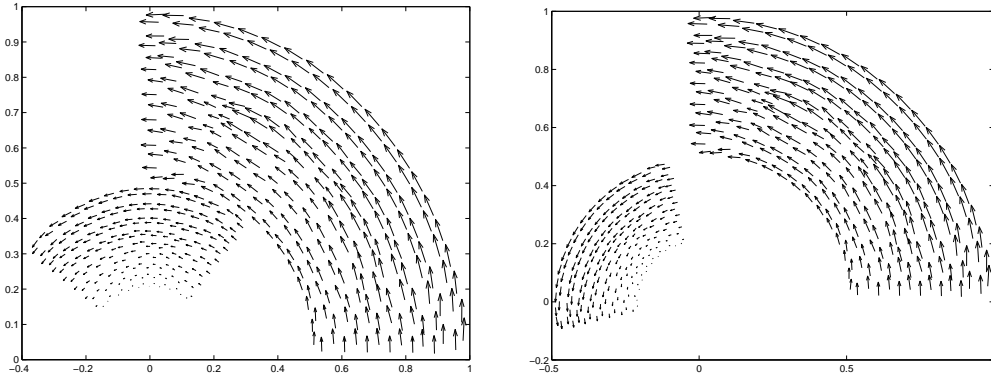


Figure 8: Electric field distributions at the steady-state for two positions of the rotor, when the sector amplitude is $\theta_{sect} = 90^\circ$.

As it can be remarked by looking at Figure 6 (right), in correspondence of the four cardinal points in a neighbourhood of the stator-rotor interface, the quality of the computed electric field is poorer than in other zones. This is due to the fact that in order to compare the results obtained in a quarter or half domain with those computed in the whole domain, we had to build the whole mesh via successive simmetries. All the mesh elements close to the simmetry axis turn out to be not well shaped and this cannot be improved even using rotations at the place of simmetries. We note that we are discretizing a domain with circular boundaries by means of triangles with straight edges. It is a general rule to use, in proximity of circular boundaries, a layer of mesh triangles with at least one curve edge, i.e. to work with isoparametric elements. In the case of a first order approximation, this would not increase the method accuracy but would sensibly complicate the method implementation: in fact, for each of the curve triangles K , we should take as F_K a quadratic transformation from the reference triangle \hat{K} to K , work with a jacobian depending on the spatial coordinates and the tangent vector along the curve edges with a varying direction. Moreover, the computation of the mortar matrix elements would necessarily involve suitable integration schemes.

5.3 Continuity of the tangential component across the interface

We want now to test the ability of the mortar edge element method at preserving the continuity of the tangential component of the electric field across the interface, despite this continuity is weakly imposed. To do this, we will compare the values of the tangential component of the electric field at the mesh edges lying on Γ computed in the stator and rotor parts.

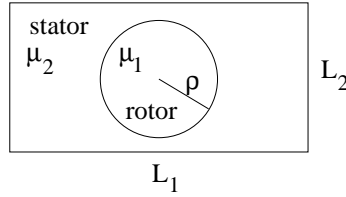


Figure 9: The computational domain.

As drawn in Figure 9, the rotor is a circle of radius $\rho = 50\text{ cm}$ centered at the origin of the (x, y) coordinates system and the stator is a rectangular domain with sides of length $L_1 = 3\text{ m}$ and $L_2 = 1.4\text{ m}$ minus the central rotor part. The considered physical parameters are $\sigma_i = 10^3\text{ S/m}$ and $\mu_i = \mu_0$ ($i=1,2$) and Dirichlet boundary conditions are imposed at the stator boundary, with $u_d = 0$ for $t \leq 0$ and $u_d = 1$ for $t > 0$. Simulations are run with the following discretization parameters.

(1) We consider a stator and rotor meshes with 56 nodes on Γ . The rotor is supposed either standing still or rotating with 3.2° at each time step. In both cases, the stator and rotor meshes do not match at the interface: in the stationary case, before starting the simulation, the rotor mesh has been slightly rotated with respect to the stator one, with an angle $\theta \neq 360^\circ/56$, and in the non-stationary case, the rotation angle 3.2° has been chosen different from $360^\circ/56$.

(2) We keep the rotor mesh with 56 nodes on Γ and we build two other stator meshes with 48 and 64 nodes on Γ . The rotor part is always kept fixed and we remark that the chosen domains' meshes do not match at the interface.

The time step is $\Delta t = 1.5\text{ s}$ and we always perform 225 temporal iterations.

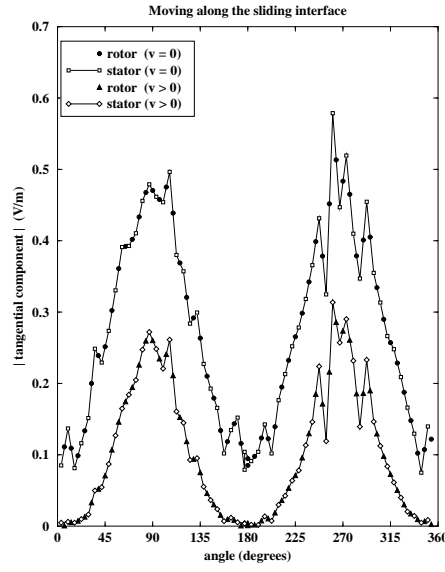


Figure 10: Tangential component of the computed steady-state electric field at the mesh edges lying on Γ . Results are obtained by considering once the rotor standing still and then rotating with a given angular speed $\omega \neq 0$.

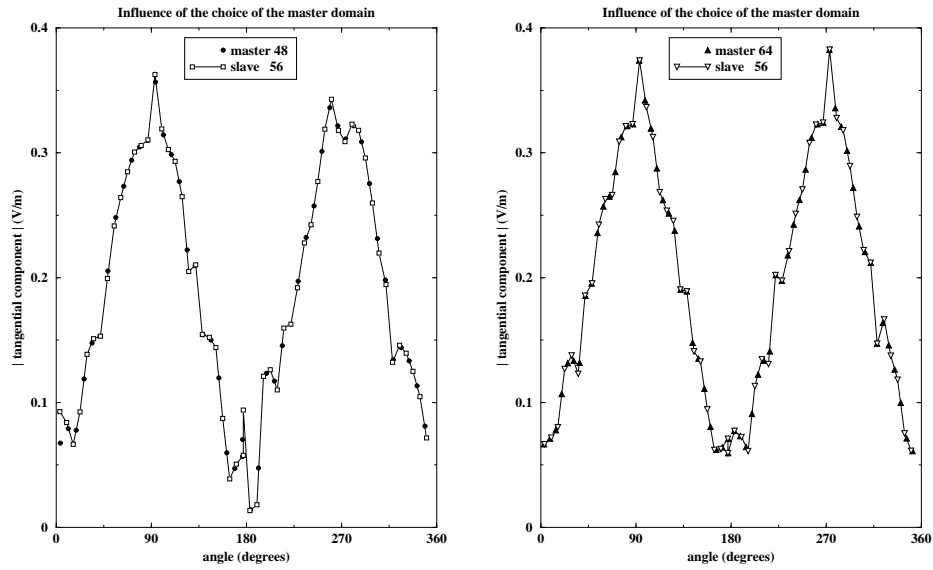


Figure 11: Tangential component of the computed steady-state electric field at the mesh edges lying on Γ . Results are obtained by keeping the structure in the initial configuration. We have used a slave (rotor) and master (stator) meshes with respectively 56 and 48 nodes on Γ for the left side figure, 56 and 64 nodes on Γ for the right side one.

Each mesh node on the interface can be located by its angle. A mesh edge lying on Γ can be instead located by the angle of its barycenter. This angle is computed in a polar system of coordinates with center in the rotation center and axis parallel to the x direction. The tangential component of $\mathbf{E}_{i,h}$ on an edge $e \in \mathcal{T}_{i,h}$ ($i=1,2$) is computed by multiplying the circulation of $\mathbf{E}_{i,h}$ along e for the edge length. In Figures 10 and 11 is reported (on the y-axis) the tangential component at the stator and rotor mesh edges lying on Γ of the steady-state electric field computed with simulation parameters given in (1) and (2). Each of these values is drawn with respect to the angle (reported on the x-axis) of the barycenter of the edge on which it has been computed. Despite the weak imposition of the matching condition (TC_1), results show that the numerical solution reproduces a physical one: indeed the tangential component of the electric field looks "continuous" across the interface.

Looking at Figure 10 we can see that this "continuity" is respected in case (1), both when the rotor stands still and when it moves with the given angular speed. The values of the computed tangential component at the interface edges in the latter situation are smaller than those in the former one due to the minor penetration of the electric field in the moving rotor domain.

This "continuity" is respected in the stationary case (2), as presented in Figure 11, both when the length of the mesh edges lying on Γ in the master (stator) domain is shorter or longer than that of the mesh edges lying on Γ in the slave (rotor) domain.

5.4 Influence of the rotor movement on the electric field distribution

Finally, we want to show the influence of the rotor motion on the eddy currents distribution within the domain. To do this, we consider the situation displayed in Figure 9. Dirichlet boundary conditions are imposed at the stator boundary, with $u_d = 0$ for $t < 0$ and $u_d = 1$ for $t \geq 0$. A characteristic dimension of the problem is the depth of penetration of the electric field in the rotor domain

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu_0 \sigma f}}.$$

Denoted by ρ the rotor radius and v the rotation tangential speed, the rotation angular speed is $\omega = \frac{v}{\rho}$ to which it corresponds a frequency $f = \frac{v}{2\pi\rho}$. The value $v = v_1 \approx 10 (2\pi\rho)^{-1}$ has been chosen by supposing that

$$\sigma_1 = 10^3 S/m, \quad \mu_1 = 10^3 \mu_0, \quad \delta \approx \rho.$$

To have the rotor cycling once in 55 time iterations, we impose that the rotation angle at each time step is equal to 6.50° . In this case we have

$$\Delta t = \Delta t_1 = \frac{6.50 \pi}{180 \omega_1} \approx 0.018 \text{ s}.$$

The acceleration of the rotor movement is obtained considering for v multiples greater than one of the initial speed v_1 . We are now going to present some numerical results related to the following parameters' choices:

- (1) $\Delta t = \Delta t_1$, $v = 0$, $nit = 6000$;
- (2) $\Delta t = 1000 \Delta t_1$, $v = v_1/1000$, $nit = 60$;
- (3) $\Delta t = 100 \Delta t_1$, $v = v_1/100$, $nit = 60$;
- (4) $\Delta t = 10 \Delta t_1$, $v = v_1/10$, $nit = 600$,

where nit represents the number of temporal iterations. In cases (1)-(4), both domains are characterized by the same value of the conductivity i.e. $\sigma_2 = 10^3 S/m$ and the magnetic permeabilities are $\mu_1 = 10^3 \mu_0$ and $\mu_2 = \mu_0$, so to create a gradient of penetration of the electric field in the rotor domain.

The following Figures report the steady-state electric field distributions in the rotor domain and corresponding to the considered cases. Arrows represent the computed vector at the elements' barycentres. When the rotor does not move or turns slowly (cases (1) and (2)), the eddy currents flow also in the rotor domain as it can be seen by looking at Figures 12. When the rotor moves faster (cases (3) and (4)), eddy currents start to circulate mostly in the stator part of the domain. In the rotor, they concentrate near the sliding interface (see Figure 13 (left)) creating a boundary layer that becomes thinner as the angular speed increases (see Figure 13 (right)). This can be explained by observing that, increasing the angular speed, the penetration depth of currents into the rotor domain decreases. Moreover, the eddy current distribution is such to create an angular momentum that contrasts the rotation. It is expected that, when the steady-state is achieved, current distribution for a given rotor position is time independent, something also confirmed by the results.

It should be noticed the difference in the length of the arrows which are tangent to Γ : this length reaches its maximum in proximity of the stator horizontal sides and its minimum in proximity of the stator vertical sides. This difference is due to the rectangular geometry of the stator domain. In fact, if we look at Figure 6 (right) related to the case where the stator domain has a circular boundary, the arrows tangent to Γ have all the same length.

5.5 Conclusions

A non-conforming approximation of the eddy current problem in moving structures has been briefly presented and analysed mainly from the implementation point of view. Based on the sliding-mesh mortar edge element method, this approximation has allowed to work in a very elegant way with domain discretizations that do not match at the interface and treat the unusual case of a sliding electric contact. The interest of the proposed method is focused on the following issues: (1) the imposition at a discrete level of the transmission condition for the tangential component modulus of the electric field across the sliding interface, is done without any constraint between the temporal and the spatial steps; (2) the system of the discretized problem has a symmetric, positive definite and sparse matrix. Due to the satisfying results obtained for two dimensional approximations, the sliding-mesh mortar methodology should allow for three dimensional simulations and work is progressing in this direction.

Acknowledgements

This work has been developed in collaboration with researchers from the A.S.C.I. (Applications Scientifiques du Calcul Intensif) and L.G.E.P. (Laboratoire Genie Electrique de Paris) laboratories and it has the financial support of the European Community (TMR Contract number ERB4001GT965424).

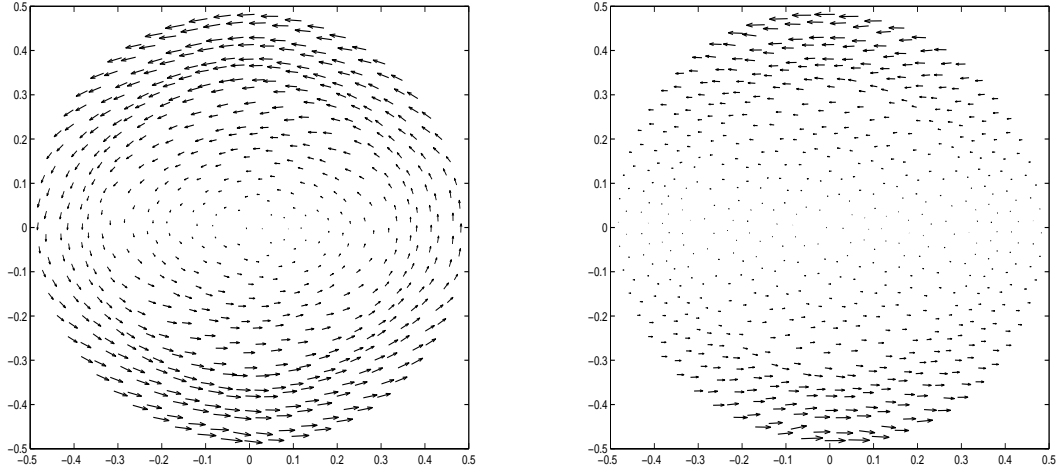


Figure 12: Electric field distributions in the rotor moving at speeds zero and $\omega_1/1000$

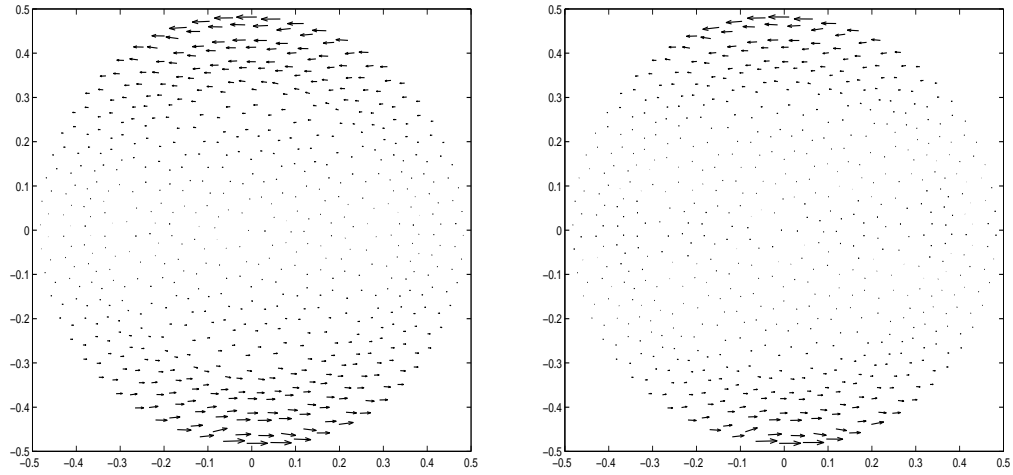


Figure 13: Electric field distributions in the rotor moving at speeds $\omega_2 = \omega_1/100$ and $\omega_3 = \omega_1/10$

References

- [1] A. Buffa, Y. Maday and F. Rapetti, ' A sliding mesh-mortar method for a two-dimensional eddy currents model of electric engines ', technical report of the Laboratoire d'Analyse Numérique (Université de Paris VI), No. R99002 (submitted to *M²AN*), (1999).
- [2] F. Rapetti, L. Santandrea, F. Bouillault and A. Razek, ' Calculation of eddy currents in moving structures using a finite element method on non-matching grids ', accepted for publication in *COMPEL*, (1999).
- [3] C.R.I. Emson, C.P. Riley, D.A. Walsh, K. Ueda and T. Kumano, ' Modelling eddy currents induced in rotating systems ', *IEEE Trans. Mag.*, 34, 2593-2596, (1998).
- [4] A. Razek, J. Coulomb, M. Felliachi and J. Sobonnadière, ' Conception of an air-gap element for dynamic analysis of the electromagnetic fields in electric machines ', *IEEE Trans. Mag.*, 18, 655-659, (1982).
- [5] A. Nicolet, F. Delincé, A. Genon and W. Legros, ' Finite elements - boundary elements coupling for the movement modeling in two dimensional structures ', *J. de Phys.III*, 2, 2035-2044, (1992).
- [6] B. Davat, Z. Ren and M. Lajoie-Mazenc, ' The movement in field modeling ', *IEEE Trans. Mag.*, 21, 2296-2298, (1985).
- [7] Y. Marechal, G. Meunier, J.L. Coulomb and H. Magnin, ' A general purpose tool for restoring inter-element continuity ', *IEEE Trans. Mag.*, 28, 1728-1731, (1992).
- [8] C. Golovanov, J.-L. Coulomb, Y. Marechal and G. Meunier, ' 3D mesh connection techniques applied to movement simulation ', *IEEE Trans. Mag.*, 34, 3359-3362, (1998).
- [9] D. Rodger, H.C. Lai and P.J. Leonard, ' Coupled elements for problems involving movement ', *IEEE Trans. Mag.*, 26, 548-550, (1990).
- [10] I.J. Tsukerman, ' Overlapping finite elements for problems with movement ', *IEEE Trans. Mag.*, 28, 2247-2249, (1992).
- [11] Y. Maday, C. Bernardi and A. Patera, ' A new nonconforming approach to domain decomposition: The mortar elements method', in *Nonlinear partial differential equations and their applications*, H. Brezis and J. Lions, eds., Pitman, 13-51, 1994.
- [12] A. Ben Abdallah, F. Ben Belgacem and Y. Maday, ' Mortaring the two-dimensional "Nédélec" finite elements for the discretization of the Maxwell equations ', submitted to *M²AN*, (1998).
- [13] F. Ben Belgacem, A. Buffa and Y. Maday, ' The mortar element method for 3D Maxwell equations: first results ', technical report of the Laboratoire d'Analyse Numérique (Université de Paris VI), (submitted to *SIAM J. Numer. Anal.*), (1999).
- [14] A. Bossavit, *Electromagnetisme en vue de la modelisation*, Springer-Verlag, France, 1986.
- [15] A. Bossavit, ' Le calcul des courants de Foucault en dimension 3, avec le champ électrique comme inconnue. I: principes ', *Revue Phys. Appl.*, 25, 189-197, (1990).
- [16] P. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [17] J. C. Nédélec, ' Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 ', *Numer. Math.*, 35, 315-341, (1980).

7.2 *Article 5* – The Mortar Element Method for 3D Maxwell’s equations: analysis and application to magnetodynamics

par *A. Buffa, Y. Maday, F. Rapetti*

soumis à la 12th Int. Conf. on Domain Decomposition Methods, Chiba (1999).

The Mortar Element Method for 3D Maxwell's equations: analysis and application to magnetodynamics

A. Buffa*, Y. Maday^{†‡}, F. Rapetti[‡]

1 Introduction

1.1 Summary

In this paper, we describe the main ideas of the mortar element method combined with $H(\mathbf{curl})$ -conforming finite elements for the numerical approximation of Maxwell's equations. This method turns out to be a new non-conforming, non-overlapping domain decomposition technique where non-matching grids are allowed at the interface between adjacent sub-domains. We report the results on the method's convergence and error estimate together with the description of the main implementation details and some numerical results.

1.2 Position of the problem

We are interested in a system that can be modeled by the set of Maxwell's equations when the displacement currents are neglected:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \mathbf{curl} \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} && \text{in } \Omega \times]0, T[\\
 (b) \quad & \mathbf{curl} \mathbf{H} = \mathbf{J} && \text{in } \Omega \times]0, T[\\
 (c) \quad & \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} && \text{in } \Omega \times]0, T[\\
 (d) \quad & \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} && \text{in } \Omega \times]0, T[
 \end{aligned} \tag{1}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is bounded, \mathbf{E} , \mathbf{H} are the electric and magnetic fields, \mathbf{B} the magnetic induction and \mathbf{J} the current density. In system (1), ∂_t stands for the first derivative in time.

The physical parameters of the problem are: the magnetic permeability μ and the electric conductivity σ . Without loss of generality we assume that μ is a

* Università degli Studi di Pavia, Dip. di Matematica, Via Ferrata 1, 27100 Pavia, Italy

[†]Laboratoire d'Analyse Numérique BC187, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

[‡]ASCI-UPR 9029 CNRS, Université Paris Sud, Bâtiment 506, 91403 Orsay cedex, France

positive constant and σ is simply bounded. We set $\mathcal{C} = \text{supp}\{\sigma\}$ the conducting part and we assume that \mathcal{C} is simply connected.

In three-dimensional magnetodynamic applications, system (1) is usually reformulated in terms of a primary variable which is either the magnetic field \mathbf{H} or the magnetic vector potential \mathbf{A} . In both cases, by re-writing system (1) in terms of the chosen primary variable, we obtain the following parabolic equation which is the object of our study:

$$\partial_t(\alpha \mathbf{u}) + \mathbf{curl}(\beta \mathbf{curl} \mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \times]0, T[, \quad (2)$$

with α and β two functions related to the physical parameters σ and μ and \mathbf{f} related to the external sources. Equation (2) can be non-strictly parabolic: this may occur when working with the magnetic vector potential. In this case, a gauge condition (e.g., $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$ where $\alpha = 0$) has to be added to equation (2) to ensure the uniqueness of the solution. Moreover, we assume:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial\Omega \times]0, T[\quad \text{and} \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{a.e. in } \mathbf{x} \in \overline{\mathcal{C}}. \quad (3)$$

We introduce the following Hilbert spaces (endowed with the corresponding graph norms)

$$\begin{aligned} H(\mathbf{curl}, \Omega) &= \{ \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3 \mid \mathbf{curl} \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3 \}, \\ H_0(\mathbf{curl}, \Omega) &= \{ \mathbf{u} \in H(\mathbf{curl}, \Omega) \mid (\mathbf{u} \wedge \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = \mathbf{0} \}. \end{aligned} \quad (4)$$

The variational formulation of the problem (2) reads:

$$\begin{aligned} \text{Find } \mathbf{u} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \text{ such that } \forall \mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega) : \\ \int_{\Omega} \partial_t \alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \beta \mathbf{curl} \mathbf{u} \cdot \mathbf{curl} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (5)$$

It can be proved that this problem admits a unique solution when suitably interpreted in time and a gauge condition is imposed where $\alpha = 0$. Note that when $\alpha = 0$ everywhere, (2) is the magnetostatic problem and (5) its variational formulation.

The main concern of our work is to propose an efficient domain decomposition method for this type of equations, discretized by using edge element approximation in three dimensions which allows for non-matching grids. The outline of the paper is the following: in Section 2 the mortar element method is proposed, the analysis is sketched and some details of the implementation are given. Section 3 is devoted to the applications: we present some preliminary numerical results in the magnetostatic case and the governing equations for the magnetodynamic problem in moving geometries. Numerical simulations in the latter case are in progress.

2 Definition and analysis of the mortar element method

Since the definition and analysis of a domain decomposition procedure for (2) is strictly related to the choice of the spatial discretization, in this section, without

loss of generality, we consider the following model problem:

$$\begin{aligned} & \text{Find } \mathbf{u} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \text{ such that } \forall \mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \\ & \int_{\Omega} \mathbf{curl} \mathbf{u} \cdot \mathbf{curl} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (6)$$

This problem admits obviously a unique solution in $H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ and it is worth noting that it is strictly related to (2): when the parameters of the problem are set equal to 1 and an implicit time stepping procedure is applied, (6) is the problem that we have to solve at each time step. The case of vanishing α will be the object of further remarks.

2.1 Approximation spaces

2.1.1 Partition of the domain and local spaces

Assume here that the domain Ω is a convex bounded (Lipschitz) polyhedral¹ subset of \mathbb{R}^3 . Let $\Omega_k \subseteq \Omega$, for $1 \leq k \leq K$, be a non-overlapping, polyhedral partition of Ω , that is:

$$\overline{\Omega} = \cup_{k=1}^K \overline{\Omega}_k \quad \text{with} \quad \Omega_k \cap \Omega_l = \emptyset \text{ if } k \neq l. \quad (7)$$

For every k ($1 \leq k \leq K$) we denote by \mathbf{n}_k the outer normal to Ω_k and we call $\{\Gamma^{k,i}\}_{1 \leq i \leq F(k)}$ the $F(k)$ faces of the polyhedron Ω_k . We define the **skeleton** Σ as $\Sigma = \cup_{k=1}^K \cup_{i=1}^{F(k)} \partial\Omega_k \setminus \partial\Omega$. Let $\boldsymbol{\tau}^{k,i}$ be the counterclockwise tangential vector to $\partial\Gamma^{k,i}$; we define also the outer normal to $\partial\Gamma^{k,i}$ as $\mathbf{n}^{k,i} = \boldsymbol{\tau}^{k,i} \wedge \mathbf{n}_k$.

Among several possibilities we choose a splitting of the skeleton Σ as the disjoint union of some closed faces $\{\overline{\Gamma}^{k,i}\}_{k,i}$ that we call *slave faces*. A unique set of indices corresponds to this choice and we denote it by: $\mathcal{I}_M = \{m = (k, i) \text{ such that } \Gamma^{k,i} \text{ is a slave face}\}$.

To shorten the notations we denote the slave faces by Γ^m ($1 \leq m \leq M$) and, as prescribed, we have: $\overline{\Sigma} \equiv \cup_{m=1}^M \overline{\Gamma}^m$ and $\Gamma^m \cap \Gamma^n = \emptyset$ if $m \neq n$. Moreover we set: $\overline{\gamma}^{l,k} = \partial\Omega_l \cap \partial\Omega_k$. We define the following “broken” space:

$$X := \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3 \mid \mathbf{u}|_{\Omega_k} \in H(\mathbf{curl}, \Omega_k), (\mathbf{u} \wedge \mathbf{n})|_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_k} = \mathbf{0} \, 1 \leq k \leq K\}. \quad (8)$$

As standard, X is a Hilbert space endowed with the following broken norm: $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{x}, \mathbf{curl}}^2 := \sum_{k=1}^K \|\mathbf{u}|_{\Omega_k}\|_{\mathbf{curl}, \Omega_k}^2$.

For each index k ($1 \leq k \leq K$), we introduce a regular quasi-uniform triangulation $\mathcal{T}_{h(k)}^k$ on the sub-domain Ω_k and we denote by h the maximum of the mesh sizes. These partitions can be composed either of tetrahedra or parallelepipeds; they are completely independent and thus, in general, non-matching at the interfaces $\{\gamma^{k,l}\}_{k,l}$.

Let \hat{K} be the reference tetrahedron or cube. For every $K_i \in \mathcal{T}_{h(k)}^k$, we denote by $\mathcal{F}_i : \hat{K} \rightarrow K_i$ a bijective mapping from \hat{K} to K_i . These mappings

¹The whole theory applies even when Ω is a regular bounded subset of \mathbb{R}^3 . Of course, in this case the subdomain $\{\Omega_k\}_k$, defined afterwards, can not be polyhedra but curved polyhedra.

can be chosen as *linear* both in the case of tetrahedra and parallelepipeds: $\mathcal{F}_i(\hat{\mathbf{x}}) = \mathcal{B}_i \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{c}_i$ where $\mathcal{B}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ is an invertible matrix and $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^3$ is a constant field. Over each sub-domain Ω_k we define the finite dimensional space which is at the base of the domain decomposition method:

$$Y_h^k := \{\mathbf{v}_h^k \in H(\mathbf{curl}, \Omega_k) \mid \mathcal{B}_i^T(\mathbf{v}_h^k|_{K_i} \circ \mathcal{F}_i) \in \mathcal{P}_{p(k)} \ \forall K_i \in \mathcal{T}_{h(k)}^k\}, \quad (9)$$

where $\mathcal{P}_{p(k)}$ denotes a family of Nédélec type finite elements for Maxwell's equations of degree $p(k)$ (see [5, 6] for a complete definition). Furthermore we set:

$$X_h := \{\mathbf{v}_h \in X \mid \mathbf{v}_h^k := \mathbf{v}_h|_{\Omega_k} \in Y_h^k \text{ and } (\mathbf{v}_h^k \wedge \mathbf{n})_{\partial\Omega \setminus \partial\Omega_k} = \mathbf{0}\}, \quad (10)$$

and in the following we denote the elements $\mathbf{v}_h \in X_h$ both as functions and as K -uplets $\mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_h^1, \mathbf{v}_h^2, \dots, \mathbf{v}_h^K)$ where $\mathbf{v}_h^k \in Y_h^k$ ($1 \leq k \leq K$). We use both notations since it is never misleading. Since we deal with tangential traces of these vector fields, we introduce some further definitions. For any index $m = (k, i) \in \mathcal{I}_M$, we set $T_h^{k,i} = \{(\mathbf{v}_h^k \wedge \mathbf{n}_k)|_{\Gamma^{k,i}} \mid \mathbf{v}_h^k \in Y_h^k\}$ and its subset $T_{h,0}^{k,i} = \{\boldsymbol{\lambda}_h \in T_h^{k,i} \mid (\boldsymbol{\lambda}_h \cdot \mathbf{n}^{k,i})|_{\partial\Gamma^{k,i}} = 0\}$.

Let Γ^m be a *slave face* with $m = (k, i)$ the corresponding indices and $\mathbf{v}_h \in X_h$: for almost every $\mathbf{x} \in \Gamma^m$ there exists an l ($1 \leq l \leq K, l \neq k$), such that $\mathbf{x} \in \Gamma^m \cap \gamma^{k,l}$. At this point \mathbf{x} , we have two fields, namely \mathbf{v}_h^k and \mathbf{v}_h^l . In general, since the macro-decomposition is non-conforming, the value of l depends on the point \mathbf{x} and we denote by I_m the set of indices l ($1 \leq l \leq K, l \neq k$) such that $\Gamma^m \cap \gamma^{k,l} \neq \emptyset$. We then set $\mathbf{v}_h^{-k}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_h^l(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \Gamma^m \cap \gamma^{k,l}$, $l \in I_m$. The function $\mathbf{v}_h^{-k}(\mathbf{x})$ is defined at almost every $\mathbf{x} \in \Gamma^m$. Due to the non-conformity of the macro-decomposition, $\mathbf{v}_h^{-k}(\mathbf{x})$ is not in general the tangential trace at Γ^m of a field \mathbf{v} in $H(\mathbf{curl}, \Omega_k)$.

2.1.2 Constraint problem and matching condition

Let $\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$, we have that $(\mathbf{v}^{-k} \wedge \mathbf{n})|_{\Gamma^m} = (\mathbf{v}^k \wedge \mathbf{n})|_{\Gamma^m}$ in $(H_{00}^{1/2}(\Gamma^m))'$. The purpose of this section is to express how to impose this condition on the discrete broken space in a weak sense. To this aim, we define, for any $m \in I_m$, $M_h^m \subseteq T_h^m$, $\dim\{M_h^m\} = \dim\{T_{h,0}^m\}$. We set:

$$M_h := \{\boldsymbol{\psi}_h \in L^2(\Sigma)^2 \mid \forall m \in I_m, \boldsymbol{\psi}_h|_{\Gamma^m} \in M_h^m\}. \quad (11)$$

As before we also adopt the vector notation $\boldsymbol{\psi}_h = (\psi_h^1, \psi_h^2, \dots, \psi_h^M)$ when it is convenient. Then, we propose the following non-conforming approximation space for $H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$:

$$X_h^c = \{\mathbf{v} \in X_h \mid \forall m, \int_{\Gamma^m} (\mathbf{v}_h^k \wedge \mathbf{n}_k - \mathbf{v}_h^{-k} \wedge \mathbf{n}_k) \cdot \boldsymbol{\psi}_h \, d\Gamma = 0 \ \forall \boldsymbol{\psi}_h \in M_h^m\}. \quad (12)$$

The discrete problem reads: find $\mathbf{u}_h \in X_h^c$ such that $\forall \mathbf{v}_h \in X_h^c$:

$$\sum_{k=1}^K \left[\int_{\Omega_k} \mathbf{curl} \mathbf{u}_h^k \cdot \mathbf{curl} \mathbf{v}_h^k \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_k} \mathbf{u}_h^k \cdot \mathbf{v}_h^k \, d\mathbf{x} \right] = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h^c. \quad (13)$$

The numerical properties of the space X_h^c depend strongly on the choice of the Lagrange multiplier space M_h . In the following, we discuss our choice for this space and, we proceed to the analysis of the method. We refer to [4] for a different approach using the first family of edge elements.

Thanks to the locality in the definition (11) of M_h , we focus our attention on a single slave face Γ^m . Γ^m is decomposed by $\mathcal{T}_{h(k)|\Gamma^m}^k$ either into triangles or parallelograms. For every parallelogram (resp. triangle) of $\mathcal{T}_{h(k)|\Gamma^m}^k$, there exists a linear mapping F_i satisfying $T_i = F_i(\hat{T})$ where \hat{T} is the reference square $]-1, 1[^2$ (resp. the reference triangle $\hat{T} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1-x\}$). The construction of M_h^m consists in imposing additional constraints at T_i^m on the parallelograms (resp. triangles) which meet the boundary $\partial\Gamma^m$. We denote by BT^m the set of all these elements T_i and assume that the mapping F_i associates to (one of) the boundary edge(s) $(\overline{T}_i \cap \partial\Gamma^m)$ an edge of \hat{T} that is parallel to a Cartesian axis (this is exhaustive up to a rotation). Our choice of the Lagrange multiplier space turns out to be:

Case of parallelograms:

$$M_h^m := \{\lambda_h^m \in T_h^m \mid B_i^{-1}(\lambda_h^m \circ F_i) \in \mathbb{Q}_{p,p}(\hat{S}) \times \mathbb{Q}_{p,p-1}(\hat{S}), T_i \in BT^m\} \quad (14)$$

where $\mathbb{Q}_{p,p'}$ denotes the space of polynomials which are of degree p in the first variable and of degree p' in the second one. Of course, if a corner of Γ^m belongs to the parallelogram \overline{T}_i , then the Lagrange multiplier λ_h^m is chosen so that $B_i^{-1}(\lambda_h^m \circ F_i) \in \mathbb{Q}_{p-1,p}(\hat{S}) \times \mathbb{Q}_{p,p-1}(\hat{S})$.

Case of triangles:

$$M_h^m := \{\lambda_h^m \in T_h^m \mid B_i^{-1}(\lambda_h^m \circ F_i) \in P_p(\hat{T}) \times P_{p-1}(\hat{T}), T_i \in BT^m\}. \quad (15)$$

As before, if a corner of Γ^m belongs to the triangle \overline{T}_i , then the Lagrange multiplier λ_h^m is chosen so that $B_i^{-1}(\lambda_h^m \circ F_i) \in P_{p-1}(\hat{T}) \times P_{p-1}(\hat{T})$.

The spaces T_h^m and M_h^m are $H(\text{div})$ -conforming and the degrees of freedom are related to the normal components of the fields along the edges. We refer to [2] for a complete characterization.

The following proposition holds in both cases of triangles and parallelograms:

Proposition 2.1 *Let $\Pi_h^m : L^2(\Gamma^m)^2 \rightarrow T_{h,0}^m$ be defined by*

$$\int_{\Gamma^m} (\mathbf{u} - \Pi_h^m \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_h \, d\Gamma = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi}_h \in M_h^m. \quad (16)$$

There exists a constant C independent of h such that the following stability estimate holds:

$$\forall \mathbf{u} \in L^2(\Gamma^m)^2, \quad \|\Pi_h^m \mathbf{u}\|_{0,\Gamma^m} \leq C \|\mathbf{u}\|_{0,\Gamma^m}. \quad (17)$$

Remark 2.2 *If one deals with the first family of Nédélec type finite elements (see [5]), then at the interface Γ^m the space T_h^m is of Raviart-Thomas type and the Lagrange multiplier space can be similarly defined (see [4]).*

2.2 Convergence result

In this Section we simply state the convergence results concerning problem (13) whose proofs can be found in [2]. We have

Theorem 2.3 *Let $\mathbf{u} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ be the solution of problem (6) and \mathbf{u}_h the solution of problem (13) with M_h defined by (14) or (15). We assume that $\mathbf{u}_k \in H^{p+1}(\Omega_k)$ with $\mathbf{curl} \mathbf{u}_k \in H^{p+1}(\Omega_k)$ ($1 \leq k \leq K$) and we suppose that there exists a uniform constant γ such that $\max_k \{h_k\} \leq \gamma \min_k \{h_k\}$. We set $h := \max_k \{h_k\}$. The following estimate holds:*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{*, \Omega} \leq C_1 h^p \left(\sum_{k=1}^K \|\mathbf{u}\|_{p+1, \Omega_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + C_2 h^p \sqrt{|\ln h|} \left(\sum_{k=1}^K \|\mathbf{curl} \mathbf{u}\|_{p+1, \Omega_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

where C_1, C_2 are uniform constants depending only on the macro-decomposition.

Note that the first term comes from the best approximation error and the second one from the consistency error.

Remark 2.4 *The same error estimate holds when the coefficients are not set equal to one but they jump through the different sub-domains: the constant in front of the right hand side will depend on the size of their jumps.*

Remark 2.5 - Imposing a gauge condition - *When the parameter α is vanishing on a part of the domain, equation (6) must be replaced by:*

$$\int_{\Omega} \alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} \beta \mathbf{curl} \mathbf{u} \cdot \mathbf{curl} \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx; \quad \text{div}(\mathbf{u})|_{\{\alpha=0\}} = 0. \quad (19)$$

The definition of the proposed method in this case would involve a non-conforming mortar element approximation of the mixed problem related to (19) which is still not understood. Nevertheless, it is worth noticing that when the partition (7) is chosen in a way that $\alpha = 0$ in one sub-domain only, say $\Omega_{\bar{k}}$, the sub-domains are decomposed in polyhedra and none of the faces of $\Omega_{\bar{k}}$ is slave; then problem (19) can be suitably approximated. The discrete problem is: find $\mathbf{u}_h \in X_h^c$ such that $\forall \mathbf{v}_h \in X_h^c$ and $p_h \in S^{p+1}(\mathcal{T}_h^{\bar{k}}, \Omega_{\bar{k}}^-) \cap H_0^1(\Omega_{\bar{k}}^-)$:

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_{\bar{k}}} \alpha \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h \, dx + \int_{\Omega} \beta \mathbf{curl} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{curl} \mathbf{v}_h \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, dx \quad (20)$$

$$\text{and} \quad \int_{\Omega_{\bar{k}}} \mathbf{u}_h \cdot \text{grad} p_h \, dx = 0 \quad (21)$$

where $S^{p+1}(\mathcal{T}_h^{\bar{k}}, \Omega_{\bar{k}}^-)$ is the standard scalar space of Lagrange finite elements of degree $p+1$. Making use of the approximation results proved in [1] and the ones of the previous section, it can be proved that (20)–(21) admits a unique solution and the error estimate (18) holds true when \mathbf{u} is solution of (19) and \mathbf{u}_h of (20)–(21).

*On the other hand, when the quantity of interest is the magnetic vector potential, a unique solution can be selected by using a suitable iterative solver and expressing $\mathbf{J} = \text{curl } \mathbf{T}$ for a vector \mathbf{T} . Note that only the **curl** of the magnetic vector potential is needed: so, the magnetic induction is uniquely determined in any case.*

2.3 Reduction of the computational cost

The use of the second family of Nédélec type finite elements is often out of range in realistic three-dimensional computations and the use of the first family is often preferred. In the standard approximation context, with respect to the first one, the second family does not give a substantial improvement in the accuracy while it increases the number of degrees of freedom. In this section we show how these two families of edge elements can be merged in a way to obtain, on one hand, “quasi-optimal” convergence of the mortar element method and, on the other hand, a sensible reduction in the algebraic system dimension. We consider here the case where each sub-domain is discretized by a finite number of tetrahedra, first or second order edge elements are chosen and we will focus the attention on one slave face Γ^m .

First family: six degrees of freedom per tetrahedron – Given a tetrahedron K , let \mathbf{r}_j ($j=1,4$) be the position vectors of its vertices and $\lambda_j(\mathbf{r})$ be the barycentric coordinate of a point $P \in K$ (with vector position \mathbf{r}) with respect to the vertex j . It is clear that $\lambda_j(\mathbf{r})$ is a linear function in the tetrahedron with $\lambda_j(\mathbf{r}_k) = \delta_{jk}$ ($j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$). The vector basis function corresponding to an edge e_{ij} going from \mathbf{r}_i to \mathbf{r}_j , is given by

$$\mathbf{w}_{ij}(\mathbf{r}) = \lambda_i(\mathbf{r}) \text{ grad } \lambda_j(\mathbf{r}) - \lambda_j(\mathbf{r}) \text{ grad } \lambda_i(\mathbf{r}) \quad , \quad i, j = 1, 2, 3, 4, i < j; \quad (22)$$

let us denote by $\mathcal{P}_1(K)$ the space generated by the basis functions settled in (22). The interpolating function \mathbf{u}_h on K for the vectorial state variable $\mathbf{u} \in (C^0(\overline{K}))^3$ has the following form

$$\mathbf{u}_h = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^4 \mathbf{w}_{ij} \alpha_{ij}(\mathbf{u}) \quad \text{with} \quad \alpha_{ij}(\mathbf{u}) = |e_{ij}| (\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_{e_{ij}})(\mathbf{x}_{ij}^M)$$

where $|e_{ij}|$ is the length of e_{ij} , \mathbf{x}_{ij}^M its midpoint and $\mathbf{t}_{e_{ij}}$ its tangent unit vector.

Second family: twelve degrees of freedom per tetrahedron – A complete linear interpolation of a three-dimensional vector in a tetrahedron needs twelve degrees of freedom. The corresponding edge element can be obtained by taking two unknowns over each edge of the tetrahedron. Keeping the same notations as the ones used to introduce the first family of edge elements, one of the possibilities is to define the vector basis functions corresponding to an edge e_{ij} going from \mathbf{r}_i to \mathbf{r}_j , as follows

$$\mathbf{w}_{ij}(\mathbf{r}) = \lambda_i(\mathbf{r}) \text{ grad } \lambda_j(\mathbf{r}) \quad , \quad i, j = 1, 2, 3, 4, i \neq j; \quad (23)$$

let us denote by $\mathcal{P}_2(K)$ the space generated by the basis functions defined in (23). The interpolating function \mathbf{u}_h on K for the vectorial state variable $\mathbf{u} \in (C^0(\overline{K}))^3$ has the following form

$$\mathbf{u}_h = \sum_{i=1}^4 \sum_{j \neq i, j=1}^4 \mathbf{w}_{ij} \beta_{ij}(\mathbf{u}) \quad \text{with} \quad \begin{aligned} \beta_{ij}(\mathbf{u}) &= |e_{ij}| (\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_{e_{ij}})(\mathbf{x}_i) \\ \beta_{ji}(\mathbf{u}) &= |e_{ij}| (\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_{e_{ij}})(\mathbf{x}_j) \end{aligned}$$

where \mathbf{x}_i and \mathbf{x}_j are the end points of the edge e_{ij} .

Merging the two families – In paper [2], the authors have shown that the mortar method combined with edge elements in three dimensions leads to an approximation which is slightly sub-optimal with the second family and give indications that with the first family non-optimal results could be feared (the numerical results presented in [8] corroborate this fear). On the other hand, by using the second family of edge elements in one domain, the number of unknowns for a given mesh is multiplied by two. To overcome the difficulties, the idea is based on the following two facts:

- taking the difference of \mathbf{w}_{ij} and \mathbf{w}_{ji} defined in (23) we get the old element \mathbf{w}_{ij} defined in (22); moreover, one element $\mathbf{v} \in \mathcal{P}_1$ can be thought as an element $\mathbf{v} \in \mathcal{P}_2$ with the corresponding degrees of freedom $(\beta_{ij}, \beta_{ji}) = (\alpha_{ij}, -\alpha_{ij})$;
- the Lagrange multipliers of the mortar method are defined locally on Γ^m .

The compromise to have a good approximation without too many unknowns is to limit the use of the second family to all edges that belong to the interface Γ^m . The first family is then adopted to approximate the problem solution along all edges that do not belong to the interface (i.e. over each tetrahedron that does not meet the interface). The space of edge elements \mathcal{P} involved in the definition (9) is the following:

$$\mathcal{P}(K) = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u}|_e \in \mathcal{P}_1, \forall e \notin \partial K \cap \Gamma^m \text{ and } \mathbf{u}|_e \in \mathcal{P}_2, \forall e \in \partial K \cap \Gamma^m\}. \quad (24)$$

From the implementation point of view, the merging can be done by introducing a rectangular matrix R_K that depends on the current tetrahedron K as follows:

$$R_K \in \mathcal{M}(6, 12) \quad \partial K \cap \Gamma^m = \emptyset \text{ or reduced to one point}$$

$$R_K \in \mathcal{M}(7, 12) \quad \partial K \cap \Gamma^m \text{ consists of one edge of } K,$$

$$R_K \in \mathcal{M}(9, 12) \quad \partial K \cap \Gamma^m \text{ consists of one face of } K,$$

$$R_K \in \mathcal{M}(11, 12) \quad \partial K \cap \Gamma^m \text{ consists of two faces of } K.$$

$\mathcal{M}(n, m)$ denotes the set of matrices with n rows and m columns. Moreover, the local stiffness matrix associated to each tetrahedron is built using the second family for only those elements K that meet the interface, i.e. $S_K \in \mathcal{M}(12, 12)$ if $\partial K \cap \Gamma^m \neq \emptyset$ nor to one point. In this case, the assembling process does not involve the full matrix S_K but the smaller one given by $R_K S_K R_K^T$ (we have got rid of the additional unknowns for all edges of K that do not lie on Γ^m).

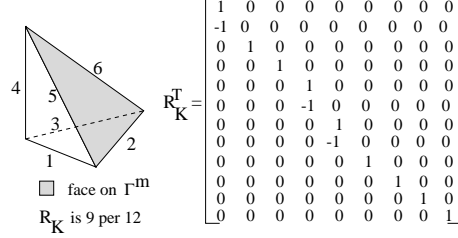


Figure 1: The elements of matrix R_K^T for a given tetrahedron K ; to each edge among those with numbers 1, 3, 4, is associated one circulation and to those with numbers 2, 5, 6, are associated two.

2.4 Dealing with the first family

The use of the first family inside each sub-domain together with the second one at the interface glued together with the mortar element method as defined in Section 2.1.2 does not pollute the general accuracy of the problem. In order to analyse this we refer to the standard tool for the analysis of non-conforming approximation: the Berger-Scott-Strang Lemma. This Lemma allows to state:

$$|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h|_{*,\Omega} \leq \inf_{\mathbf{v}_h \in \tilde{X}_h^c} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{*,\Omega} + \sup_{\mathbf{v}_h \in \tilde{X}_h^c} \frac{\sum_{k=1}^K \langle \mathbf{v}_h^k \wedge \mathbf{n}_k, \mathbf{curl} \mathbf{u} \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \partial\Omega_k}}{|\mathbf{v}_h|_{*,\Omega}} \quad (25)$$

where \tilde{X}_h^c denotes the subspace of X_h^c composed of all functions that are of the first family inside the subdomains as described in the previous subsection, and $\tilde{\mathbf{u}}_h$ denotes the solution of problem (13) where X_h^c is replaced by \tilde{X}_h^c . The first contribution is known as the best fit of \mathbf{u} by elements of \tilde{X}_h^c and the second contribution is the consistency error. This second contribution is exactly the same as in the analysis of problem (13) while the former is analyzed following the same steps of the proof of Theorem 2.3: starting from the local approximation of $\mathbf{u}|_{\Omega_k}$ by elements of the first family (e.g. the interpolation $\mathcal{I}_h^k \mathbf{u}|_{\Omega_k}$), we correct the trace value on the slave side of the interfaces by subtracting from $\mathcal{I}_h^k \mathbf{u}|_{\Omega_k}$ the function obtained by prolongating by 0 the difference $\Pi_h^m (\mathcal{I}_h^k \mathbf{u}|_{\Omega_k} - \mathcal{I}_h^{-k} \mathbf{u}|_{\Omega_{-k}})$ between the current value on the slave face and the value derived from the application of the mortar condition.

Since the local interpolation operator has the same asymptotic approximation properties in the first and second family, the previous correction is optimal and we can state that the same error bound holds for $\tilde{\mathbf{u}}_h$ as what is stated in Theorem 2.3.

3 Applications

The flexibility and performance of a numerical method for the simulation of electromagnetic field distributions relies, in several cases, on the possibility of work-

ing with non-matching grids at the interface between adjacent sub-domains. One example is given by the treatment of moving structures. Our choice is to work in Lagrangian ones, dealing with non-conforming discretizations at the level of the sliding interface between the stator and the rotor. The second choice is less expensive from the computational point of view if we use a method that avoids re-meshing or interpolation procedures. Another example is the optimization of the structure shape for an electromagnetic device. We can re-mesh either the whole domain or only a region containing the shape to be optimized: in the second case it may be useful to work with non-matching grids to simplify the local re-meshing task and successive solution of the problem. A third example consists in the possibility of coupling variational methods of different others or with unknowns associated to different geometric entities.

3.1 Some preliminary results in magnetostatics

Currently, the work in progress consists in applying the described method to compute the distribution of induced currents in moving structures: this is an information of great importance for performances prediction and devices design. Nevertheless, the magnetostatic problem is of great interest due to the fact that we have to face all the difficulties of the method's implementation even if the geometry does not move. The movement treatment would add the additional cost of discretizing the coupling condition at each new position of the free part.

As an example of application, we present some results obtained by solving the magnetostatic problem in terms of the magnetic vector potential \mathbf{A} , i.e. the equation $\mathbf{curl}(\mu^{-1}\mathbf{curl}\mathbf{A}) = \mathbf{J}$, with homogeneous boundary conditions. We consider a hexahedral domain divided into two sub-domains which are discretized by non-structured tetrahedral coarse meshes. The computational domain is presented in Figure 2 while the magnetic induction $\mathbf{B} = \mathbf{curl}\mathbf{A}$ computed on matching and non-matching grids is displayed in Figure 3. In both cases, the information (i.e. the tangential component of the unknown) is well transmitted from one domain to the other.

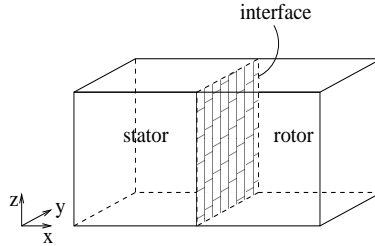


Figure 2: The domain Ω : a flat interface separates the two sub-domains.

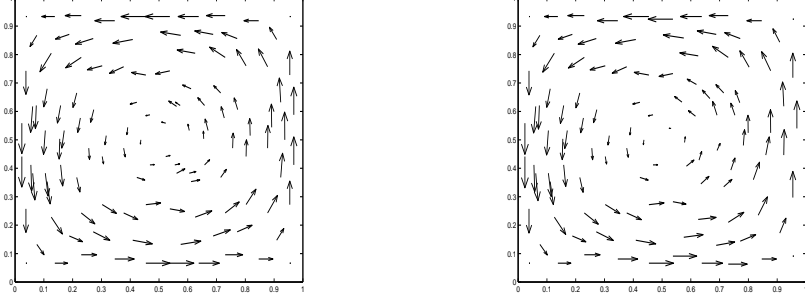


Figure 3: Field \mathbf{B} on the plane $y = .25$ computed on matching (left) and non-matching (right) grids. The stored magnetic energy is ≈ 1.9 MJ in both cases.

3.2 Formulation and discretization of the magnetodynamic problem

We are given with a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, decomposed in a rotating part (rotor) Ω_1 and a static one (stator) $\Omega_2 = \Omega \setminus \bar{\Omega}_1$. Ω_1 is a cylinder that turns around its axis. Let $\theta \in C^1(0, T)$ be the law of rotation, i.e., $\theta(t)$ denotes the rotation angle at time t and $r_t : \Omega_1 \rightarrow \Omega_1$ the rotation operator which turns the domain Ω_1 with an angle $\theta(t)$ and r_{-t} its inverse. Here we suppose for simplicity that $\alpha > 0$ everywhere.

In both domains Ω_1 and Ω_2 , we have to solve the equation (2) while the transmission conditions at Γ take into account the movement. They are:

$$r_t \mathbf{u}_1(r_{-t} \mathbf{x}, t) \wedge \mathbf{n}_\Gamma = \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t) \wedge \mathbf{n}_\Gamma, \quad (26)$$

$$r_t \beta(r_{-t} \mathbf{x}, t) \mathbf{curl} \mathbf{u}_1(r_{-t} \mathbf{x}, t) \wedge \mathbf{n}_\Gamma = \beta(\mathbf{x}, t) \mathbf{curl} \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t) \wedge \mathbf{n}_\Gamma. \quad (27)$$

Set $\mathcal{H} = H(\mathbf{curl}, \Omega_1) \times H_{0, \partial\Omega}(\mathbf{curl}, \Omega_2)$, we then are led to introduce

$$\mathcal{H}^t = \{\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathcal{H} \mid r_t \mathbf{u}_1(r_{-t} \mathbf{x}, t) \wedge \mathbf{n}_\Gamma = \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, t) \wedge \mathbf{n}_\Gamma \forall \mathbf{x} \in \Gamma\}. \quad (28)$$

The problem obtained by considering equation (2) in both domain together with homogeneous boundary condition at $\partial\Omega$ and the transmission conditions (26-27) admits a unique solution $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T, \mathcal{H}) \cap H^1(0, T, L^2(\Omega))$ when suitably interpreted in a variational sense both in time and space. Note that here the essential transmission condition (26) is strongly imposed in the definition of the functional space, while the natural one (27) is weakly imposed through the variational formulation (this is a consequence of the integration by parts). We are now in the position of making a discretization of this problem and the key point will be the discrete counterpart of the time-dependent constraint characterizing the definition of the space \mathcal{H}^t .

The mortar element method proposed in Section 2 provides an “optimal” spatial discretization of the stated problem. The computational domain is split up into two sub-domains Ω_1 and Ω_2 and the skeleton consists of 3 interfaces (see

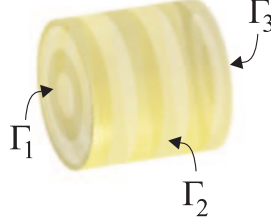


Figure 4: Interfaces for the definition of the mortar element method.

the Figure 4). Over each sub-domain, we consider the finite element discretization derived in Section 2.1.1. We call \mathcal{H}_h^t the resulting broken edge element space. The Lagrange multiplier spaces are chosen according to Section 2.1.2, namely we have M_h^i , $i = 1, 2, 3$. At each interface, the matching condition turns out to be time-dependent, namely, for any $i = 1, 2, 3$ and $\mathbf{u}_h = (\mathbf{u}_{1,h}, \mathbf{u}_{2,h}) \in \mathcal{H}_h^t$ we have:

$$\int_{\Gamma_i} (r_t \mathbf{u}_{1,h}(r_{-t}\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_{2,h}(\mathbf{x}, t)) \wedge \mathbf{n}_\Gamma \cdot \boldsymbol{\psi}_h^i d\Gamma = 0 \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in M_h^i.$$

The problem is then discretized in time by means of an implicit Euler method. The analysis of such a formulation is available in the 2D case together with some numerical results (see [3],[7]), and it is in progress for the 3D problem.

References

- [1] C. Amrouche, C. Bernardi, M Dauge, and V. Girault. Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 21:823–864, 1998.
- [2] F. BenBelgacem, A. Buffa, and Y. Maday. The mortar finite element method for 3d maxwell's equations: first results. *SIAM J. Num. An.*, (subm.) 1999.
- [3] A. Buffa, Y. Maday, and F. Rapetti. A sliding mesh-mortar method for a two-dimensional eddy currents model of electric engines. *M²AN*, (to appear), 1999.
- [4] R. Hoppe. Mortar edge element method in \mathbb{R}^3 . *East West J. Num. Anal.*, 7(3):159–222, 1999.
- [5] J.C. Nédélec. Mixed finite element in \mathbb{R}^3 . *Numer. Math*, 35:315–341, 1980.
- [6] J.C. Nédélec. A new family of mixed finite element in \mathbb{R}^3 . *Numer. Math.*, 35:57–81, 1986.
- [7] F. Rapetti. The mortar edge element method on non-matching grids for eddy current calculations in moving structures. *Int. J. Num. Mod.*, (subm.), 1999.
- [8] F. Rapetti, Y. Maday, F. Bouillault. The mortar edge element method in three dimensions: application to magnetostatics. In preparation, 2000.

7.3 *Article 6* – The mortar edge element method in three dimensions: application to magnetostatics

par *F. Rapetti, F. Bouillault, Y. Maday*
en préparation.

The mortar edge element method in three dimensions: application to magnetostatics

F. RAPETTI^{*†} Y. MADAY^{*} F. BOUILLAUD[†]

Abstract

The subject presented in this paper concerns the approximation of a magnetostatic problem, where the primary unknown is the *magnetic vector potential* in a three-dimensional system composed of two solid parts separated by an interface. The approximation of the problem is here based on the *mortar element method* combined with edge elements on tetrahedral meshes that do not match at the interface. In this paper we describe the proposed method and its implementation aspects together with some numerical results that illustrate how the method works.

Key words. domain decomposition method, edge element approximation, magnetostatics, magnetic vector potential as primary variable, non-matching grids

1 Introduction

The flexibility and performance of a numerical method for the simulation of electromagnetic field distributions relies, in several cases, on the possibility of working with non-matching grids at the interface between adjacent sub-domains. One example is given by the treatment of moving structures. We can choose to work in Eulerian variables, adding a convective term in the equations or in Lagrangian ones, dealing with non-conforming discretizations. The second choice may be less expensive from the computational point of view if we use a method that avoids re-meshing or interpolation procedures. Another example is the optimization of the structure shape for an electromagnetic device. We can re-mesh either the whole domain or only a region containing the shape to be optimized: in the second case it can be useful to work with non-matching grids to simplify the local re-meshing task and successive solution of the problem. A third example consists in the possibility of coupling variational methods of different orders or with unknowns associated to different geometric entities.

In this paper we deal with the edge element approximation on non-matching grids of a given magnetostatic problem in three dimensions. We will focus our attention on the description of the magnetic field distribution in a domain composed of two solid parts separated by an interface. We aim at describing the three-dimensional *mortar edge element method* and its main implementation aspects in continuation of the paper [22] concerning the two-dimensional case.

The general problem of dealing with non-matching grids has been faced for a long time. For applications in electromagnetism with moving structures, many arguments have been proposed. For instance, the rotation angle is defined depending on the element size at this slip interface as in [13]. Classical remedies involve a partial or total re-meshing of the computational domain: this process and most of

^{*}ASCI - UPR 9029 CNRS, Paris Sud University, Bat. 506, 91403 Orsay cedex, France

[†]LGEP - UMR 8507 CNRS, Supélec University, Plateau de Moulon, 91192 Gif-Sur-Yvette cedex, France

all the interpolation of the unknowns at the new mesh elements increase the computational cost of simulations and the implementation complexity. A large variety of new methods has been developed in order to treat non-matching grids with a minimal additional cost. Among them, we have the macro-element method [23] and the finite element-boundary element coupling [20], involving matrices that are no more sparse. Similarly, the moving layer method [12], based on the air-gap re-meshing for each new rotor position, leads to perturbations on the numerical solution due to the several changes in the elements connectivity. Other approaches rely on the use of Lagrangian multipliers [17, 14, 25], making the user solve a final algebraic system with a non-definite matrix. The overlapping element method [26] involves the computation of the intersection area between two meshes, a complex task when dealing with tetrahedral grids.

None of the previous methods is simultaneously characterized by involving definite matrices, avoiding re-meshing and difficult intersection procedures, imposing no constraint between the discretization parameters in adjacent sub-domains, as it happens for the method we are going to present is.

The mortar element method was firstly stated in [16] in the context of Lagrangian finite elements and spectral approximation for two-dimensional elliptic partial differential equations. It was successfully analysed in [3] for three-dimensional Maxwell's equations, from the mathematical point of view. This method is a non-conforming non-overlapping domain decomposition technique which allows for independent (and thus, in general, non-matching at the interface) meshes in adjacent sub-domains. The idea of the mortar method is to weakly impose the transmission conditions at the interfaces by means of Lagrangian multipliers which differ from those adopted in [17, 14, 25]. The key argument is the explicit construction of a particular Lagrangian multiplier space in order to ensure good properties on the discrete problem. With edge elements, the space of Lagrangian multipliers is a suitable sub-space of the shape functions' tangential traces at the interface.

The magnetic vector potential formulation is widely used in electromagnetic field computation due to its robustness. However, in this formulation, there are two essential problems: the uniqueness and the compatibility. Uniqueness can be achieved by imposing a gauge condition and the compatibility of the curl-curl equation is insured when the right hand side (the current density) is divergence free. Instead of imposing a *gauge condition* on the magnetic vector potential, we prefer to adopt an approach similar to the one presented in [24]. The compatibility is ensured expressing the current density by the curl of a source field and projecting this source field in the space $\text{curl}(W^1)$, where W^1 is the space of Whitney edge elements [5]. Then, by using the Conjugate Gradient algorithm to solve the final algebraic system, uniqueness is achieved in the space orthogonal to $\ker(\text{curl})$.

Our choice of dealing with a particular magnetostatic problem in a given stationary structure is related to the following considerations. First, we want to test the reliability and the actual convergence property of the mortar edge element method in three dimensions: to our knowledge, the results we are going to present in this paper concern the very first application of the method defined in [3] to solve electromagnetic problems. Second, already with stationary geometries and non-matching grids, we have to face, from the implementation point of view, the main difficulties we would face with moving structures and in more complex situations as, for example, in presence of curved interface between adjacent sub-domains.

Concerning the paper organization, after the previous short introduction to define the context of our work, in Section 2 we deduce the model from the system of Maxwell's equations and we write the variational formulation of the problem. In Section 3 we discuss the spatial discretization by introducing the mortar edge element method and we present some of the implementation features of the method. In Section 4 we describe the discretization of the coupling condition, ending, in Section 5, with the presentation of some numerical results.

2 The continuous problem

In this section, we present the mathematical model of the problem we are going to study, giving three sequential formulations of it. The first formulation is classical and follows from Maxwell's equations; the second is a more appropriate version of the first one for the edge element approximation and the last formulation is the one we deal with in a domain decomposition approach.

2.1 Classical formulation

Let Ω be a Lipschitz open set in \mathbb{R}^3 . We fix on it a system of Cartesian coordinates, say $\mathbf{x} = (x, y, z)$ and we suppose that Ω is bounded in each direction.

The solution of the magnetostatic problem consists in the determination of the magnetic field due to prescribed currents. The problem's governing equations are those of Maxwell where the temporal derivatives have been neglected. Using the bold style to denote vectors, the problem we have to solve is the following:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \operatorname{curl} \mathbf{H} = \mathbf{J} && \text{in } \Omega, \\
 (b) \quad & \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 && \text{in } \Omega, \\
 (c) \quad & \mathbf{n} \wedge \mathbf{H} = \mathbf{0} && \text{on } \partial\Omega_H, \\
 (d) \quad & \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0 && \text{on } \partial\Omega_B, \\
 (e) \quad & \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} && \text{in } \Omega.
 \end{aligned} \tag{1}$$

In (1), \mathbf{H} is the magnetic field, \mathbf{B} the magnetic induction, \mathbf{J} the prescribed current density, μ the magnetic permeability and \mathbf{n} the outer normal to $\partial\Omega = \partial\Omega_H \cup \partial\Omega_B$ with $\partial\Omega_B \neq \emptyset$. In the following we suppose that $\partial\Omega_H = \emptyset$. We assume that μ is not a tensor but a scalar function of the space variable $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

We are interested in computing the field \mathbf{B} in the domain Ω : thanks to the relation $\operatorname{div} \operatorname{curl} = 0$ and equation (1)(b), it is possible to write problem (1) in terms of a vector potential, i.e. a vector \mathbf{u} such that $\mathbf{B} = \operatorname{curl} \mathbf{u}$. Denoting $\nu = \mu^{-1}$, problem (1) reads:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{curl} (\nu \operatorname{curl} \mathbf{u}) &= \mathbf{J} && \text{in } \Omega, \\
 \mathbf{n} \wedge \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{on } \partial\Omega.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Since we aim at using a finite element discretization, it is natural to refer to the variational formulation of problem (2). Let us introduce the space

$$H_0(\operatorname{curl}, \Omega) = \{ \mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^3 \mid \operatorname{curl} \mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^3 \text{ and } (\mathbf{u} \wedge \mathbf{n})|_{\partial\Omega} = \mathbf{0} \}.$$

It is classical to notice that solving (2) in $H_0(\operatorname{curl}, \Omega)$ for current densities \mathbf{J} in $(H_0(\operatorname{curl}, \Omega))'$ is equivalent to solve the following variational problem:

$$\begin{aligned}
 & \text{Given } \mathbf{J} \in (H_0(\operatorname{curl}, \Omega))', \text{ find } \mathbf{u} \in H_0(\operatorname{curl}, \Omega) \text{ such that:} \\
 & \int_{\Omega} \nu \operatorname{curl} \mathbf{u} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\operatorname{curl}, \Omega).
 \end{aligned} \tag{3}$$

An additional constraint, known as gauge condition, must be imposed in order to ensure the uniqueness of the vector potential \mathbf{u} .

- The Coulomb gauge $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ is generally introduced using either a penalty technique (see [11]) or removing the redundant degrees of freedom (see [15]). These two techniques are preferable when using finite element methods based on nodal finite elements.

- The other possibility consists in setting to zero the vector potential component in a given direction \mathbf{w} . We then impose $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$ where \mathbf{w} is an arbitrary vector field which does not have closed field lines. This gauge condition is to be preferred when working with edge elements since it reduces the effective number of unknowns by automatically yielding two-component vector potentials (see [1]). Thus, except for the selection of \mathbf{w} , it does not introduce any additional overhead.

Furthermore, the imposition of such a gauge condition is not necessary if we are able to find out a solution \mathbf{u} such that its curl (equal to \mathbf{B}) is unique. Let us analyse the structure of the matrix form of problem (3).

Discretized the computational domain Ω by a mesh and introduced a finite element space Y_h of dimension n as a finite dimensional approximation of $H_0(\text{curl}, \Omega)$, the matrix form of problem (3) is given by

$$MU = F \quad (4)$$

where M is a symmetric, positive matrix of dimension n , U is the vector of degrees of freedom of \mathbf{u} in the chosen space Y_h and F is associated to the right-hand side of the discrete version of problem (3). Being $\ker(M) = \{U \in \mathbb{R}^n \mid MU = 0\}$, we remark that $\ker(M) \neq \{0\}$: the curl-curl matrix M is singular. Nevertheless, in what follows we remark that, by the Conjugate Gradient algorithm, system (4) is uniquely solvable in $\ker(M)^\perp$, if it is compatible, i.e. $F \in \text{imag}(M) = \{MU \mid U \in \mathbb{R}^n\}$. Let us go into details.

Let us introduce $\ker(M)^\perp = \{U \in \mathbb{R}^n \mid \langle U, Y \rangle = 0, \forall Y \in \ker(M)\}$, where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the usual Euclidean inner product between vectors of \mathbb{R}^n . We recall that (being M symmetric) $\ker(M)$ and $\text{imag}(M)$ are mutually orthogonal complementary subspaces of \mathbb{R}^n , a fact that can be expressed as $\mathbb{R}^n = \ker(M) \oplus \text{imag}(M)$. In particular, $\text{imag}(M) = \ker(M)^\perp$.

To solve (3), we start by introducing a source field \mathbf{T} , solution of the following problem:

$$\begin{aligned} \text{find } \mathbf{T} \in H_0(\text{curl}, \Omega) \text{ such that } \forall \mathbf{T}' \in H_0(\text{curl}, \Omega) \\ \int_\Omega \text{curl } \mathbf{T} \cdot \text{curl } \mathbf{T}' d\Omega = \int_\Omega \mathbf{J} \cdot \text{curl } \mathbf{T}' d\Omega \end{aligned} \quad (5)$$

Weakly, vector \mathbf{T} verifies:

$$\mathbf{J} = \text{curl } \mathbf{T} \quad \text{in } \Omega \quad \text{and} \quad \mathbf{n} \wedge \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (6)$$

The matrix form of problem (5) is $M'T = F'$ where M' has the same properties as M (it is similar to M up to the coefficient ν) and T is the vector of degrees of freedom of \mathbf{T} in Y_h . The right-hand side $F' \in \ker(M')^\perp (= \text{imag}(M'))$ by construction and the compatibility condition is fulfilled. If we solve $M'T = F'$ by the Conjugate Gradient, we have

$$T_{k+1} = T_k + \delta_k q_k \quad (7)$$

where δ_k is the iterative coefficient and q_k the conjugate vector of M' which can be expressed as a linear combinations of the residuals at the previous iterations, i.e. $q_k = \sum_{i \leq k} (M'T_i - F')$. Being $q_k \in \ker(M')^\perp$, we have $T_{k+1} \in \ker(M')^\perp$. Fine, and now ?

We replace \mathbf{J} by $\text{curl } \mathbf{T}$ in (3) and we integrate by parts. The variational problem we solve is:

$$\begin{aligned} \text{find } \mathbf{u} \in H_0(\text{curl}, \Omega) \text{ such that } \forall \mathbf{v} \in H_0(\text{curl}, \Omega) \\ \int_\Omega \nu \text{curl } \mathbf{u} \cdot \text{curl } \mathbf{v} d\Omega = \int_\Omega \mathbf{T} \cdot \text{curl } \mathbf{v} d\Omega. \end{aligned} \quad (8)$$

and its matrix form is $MU = F''$. The right-hand side $F'' \in \ker(M)^\perp$ by construction and the compatibility condition is fulfilled. If we solve $MU = F''$ by the Conjugate Gradient, we have

$$U_{k+1} = U_k + \alpha_k p_k \quad (9)$$

where α_k is the iterative coefficient and p_k the conjugate vector of M , which can be expressed as a linear combinations of the residuals at the previous iterations, i.e. $p_k = \sum_{i \leq k} (MU_i - F'')$. Being $p_k \in \ker(M)^\perp$, we have $U_{k+1} \in \ker(M)^\perp$.

The determination of the source vector \mathbf{T} seems to be of the same complexity as the one of the magnetic vector potential \mathbf{u} . It has to be remarked that, the field \mathbf{T} can be computed either analytically, in presence of domain with simply shaped geometry, or numerically, by solving problem (5) in the general case. Moreover, it is not influenced by jumps in the permeability μ and its determination is needed only in a part of the computational domain Ω containing the conductors (and it is then extended by zero to the full domain Ω), resulting so less expensive than that of \mathbf{u} .

We have also to remark that, equation $\text{curl}(\nu \text{curl} \mathbf{u}) = \mathbf{J}$ is compatible if $\text{div} \mathbf{J} = 0$. In concrete situations, the source current (either supplied by generators or computed by solving a circuit equation) can loose its divergence-free character: expressing \mathbf{J} as the curl of a source field \mathbf{T} is a way to re-establish this feature, before running numerical simulations.

The previous presentation is still valid in a domain decomposition approach; in the following, we will consider the problem

$$\begin{aligned} \text{Given } \mathbf{T} \in (L^2(\Omega))^3, \text{ find } \mathbf{u} \in H_0(\text{curl}, \Omega) \text{ such that:} \\ \int_{\Omega} \nu \text{curl} \mathbf{u} \cdot \text{curl} \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \text{curl} \mathbf{v} \, d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\text{curl}, \Omega). \end{aligned} \quad (10)$$

2.2 Domain decomposition approach

The first step in the application of a domain decomposition method consists in dividing the considered domain into a finite number of sub-domains. In the considered case, we divide Ω into at least two sub-domains and problem (2) is then reformulated in a transmission form. Let us go into the details.

For the studied example, we assume that Ω is composed of two fully conducting parts separated by an interface, as represented in Figure 1. We thus have $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$ and the interface $\Gamma = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}$. We denote by \mathbf{n}_Γ the unit vector normal at Γ , directed from Ω_1 to Ω_2 .

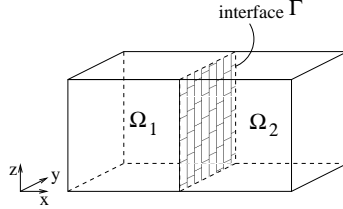


Figure 1: The domain Ω : a flat interface separates Ω_1 from Ω_2 .

The second step consists in re-writing problem (10) by splitting the integral over Ω in sum of integrals over the sub-domains Ω_k ($k = 1, 2$ in our case). We remark that in this form, the solution is sought for a pair $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ where \mathbf{u}_k is the restriction of \mathbf{u} to Ω_k ($k=1, 2$) and only a transmission condition has to be explicitly enforced on both the solution and the test functions in order to get a problem equivalent to (10). Recalling the standard result that the tangential trace of a function in $H(\text{curl}, \Omega)$ is continuous and belongs to $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, we are led to introduce the following functional space:

$$\mathcal{U} = \{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in H(\text{curl}, \Omega_1) \times H(\text{curl}, \Omega_2) \mid \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{n}_\Gamma(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_2(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{n}_\Gamma(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \Gamma\}, \quad (11)$$

with $H(\text{curl}, \Omega_k) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega_k))^3, \text{curl } \mathbf{u} \in (L^2(\Omega_k))^3\}$. We remark that \mathcal{U} is a closed subspace of $H(\text{curl}, \Omega_1) \times H(\text{curl}, \Omega_2)$ and so an Hilbert space with the natural norm (usually called broken norm)

$$\|\mathbf{u}\|_*^2 = \|\mathbf{u}_1\|_{H(\text{curl}, \Omega_1)}^2 + \|\mathbf{u}_2\|_{H(\text{curl}, \Omega_2)}^2, \quad (12)$$

where $\|\mathbf{u}\|_{H(\text{curl}, \Omega_k)}^2 = \|\mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega_k))^3}^2 + \|\text{curl } \mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega_k))^3}^2$. It can be proven that the mapping

$$\mathbf{u} \rightarrow (\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}|_{\Omega_1}, \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}|_{\Omega_2})$$

is an isomorphism between $H(\text{curl}, \Omega)$ and \mathcal{U} . We denote by $\mathcal{U}^0 = \{\mathbf{u} \in \mathcal{U} \mid \mathbf{u} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ on } \partial\Omega\}$. By classical reasoning we obtain the following variational formulation, to be intended in the sense of distributions:

Find $\mathbf{u} \in \mathcal{U}^0$ such that :

$$\sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \nu \text{curl } \mathbf{u}_k \cdot \text{curl } \mathbf{v}_k \, d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \mathbf{T}_k \cdot \text{curl } \mathbf{v}_k \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathcal{U}^0. \quad (13)$$

Problem (13) admits a unique solution for every $\mathbf{T} \in (L^2(\Omega))^3$ if we add a gauge condition.

A transmission condition can be further completed by going back to the strong formulation of the problem. Indeed any solution of (13) satisfies

$$\begin{aligned} (E_k) \quad & \text{curl } (\nu \text{curl } \mathbf{u}_k) = \mathbf{J}|_{\Omega_k} \quad \text{in } \Omega_k, \quad k = 1, 2 \\ (TC_1) \quad & \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{n}_\Gamma = \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{n}_\Gamma \quad \text{on } \Gamma, \\ (BC) \quad & \mathbf{u} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Note also that in a weak sense (duality with the space of traces of functions in $H(\text{curl}, \Omega)$) we derive

$$(TC_2) \quad \nu \text{curl } \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{n}_\Gamma = \nu \text{curl } \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{n}_\Gamma \quad \text{on } \Gamma$$

that is obtained by integrating by parts. The partial differential equation (E_k) stands in the sense of distributions in Ω_k . Let us remark that the transmission conditions (TC_1) and (TC_2) describe, respectively, the continuity of the normal component of the magnetic induction and of the tangential component of the magnetic field across the interface Γ .

3 The discrete problem

We now discretize (13) in each sub-domain by using edge elements. For the spatial discretization, the use of a standard conforming method, makes the transmission condition (TC_1) be exactly verified. To do this, we have to work with matching meshes at the interface Γ .

This fact can be very demanding: in presence of moving structures, for example, it is necessary to modify the mesh used for the spatial discretization at every new position of the free part or to impose a constraint between the movement characteristic entity (i.e. the rotation angle or the translation length) and the discretization parameter.

By using the mortar element method, we introduce a non-conforming approximation of problem (13) that allows for non-matching grids at the interface. In this method, the transmission condition (TC_1) is weakly imposed by means of Lagrange multipliers. This method has already been proved to be efficient in treating two-dimensional problems both combined with nodal elements (see [7, 21]) and edge ones (see [2, 22]). The method we shall describe and implement here follows [3] where the proper space of Lagrange multipliers is defined and optimality of the approximation is proven and [8] for its version with the merging of edge elements of first and second order.

3.1 Domain discretization

Let \mathcal{T}_h be a family of triangulations of $\bar{\Omega}$ by means of an unstructured mesh composed of tetrahedra K such that

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$$

with $h = \max \{ \text{diam}(K), K \in \mathcal{T}_h \}$. We assume that it is regular in the sense of Ciarlet (see [10]) and non-matching at the interface ? .

We assume that each element K of \mathcal{T}_h may be obtained as $K = \mathbf{F}_K(\hat{K})$, where \hat{K} is the reference tetrahedron of vertices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ and $\mathbf{F}_K : \left\{ \begin{smallmatrix} \hat{K} \rightarrow K \\ \hat{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x} \end{smallmatrix} \right\}$ is a suitable regular and invertible transformation of the form

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}_K(\hat{\mathbf{x}}) = B_K \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_K, \quad B_K \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3), \quad \det(B_K) \neq 0, \quad \mathbf{b}_K \in \mathbb{R}^3 \quad (14)$$

where B_K and \mathbf{b}_K depend on K . If K has vertices P_1, P_2, P_3, P_4 of coordinates $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4$ respectively, we have

$$B_K = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3], \quad \mathbf{b}_K = \mathbf{c}_0$$

where

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{c}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{c}_2 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{c}_3 = \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1.$$

3.2 Spatial discretization - Case of one domain

We first recall the definition and properties of the type of edge finite elements we are going to use over Ω associated with a triangulation \mathcal{T}_h (see [5, 18, 19] for more details on the subject). We introduce the finite-dimensional space of edge elements

$$Y_h = \{ \mathbf{v}_h \in H(\text{curl}, \Omega) \mid B_K^T(\mathbf{v}_h|_K \circ F_K) \in \mathcal{P}(\hat{K}), \forall K \in \mathcal{T}_h \} \quad (15)$$

where \mathcal{P} can be defined at least in two ways (T denotes the transpose operator).

3.2.1 First family: six degrees of freedom per tetrahedron

Given a tetrahedron K , let \mathbf{r}_j ($j=1,4$) be the position vectors of its vertices and $\lambda_j(\mathbf{r})$ be the barycentric coordinate of a point $P \in K$ (with vector position \mathbf{r}) with respect to the vertex j . It is clear that $\lambda_j(\mathbf{r})$ is a linear function in the tetrahedron with $\lambda_j(\mathbf{r}_k) = \delta_{jk}$ ($j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$). The vector basis function corresponding to an edge e_{ij} going from \mathbf{r}_i to \mathbf{r}_j , is given by

$$\mathbf{w}_{ij}(\mathbf{r}) = \lambda_i(\mathbf{r}) \text{grad } \lambda_j(\mathbf{r}) - \lambda_j(\mathbf{r}) \text{grad } \lambda_i(\mathbf{r}), \quad i, j = 1, 2, 3, 4, i < j. \quad (16)$$

The space $\mathcal{P}_1(K)$, generated by the basis functions settled in (16), is defined as

$$\mathcal{P}_1(K) = \{ \mathbf{u} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \wedge \mathbf{x}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in (\mathbb{P}_0(K))^3 \}. \quad (17)$$

The interpolating function \mathbf{u}_h on K for the vectorial state variable $\mathbf{u} \in (C^0(\bar{K}))^3$ has the following form

$$\mathbf{u}_h = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^4 \mathbf{w}_{ij} \alpha_{ij}(\mathbf{u}) \quad \text{with} \quad \alpha_{ij}(\mathbf{u}) = |e_{ij}| (\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_{e_{ij}})(\mathbf{x}_{ij}^M)$$

where $|e_{ij}|$ is the length of e_{ij} , \mathbf{x}_{ij}^M its midpoint and $\mathbf{t}_{e_{ij}}$ its tangent unit vector. In the following, to alleviate the notation, e_k will denote the k^{th} edge of the mesh and $\alpha_k(\cdot)$ the functional defined by $\alpha_k(\mathbf{u}) = |e_k|(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_k)(\mathbf{x}_k^M)$. The basis function associated to e_k will be denoted by \mathbf{w}_k . The first family edge element on K is defined by (K, \mathcal{P}_1, A) , where A is the set of the degrees of freedom given by the linear functionals α_k acting on $(C^0(\overline{K}))^3$. This finite element is unisolvent and conforming in $H(\text{curl})$. Finally, we remark that the basis functions are usually computed on the reference tetrahedron \hat{K} as in (16) and transported on the mesh tetrahedron K through the transformation

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = J_K^{-1} \hat{\mathbf{u}}(F_K^{-1}(\mathbf{x})) = (B_K)^{-T} \hat{\mathbf{u}}(F_K^{-1}(\mathbf{x})). \quad (18)$$

where $\hat{\mathbf{u}}$ denotes a real vector of $\mathcal{P}_1(\hat{K})$ and \mathbf{u} the corresponding vector in $\mathcal{P}_1(K)$. A first choice for the space $\mathcal{P}(\hat{K})$ involved in (15) is given by $\mathcal{P}_1(\hat{K})$.

3.2.2 Second family: twelve degrees of freedom per tetrahedron

A complete linear interpolation of a three-dimensional vector in a tetrahedron needs twelve degrees of freedom. The corresponding edge element can be obtained by taking two unknowns over each edge of the tetrahedron. Keeping the same notations as the ones used to introduce the first family of edge elements, one of the possibilities is to define the vector basis functions corresponding to an edge e_{ij} going from \mathbf{r}_i to \mathbf{r}_j , as follows

$$\mathbf{w}_{ij}(\mathbf{r}) = \lambda_i(\mathbf{r}) \text{grad } \lambda_j(\mathbf{r}) \quad , \quad i, j = 1, 2, 3, 4, i \neq j. \quad (19)$$

The space $\mathcal{P}_2(K)$, generated by the basis functions defined in (19), can be identified to $(\mathcal{P}_1(K))^3$. The interpolating function \mathbf{u}_h on K for the vectorial state variable $\mathbf{u} \in (C^0(\overline{K}))^3$ has the following form

$$\mathbf{u}_h = \sum_{i=1}^4 \sum_{j \neq i, j=1}^4 \mathbf{w}_{ij} \beta_{ij}(\mathbf{u}) \quad \text{with} \quad \beta_{ij}(\mathbf{u}) = |e_{ij}|(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_{e_{ij}})(\mathbf{x}_i) \quad \text{and} \quad \beta_{ji}(\mathbf{u}) = |e_{ij}|(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_{e_{ij}})(\mathbf{x}_j)$$

where \mathbf{x}_i and \mathbf{x}_j are the end points of the edge e_{ij} . As before, the basis functions are computed on the reference tetrahedron \hat{K} as in (19) and transported on the mesh tetrahedron K through the transformation (18). Once again, e_k will denote the k^{th} edge of the mesh, \mathbf{t}_k the unit tangent vector directed as e_k and $\beta_k(\cdot)$ the functional such that $\beta_k(\mathbf{u}) = |e_k|(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_k)(\mathbf{x}_i)$ and $\beta_{-k}(\mathbf{u}) = |e_k|(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_k)(\mathbf{x}_j)$. The basis function associated to e_k will be denoted by \mathbf{w}_k . The second family of edge element on K is defined by (K, \mathcal{P}_2, B) , where B is the set of the degrees of freedom given by the linear functionals β_k and β_{-k} acting on $(C^0(\overline{K}))^3$. This finite element is unisolvent and conforming in $H(\text{curl})$. A second choice for the space $\mathcal{P}(\hat{K})$ involved in (15) is given by $\mathcal{P}_2(\hat{K})$.

3.3 Spatial discretization - Case of domain decomposition

Let \mathcal{T}_{k,h_k} be two families of triangulations of $\overline{\Omega}_k$ ($k=1,2$) by means of an unstructured mesh composed of tetrahedra K such that

$$\overline{\Omega}_k = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_{k,h_k}} K$$

with $h_k = \max \{ \text{diam}(K), K \in \mathcal{T}_{k,h_k} \}$. We assume that they are regular in the sense of Ciarlet (see [10]) and non-matching at the interface?. It can a priori even happen that h_1 and h_2 are radically different.

We aim at introducing a non-conforming finite element space, adapted to domain decomposition, for the approximation of (13). We then define the following finite-dimensional spaces of edge elements

$$Y_{k,h_k} = \{\mathbf{v}_{k,h_k} \in H(\text{curl}, \Omega_k) \mid B_K^T(\mathbf{v}_{k,h_k}|_K \circ F_K) \in \mathcal{P}(\hat{K}), \forall K \in \mathcal{T}_{k,h_k}\} \quad (20)$$

where \mathcal{P} corresponds to the first or second family of edge elements and we introduce

$$X_{k,h_k} = \{\mathbf{v}_{k,h_k} \in Y_{k,h_k} \mid \mathbf{v}_{k,h_k} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ on } \partial\Omega\} \quad , \quad k = 1, 2. \quad (21)$$

We now study the discretization of the transmission condition (TC_1) . When looking for a discrete counterpart of the space \mathcal{U} , the equality $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{n}_\Gamma(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_2(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{n}_\Gamma(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in ?$ becomes a too stringent condition since both fields can be defined on different and non-matching grids. As a standard procedure for non-conforming domain decomposition methods, we impose the transmission condition (TC_1) in a weak form by means of a suitable space of Lagrangian multipliers M_h . We denote $h = \max(h_1, h_2)$.

We focus the attention on the interface $?$. Let $\hat{T} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\}$ be the reference triangle with edges $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ and outer normal $\hat{\mathbf{n}}$. We denote by $(\mathcal{T}_{k,h_k})|_\Gamma$ ($k = 1, 2$) the two discretizations of $?$ composed of faces T belonging to tetrahedra of \mathcal{T}_{k,h_k} . Let

$$\begin{aligned} UK &:= \cup\{T \in (\mathcal{T}_{k,h_k})|_\Gamma \text{ such that } \overline{T} \cap \partial? \text{ consists in one edge of } T\} \\ DK &:= \cup\{T \in (\mathcal{T}_{k,h_k})|_\Gamma \text{ such that } \overline{T} \cap \partial? \text{ consists in two edges of } T\} \end{aligned}$$

For all $T \in (\mathcal{T}_{k,h_k})|_\Gamma$, we assume that the mapping $f_T : \hat{T} \rightarrow T, f_T(\hat{x}) = B_T \hat{x} + \mathbf{b}_T$, where the matrix $B_T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ and the constant vector $\mathbf{b}_T \in \mathbb{R}^2$, is a linear invertible application. Let

$$T_h := \{\mathbf{v}_{2,h_2} \wedge \mathbf{n}_\Gamma, \mathbf{v}_{2,h_2} \in Y_{2,h_2}\} \quad (22)$$

be the space of traces on $?$ of the edge element space Y_{2,h_2} . The space T_h is $H(\text{div}, ?)$ -conforming and it is composed by functions $\hat{\mathbf{v}} : \hat{T} \rightarrow \mathbb{R}^2, \hat{\mathbf{v}} \in (\mathbb{P}_1(\hat{T}))^2$ with degrees of freedom

$$\int_{\hat{e}} \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}} p \, dl \quad , \quad \begin{aligned} &\forall p \in \mathbb{P}_0(\hat{e}) \text{ with the first family} \\ &\forall p \in \mathbb{P}_1(\hat{e}) \text{ with the second family} \end{aligned} \quad \text{and where} \quad \hat{e} = \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3 \quad (23)$$

and defined on the current face T by means of the transformation

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = B_T \hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}) \quad , \quad \mathbf{x} = B_T \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_T.$$

We choose $M_h \subset T_h$ and satisfying some additional constrains. In the mortar element method terminology, this means that we choose Ω_1 as *master* and the Ω_2 as *slave*. The definition of M_h involving the space of traces on $?$ of the edge element space Y_{1,h_1} gives a different but similar mortar method.

We assume that the mapping $f_T : \hat{T} \rightarrow T$ associates to the edge $(\overline{T} \cap \partial?)$ the edge of \hat{T} lying on $\{\hat{y} = 0\}$ for all $T \in UK$ and the edges of \hat{T} lying on $\{\hat{y} = 0\}$ and $\{\hat{x} = 0\}$ to the edges $(\overline{T} \cap \partial?)$ for all $T \in DK$ (this is exhaustive up to a rotation, as we remark later). Following [3], the space M_h is defined as

$$\begin{aligned} M_h &:= \{\varphi_h \in T_h \mid B_T^{-1}(\varphi_h \circ f_T) \in \mathbb{P}_1(\hat{T}) \times \mathbb{P}_1(\hat{T}) \text{ if } \overline{T} \cap \partial? = \emptyset \text{ or reduced to one point} \quad , \\ &\quad B_T^{-1}(\varphi_h \circ f_T) \in \mathbb{P}_1(\hat{T}) \times \mathbb{P}_0(\hat{T}) \text{ if } \overline{T} \cap \partial? \text{ consists in one edge of } T \quad , \\ &\quad B_T^{-1}(\varphi_h \circ f_T) \in \mathbb{P}_0(\hat{T}) \times \mathbb{P}_0(\hat{T}) \text{ if } \overline{T} \cap \partial? \text{ consists in two edges of } T \}. \end{aligned} \quad (24)$$

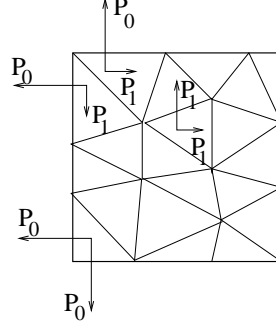


Figure 2: Graphical “representation” of the Lagrange multipliers on Γ : the degrees of the polynomial components of $(\phi_h)_{|T}$ are displayed depending on the position of the triangle T on the interface.

We then introduce the approximation space:

$$\mathcal{U}_h = \{ \mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_{1,h}, \mathbf{v}_{2,h}) \in X_{1,h} \times X_{2,h} \quad \text{such that} \quad \forall \boldsymbol{\varphi}_h \in M_h \int_{\Gamma} (\mathbf{v}_{1,h} - \mathbf{v}_{2,h}) \wedge \mathbf{n}_{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\varphi}_h \, dS = 0 \}. \quad (25)$$

The constraint (25) is the discrete weak version of the transmission condition (TC_1) . Let us introduce $\mathcal{U}_h^0 = \{ \mathbf{v}_h \in \mathcal{U}_h \mid \mathbf{v}_h \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ on } \partial\Omega \}$; we now look for a solution of the following variational problem:

Find $\mathbf{u}_h \in \mathcal{U}_h^0$ such that :

$$\sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \nu \operatorname{curl} \mathbf{u}_{k,h} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{v}_{k,h} \, d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \mathbf{T}_{k,h} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{v}_{k,h} \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{U}_h^0. \quad (26)$$

3.4 Construction of the Lagrangian multipliers

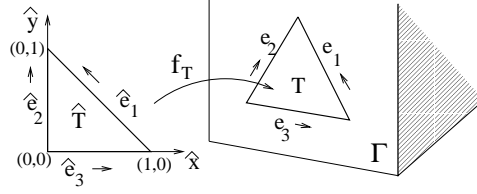
Before presenting the construction of a basis for the approximation space \mathcal{U}_h^0 and how the condition (25) is implemented, we describe a way to compute the elements of a basis for M_h . The following descriptions are valid for both domains Ω_k ($k = 1, 2$). Let \hat{T} be the unit triangle in the plane $\{\hat{z} = 0\}$ as previously defined and $T \in (\mathcal{T}_{k,h_k})_{|\Gamma}$. We start by the second family which is a little bit more simple to understand.

3.4.1 Second family

We give here the description of a basis for M_h in case the first family is used (the following expressions are valid in $H(\operatorname{div})$).

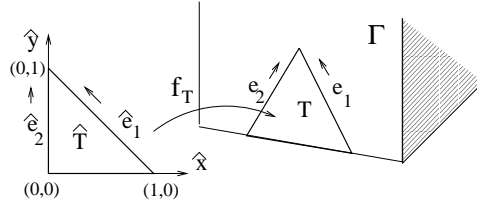
Internal triangles – We suppose that $\overline{T} \cap \partial\Gamma = \emptyset$ (see Figure 3). The space $(M_h)_{|T}$ contains *six* functions $\hat{\mathbf{v}}_k \in T_h$ with degrees of freedom defined in (23) for all the three edges and of the form

$$\hat{\mathbf{v}}_k := \begin{pmatrix} a\hat{x} + b\hat{y} + c \\ a'\hat{x} + b'\hat{y} + c' \end{pmatrix}.$$

Figure 3: Orientation of the edges in the unit triangle \hat{T} and on a current one T such that $\overline{T} \cap \partial? = \emptyset$.

Boundary triangles with one edge on $\partial?$ – We suppose that $\overline{T} \cap \partial?$ consists of one edge of T and that this edge is associated to the edge of \hat{T} lying on $\hat{y} = 0$ (see Figure 4). The space $(M_h)|_T$ contains *four* functions $\hat{\mathbf{v}}_k \in T_h$ with degrees of freedom defined in (23) for only the internal edges and of the form

$$\hat{\mathbf{v}}_k := \begin{pmatrix} (a - c')\hat{x} + b\hat{y} + c \\ c' \end{pmatrix}.$$

Figure 4: Orientation of the internal edges in the unit triangle \hat{T} and on a current one T shearing one edge with $\partial?$.

Boundary triangles with two edges on $\partial?$ – We suppose that $\overline{T} \cap \partial?$ consists of two edges of T and that these edges are associated to those of \hat{T} lying on $\hat{y} = 0$ and $\hat{x} = 0$ (see Figure 5). The Lagrangian multipliers have to be built simultaneously on T and on the adjacent triangle T' . We denote by \hat{T}' the rectangle triangle that complements \hat{T} to a square. The triangle \hat{T}' is obtained by applying to T' first the transformation that maps T' onto \hat{T} (we choose the one that maps the common side between T and T' onto the hypotenuse of \hat{T}) and then a symmetry with respect to the line of equation $\hat{x} + \hat{y} = 1$ (we call $f_{T'}$ the transformation from \hat{T}' to T'). The space $(M_h)_{|T \cup T'}$ contains *six* functions $\hat{\mathbf{v}}_h \in T_h$ with normal component continuous across the common edge. The degrees of freedom are those defined in (23) over the sides lying on $\hat{x} = 0$ and $\hat{y} = 0$ with $p \in P_0$, for \hat{T} , and over the sides lying on $\hat{x} = 1$ and $\hat{y} = 1$ with $p \in P_1$, for \hat{T}' . These functions have the form:

$$(\mathbf{v}_k)_{|\hat{T}} := \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{v}_k)_{|\hat{T}'} := \begin{pmatrix} a(1 - \hat{y}) + (b + d_1)(1 - \hat{x}) + c(\hat{x} + \hat{y} - 1) \\ (a' + d_2)(1 - \hat{y}) + b'(1 - \hat{x}) + c'(\hat{x} + \hat{y} - 1) \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \begin{matrix} a + a' = d_1 \\ b + b' = d_2 \end{matrix}.$$

Rotations – Giving the expression of the Lagrange multipliers, we have made two hypothesis on T : first, that $T = \overline{K} \cap ?$ is mapped through F_K on the face $\hat{T} = \hat{K} \cap \{\hat{z} = 0\}$ and, second, that if $\overline{T} \cap \partial?$ consists of one edge of T , this edge is mapped on the edge of \hat{T} lying on $\hat{y} = 0$, and if $\overline{T} \cap \partial?$ consists of two edges of T , these edges are mapped on those of \hat{T} lying on $\hat{y} = 0$ and $\hat{x} = 0$. In

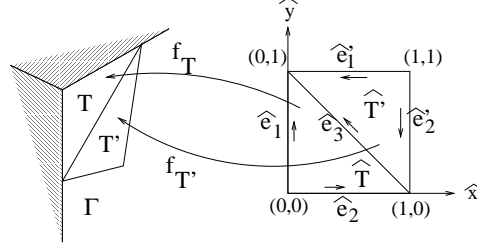


Figure 5: Transformation of $\hat{T} \cup \hat{T}'$ in $T \cup T'$ with T shearing two edges with $\partial?$.

the general case, these hypothesis do not hold. It is then sufficient to rotate K , i.e. renumbering its nodes and edges, in such a way that the reference tetrahedron is in the “correct position” (see Figure 6 to catch the idea).

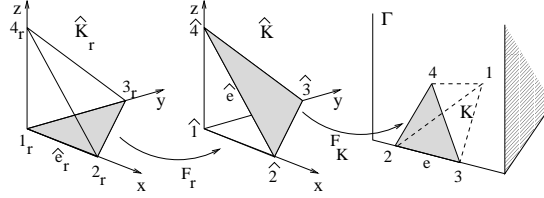


Figure 6: Sequence of transformations to pass from K to a unit tetrahedron in the “correct position”. In this picture, we suppose that $\bar{K} \cap ? = \text{face } 2\,3\,4 \text{ of } K$ and in addition $\bar{K} \cap \partial? = \text{edge } 2\,3 \text{ of } K$. By using the transformation F_K^{-1} we have that the face $2\,3\,4$ of K is transformed into the face $\hat{2}\,\hat{3}\,\hat{4}$ of \hat{K} and the edge $2\,3$ of K is transformed into the edge $\hat{2}\,\hat{3}$ of \hat{K} . The additional transformation, named F_r^{-1} , transforms the face $\hat{2}\,\hat{3}\,\hat{4}$ of \hat{K} into the face $1_r\,2_r\,3_r$ of \hat{K}_r and the edge $\hat{2}\,\hat{3}$ of \hat{K} into the edge $1_r\,2_r$ of \hat{K}_r , which is the “correct position” of the unit tetrahedron where we have computed the expression for the Lagrange multipliers. We thus replace F_K by $F_K \circ F_r$.

3.4.2 First family

We turn now to the description of a basis for M_h in case the first family is used (the following expressions have to be rotated of $\pi/2$ since they are valid in $H(\text{curl})$).

Internal triangles – We suppose that $\bar{T} \cap \partial? = \emptyset$ (see Figure 3) or reduced to one point. The space $(M_h)_T$ contains three functions $\hat{\mathbf{v}}_h \in T_h$ with degrees of freedom defined in (23) for all the three edges and of the form

$$\hat{\mathbf{v}}_h = \begin{pmatrix} c_1 + d\hat{y} \\ c_2 - d\hat{x} \end{pmatrix}.$$

Boundary triangles with one edge on $\partial?$ – We suppose that $\bar{T} \cap \partial?$ consists of one edge of T and that this edge is associated to the edge of \hat{T} lying on $\hat{y} = 0$ (see Figure 4). For such a triangle, imposing that one component is \mathbb{P}_0 implies here that both are \mathbb{P}_0 . The space $(M_h)_T$ contains two functions

$\hat{\mathbf{v}}_h \in T_h$ with degrees of freedom defined in (23) for only the internal edges and of the form

$$\hat{\mathbf{v}}_h = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Boundary triangles with two edges on Γ – We suppose that $\overline{T} \cap \partial\Omega$ consists of two edges of T and that these edges are associated to those of \hat{T} lying on $\hat{y} = 0$ and $\hat{x} = 0$ (see Figure 5). Here again, the adjacent triangle T' has to be involved with functions of the form

$$(\mathbf{v}_h)|_{\hat{T}'} = \begin{pmatrix} c_1 + d\hat{y} \\ c_2 - d\hat{x} \end{pmatrix}.$$

The condition over T that $\hat{\mathbf{v}}_h$ is in $(\mathbb{P}_0)^2$ implies that

$$(\mathbf{v}_h)|_{\hat{T}} = \begin{pmatrix} c_1 + \frac{d}{2} \\ c_2 - \frac{d}{2} \end{pmatrix}.$$

The degrees of freedom are those defined in (23) over the sides lying on $\hat{x} + \hat{y} = 1$, for \hat{T} , and over the sides lying on $\hat{x} = 1$ and $\hat{y} = 1$ for \hat{T}' .

3.5 Merging the two families of edge elements

In paper [3], the authors have shown that the mortar method combined with edge elements in three dimensions leads to an approximation which is slightly sub-optimal with the second family and give indications that with the first family non-optimal results could be feared (our results in Section 5 corroborate this fear). On the other hand, by using the second family of edge elements in one domain, the number of unknowns for a given mesh is multiplied by two even though, for a magnetostatic problem, both families lead to the same approximation accuracy for \mathbf{u}_h and its curl (the expression $\text{curl } \mathbf{w}_{ij} = \text{grad } \lambda_i \wedge \text{grad } \lambda_j$ is valid with both families). The compromise to have a good approximation without too many unknowns is to limit (as proposed in [8]) the use of the second family to all edges that belong to the interface Γ . The first family is then adopted to approximate the problem solution along all edges that do not belong to the interface (i.e. over each tetrahedron that does not meet the interface). The space of edge elements \mathcal{P} involved in the definition (20) is the following:

$$\mathcal{P}(K) = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u}|_e \in \mathcal{P}_1, \forall e \notin \partial K \cap \Gamma \text{ and } \mathbf{u}|_e \in \mathcal{P}_2, \forall e \in \partial K \cap \Gamma\}. \quad (27)$$

From the implementation point of view, the local stiffness matrix associated to each K is built using the second family for only those elements K that meet the interface, i.e. $S_K \in \mathcal{M}(12, 12)$ if $\partial K \cap \Gamma \neq \emptyset$ nor to one point. In this case, the assembling process does not involve the full matrix S_K but the smaller one given by $R_K S_K R_K^T$ where R_K is a suitable rectangular matrix that allows to get rid of the additional unknowns for all edges of the current tetrahedron K that do not lie on Γ .

4 Mortar condition discretization and problem matrix form

We now focus our attention on the numerical treatment of the constraint (25), involved in the definition of a basis for the space \mathcal{U}_h^0 , and on the matrix form of problem (26).

4.1 A basis for the space \mathcal{U}_h^0

Two meshes \mathcal{T}_{k,h_k} composed of tetrahedra with straight edges are used to discretize both domains and the associated discrete subspaces X_{k,h_k} are defined in (21). We denote by e_K the edges of K , and we define the sets Ξ_k

$$\Xi_k = \{e_K \mid K \in \mathcal{T}_{k,h_k}\}, \quad (28)$$

and its subset Ξ_k^0

$$\Xi_k^0 := \{e_K \mid K \in \mathcal{T}_{k,h_k}, e_K \notin \partial\Omega_k \setminus ?\}. \quad (29)$$

In defining the sets Ξ_h and Ξ_h^0 , an assembly process has taken place and in the global numeration we will write the edges as e . In the following, we will say that one edge e lays on ? (and we will note this by writing $e \in ?$) if it belongs to a triangle of $(\mathcal{T}_{k,h_k})|_\Gamma$ ($k=1,2$). The set of edges lying on the interface will be denoted as

$$\xi^k = \{e \in \Xi_k \cap ?\};$$

we also introduce two subsets of ξ^k which are

$$\xi_0^k = \{e \in \Xi_k^0 \cap ?\} \quad \text{and} \quad \xi_{\partial\Gamma}^k = \xi^k \setminus \xi_0^k.$$

We denote by m_Γ^k , $m_{\partial\Gamma}^k$, $m_{\Gamma \setminus \partial\Gamma}^k$ and m^k the number of degrees of freedom associated to all edges belonging to ξ^k , $\xi_{\partial\Gamma}^k$, ξ_0^k and Ξ_k , respectively. We note that $m_{\Gamma \setminus \partial\Gamma}^k = m_\Gamma^k - m_{\partial\Gamma}^k$.

Let us denote by \mathbf{w}^1 the basis functions associated to edges of Ξ_1 and by \mathbf{w}^2 the basis function associated to edges of Ξ_2 . These functions are the elements of the spaces Y_{k,h_k} ($k=1,2$) of the forms (16) or (19). Let us denote by \mathcal{B} a basis for \mathcal{U}_h^0 : we suppose that

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^1 \cup \mathcal{B}^2 \cup \mathcal{B}^{\Gamma_1} \cup \mathcal{B}^{\Gamma_2} \quad (30)$$

where the sets of functions \mathcal{B}^1 , \mathcal{B}^2 , \mathcal{B}^{Γ_1} and \mathcal{B}^{Γ_2} will be defined below.

The functions in \mathcal{B}^1 are zero in $\bar{\Omega}^2$, the functions in \mathcal{B}^2 are zero in $\bar{\Omega}^1$, and the functions in $\mathcal{B}^{\Gamma_1} \cup \mathcal{B}^{\Gamma_2}$ have their support in the union of the *mortar* elements, i.e. tetrahedra with at least one face on ?. Due to the properties of the considered basis functions, we set

$$\mathcal{B}^1 = \{(\mathbf{w}_s^1, \mathbf{0}) \mid s : e_s \in \Xi_1 \setminus \xi^1\}, \quad (31)$$

$$\mathcal{B}^2 = \{(\mathbf{0}, \mathbf{w}_r^2) \mid r : e_r \in \Xi_2 \setminus \xi^2\}, \quad (32)$$

(with \mathbf{w}_s^1 and \mathbf{w}_r^2 belonging to the first family of edge elements) and a possible choice for the basis functions associated on edges lying on the interface is

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{\Gamma_1} &= \left\{ (\mathbf{w}_s^1, \sum_{r: e_r \in \xi_0^2} q_r^s \mathbf{w}_r^2) \mid q_r^s \in \mathbb{R} \text{ and } s : e_s \in \xi^1 \right\}, \\ \mathcal{B}^{\Gamma_2} &= \left\{ (\mathbf{0}, \mathbf{w}_r^2 + \sum_{s: e_s \in \xi_0^1} q_s^r \mathbf{w}_s^1) \mid q_s^r \in \mathbb{R} \text{ and } r : e_r \in \xi^2 \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

(with \mathbf{w}_s^1 , \mathbf{w}_s^2 and \mathbf{w}_r^2 belonging to the second family of edge elements). For each of the $m_\Gamma^1 + m_{\partial\Gamma}^2$ indices s , the coefficients q_r^s , $r=1, m_{\Gamma \setminus \partial\Gamma}^2$, are determined by imposing, the integral matching condition (note that $\dim(M_h) = m_{\Gamma \setminus \partial\Gamma}^2$)

$$\int_\Gamma [(\mathbf{w}_s \wedge \mathbf{n}_\Gamma) - \sum_{r: e_r \in \xi_0^2} q_r^s (\mathbf{w}_r^2 \wedge \mathbf{n}_\Gamma)] \cdot \boldsymbol{\varphi}_k dS = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi}_k \in M_h \quad (34)$$

where $\mathbf{w}_s = \mathbf{w}_s^1$ for all indices s such that $e_s \in \xi_\Gamma^1$ and $\mathbf{w}_s = -\mathbf{w}_s^2$ for all indices s such that $e_s \in \xi_{\partial\Gamma}^2$. Each of these $m_\Gamma^1 + m_{\partial\Gamma}^2$ sets of $m_{\Gamma \setminus \partial\Gamma}^2$ equations can be put into the following matricial form

$$C\mathbf{q}^s = D(\cdot, s) \quad (35)$$

where

$$C(k, r) = \int_\Gamma (\mathbf{w}_r^2 \wedge \mathbf{n}_\Gamma) \cdot \boldsymbol{\varphi}_k dS \quad r : e_r \in \xi_0^2, \quad k : \boldsymbol{\varphi}_k \in M_h, \quad (36)$$

$$D(k, s) = \int_\Gamma (\mathbf{w}_s \wedge \mathbf{n}_\Gamma) \cdot \boldsymbol{\varphi}_k dS \quad \begin{array}{ll} \mathbf{w}_s = \mathbf{w}_s^1 & s : e_s \in \xi_\Gamma^1 \\ \mathbf{w}_s = -\mathbf{w}_s^2 & s : e_s \in \xi_{\partial\Gamma}^2 \end{array}, \quad k : \boldsymbol{\varphi}_k \in M_h. \quad (37)$$

The system (35) allows us to determine the vector \mathbf{q}^s for all edges $e_s \in \xi^1 \cup \xi_{\partial\Gamma}^2$ and thus the set of basis functions on the interface. For the matrix form of problem (26), it is useful to define the rectangular matrix Q of dimension $m_{\Gamma \setminus \partial\Gamma}^2 \times (m_\Gamma^1 + m_{\partial\Gamma}^2)$

$$Q = C^{-1}D = [Q_1, Q_2]$$

with Q_1 of dimension $m_{\Gamma \setminus \partial\Gamma}^2 \times m_\Gamma^1$ and Q_2 of dimension $m_{\Gamma \setminus \partial\Gamma}^2 \times m_{\partial\Gamma}^2$. The matrix Q allows to couple at the interface the information coming from the Ω_1 and Ω_2 domains and its construction is a crucial point in the implementation of the method. In presence of movement, Q has to be rebuilt at each new configuration of the free part. In the following, we explain an easy procedure to numerically compute the involved integrals over Γ , stating the difference with the two-dimensional case.

4.2 Numerical treatment of the coupling condition

In two dimensions we could intersect the two different discretizations of Γ since the involved geometric entities were segments. To compute the integrals in (37), the nodes of the chosen quadrature formula were defined on the intersection segments and projected on the segments of $(\mathcal{T}_{k,h_k})|_\Gamma$ ($k = 1, 2$), as explained in [7, 21] (see Figure 7 for the case of a curved interface).

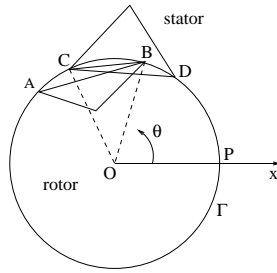


Figure 7: Edges intersection at a circular interface: a simplified situation with only two mesh triangles belonging one to each of the two meshes. The intersection of the two mesh edges AB and CD can be defined either in terms of angles or in terms of segments. In the case of the Figure, the intersection is represented either by the interval (θ_B, θ_C) or by the line CB.

In three dimensions, the intersection between two triangles becomes a hard task since it is possible to obtain plane figures with up to six sides. To overcome the problem and compute the integrals in

(37) we have to act differently by introducing for the interface a *third mesh*, named $\mathcal{T}_{3,h_3}^\Gamma$, over Γ , i.e. a discretization of Γ independent of the ones given by $(\mathcal{T}_{k,h_k})|_\Gamma$ ($k = 1, 2$) (see Figure 8).

It is natural to ask why we do not use one of the two existing surface discretizations $(\mathcal{T}_{k,h_k})|_\Gamma$ ($k = 1, 2$) for the numerical integration of the coupling condition. The choice of introducing a third mesh is due to several reasons. Among them, we do not want to “favour” one discretization with respect to the other. Secondly, taking one of the two interface meshes leads to a lack of accuracy as explained in [9]. In addition, we can refine the integration mesh $\mathcal{T}_{3,h_3}^\Gamma$ independently of the existing two, in order to get a better accuracy in computing the surface integrals.

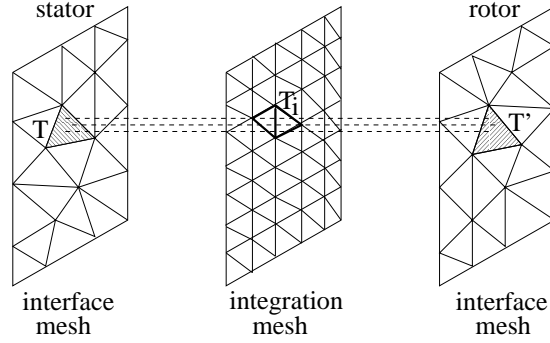


Figure 8: Projection of the quadrature nodes defined on the triangles of $\mathcal{T}_{3,h_3}^\Gamma$ on $(\mathcal{T}_{k,h_k})|_\Gamma$ ($k = 1, 2$). The quadrature nodes contained in the triangles put in evidence on the integration mesh are used to compute the surface integrals (37) over $T \cap T'$ (T belongs to the stator discretization of Γ and T' to that of the rotor).

The numerical computation of the integral $\int_\Gamma (\mathbf{w}_s^1 \wedge \mathbf{n}_\Gamma) \cdot \varphi_k dS$ can be done through the following steps:

- we define a quadrature formula $(\omega_i^j, \mathbf{x}_i^j)$ ($j = 1, N_q$) on the mesh triangles T_i of $\mathcal{T}_{3,h_3}^\Gamma$ by transforming a chosen quadrature formula defined on the unit triangle \hat{T} ;
- we build a radial projection operator from triangles of $\mathcal{T}_{3,h_3}^\Gamma$ to triangles of $(\mathcal{T}_{k,h_k})|_\Gamma$;
- we project each node \mathbf{x}_i^j on $(\mathcal{T}_{1,h_1})|_\Gamma$ and we call $\mathbf{x}_{i,1}^j$ the projected node;
- we project each node \mathbf{x}_i^j on $(\mathcal{T}_{2,h_2})|_\Gamma$ and we call $\mathbf{x}_{i,2}^j$ the projected node.

We then have

$$\int_\Gamma (\mathbf{w}_s^1 \wedge \mathbf{n}_\Gamma) \cdot \varphi_k d\Gamma = \sum_{T_i \in \mathcal{T}_{3,h_3}^\Gamma} \sum_{j=1}^{N_q} \omega_i^j (\mathbf{w}_s^1 \wedge \mathbf{n}_\Gamma)(\mathbf{x}_{i,1}^j) \cdot \varphi_k(\mathbf{x}_{i,2}^j).$$

4.3 Matrix form of the discretized problem

The system we solve to get numerical results is built exactly as explained in [7, 21]. So, we start by writing, in each sub-domain, the final system associated to equation (26) with homogeneous Neumann type conditions on the interface Γ . Then the two systems are coupled by means of the mortar condition.

Let $u_h = (u_{1,h}, u_{2,h})$ be the solution of the fully discrete problem: we expand it in terms of the edge element basis functions of the finite dimensional spaces X_{k,h_k} ($k=1,2$) defined in the sub-domains. We then have m^1 unknown coefficients u_s^1 and m^2 unknown coefficients u_r^2 . If we choose Ω_1 as master sub-domain for the unknown values associated to the edges lying on the interface, among the $m^1 + m^2$ coefficients, only $m^1 + m^2 - m_{\Gamma \setminus \partial\Gamma}^2$ are real unknowns. In fact, the $m_{\Gamma \setminus \partial\Gamma}^2$ coefficients associated to edges in ξ_0^2 are linked to the $m_\Gamma^1 + m_{\partial\Gamma}^2$ coefficients associated to those in $\xi_\Gamma^1 \cup \xi_{\partial\Gamma}^2$ through the mortar condition.

We divide the unknowns in each sub-domain in three blocks with names reported in parentheses: the first block ($\mathbf{u}_{\partial\Gamma}^k$) contains the unknowns associated to edges in $\xi_{\partial\Gamma}^k$, the second block ($\mathbf{u}_{\Gamma \setminus \partial\Gamma}^k$) contains the unknowns associated to edges in $\xi_{\Gamma \setminus \partial\Gamma}^k$ and the third block (\mathbf{u}_{Int}^k) those associated to edges in $\Xi^k \setminus \xi^k$ ($k = 1, 2$).

In each sub-domain, we build the system associated to the fully discrete problem equations with a homogeneous Neumann condition at the interface Γ . In this way, we obtain two linear systems of the following form ($k = 1, 2$)

$$S^k \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{\partial\Gamma}^k \\ \mathbf{u}_{\Gamma \setminus \partial\Gamma}^k \\ \mathbf{u}_{Int}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{\partial\Gamma}^k \\ \mathbf{F}_{\Gamma \setminus \partial\Gamma}^k \\ \mathbf{F}_{Int}^k \end{pmatrix}.$$

where $(\mathbf{F}_{\partial\Gamma}^k, \mathbf{F}_{\Gamma \setminus \partial\Gamma}^k, \mathbf{F}_{Int}^k)$ is the vector of moments associated to the right-hand side of problem (26) in Ω_k and S^k is the standard stiffness built by assembling, $\forall K \in \mathcal{T}_{k,h_k}$, the local matrices S_K or $R_K^T S_K R_K$ depending whether $\partial K \cap \Gamma = \emptyset$ or reduced to one point or not.

Neither \mathbf{u}^1 nor \mathbf{u}^2 are solution of the previous problems since the two sets of values $((\mathbf{u}_{\partial\Gamma}^1, \mathbf{u}_{\Gamma \setminus \partial\Gamma}^1), \mathbf{u}_{\partial\Gamma}^2)$ and $\mathbf{u}_{\Gamma \setminus \partial\Gamma}^2$ are linked one to the other by the mortar matching condition. Choosing Ω_1 as master sub-domain, we have

$$\mathbf{u}_{\Gamma \setminus \partial\Gamma}^2 = [Q_1, Q_2] ((\mathbf{u}_{\partial\Gamma}^1, \mathbf{u}_{\Gamma \setminus \partial\Gamma}^1), \mathbf{u}_{\partial\Gamma}^2)^T$$

where $Q = [Q_1, Q_2]$ is the rectangular full matrix of dimension $m_{\Gamma \setminus \partial\Gamma}^2$ per $m_\Gamma^1 + m_{\partial\Gamma}^2$ obtained from the matching condition discretization. We introduce then the following matrices:

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} Id & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Id & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id & 0 \\ Q_1 & 0 & Q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad S = \begin{pmatrix} S^1 & 0 \\ 0 & S^2 \end{pmatrix} \quad (38)$$

Indicating by \mathbf{x} the independent unknowns, i.e. $\mathbf{x} = ((\mathbf{u}_{\partial\Gamma}^1, \mathbf{u}_{\Gamma \setminus \partial\Gamma}^1), \mathbf{u}_{Int}^1, \mathbf{u}_{\partial\Gamma}^2, \mathbf{u}_{Int}^2)^T$, the approximation of the physical solution is computed solving the system

$$\tilde{Q}^T S \tilde{Q} \mathbf{x} = \tilde{Q}^T \mathbf{F} \quad (39)$$

It is important to remark that, the final matrix is symmetric and positive definite as in the two-dimensional case and the final system is solved by the iterative Conjugate Gradient procedure (see in Appendix for some remarks on an efficient way to solve (39)).

5 Numerical results

In this section we are going to present some numerical results to show how the proposed method works. The problem on which the method has been tested is the calculation of the magnetic induction \mathbf{B} given by a uniform current in a cube of uniform permeability corresponding to the homogeneous boundary condition $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ on $\partial\Omega$. The magnetic permeability is that of the vacuum.

We consider the domain presented in Figure 1 where $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ is a cube of side $L = 1$ m. The mortar interface is the flat surface $\Gamma = \{(0.5, y, z) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$. The chosen data give rise to a magnetic vector potential which is tangent to the interface: the mortar method is then used to couple a non-negligible information.

In Table 1, we report, per sub-domain, the mesh data and the number of degrees of freedom (we indicate in parenthesis the number of degrees of freedom on the interface Γ). The matrices are stored in symmetric morse format, i.e. only the non-zero entries of the matrix are considered.

Table 1: Mesh data and degrees of freedom (per sub-domain)

meshes	nodes	elements	edges	degrees of freedom
I	27	48	98	42 (16)
II	59	166	272	168 (40)
III	125	384	604	396 (80)
IV	320	1294	1799	1411 (170)
V	343	1296	1854	1398 (192)
VI	729	3072	4184	3384 (352)
VII	1331	6000	7930	6690 (560)

The discretization non-conformity at the common interface Γ is here achieved in two ways: 1) either we choose the same mesh in both sub-domains and we rotate of 90° one mesh with respect to the other; 2) or we consider a fine mesh in one sub-domain and a coarse mesh in the other sub-domain.

In all simulations, the third mesh $\mathcal{T}_{3,h,3}^\Gamma$, introduced to numerically compute the integrals appearing in the coupling condition, is composed of 620 triangles and 345 nodes. For each of its triangles, we consider three internal integration nodes ($N_q = 3$) corresponding in \hat{T} to the points of coordinates $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{6})$ and $(\frac{1}{6}, \frac{2}{3})$. The quadrature formula weights are equal to $\frac{1}{3}$. This quadrature formula has order two. On the third mesh we simulate, in some sense, an “exact” integration of all integrals over Γ even if the exact integration is in general never expected even by using a higher order quadrature formula: the coupling condition concerns piecewise polynomials of degree two that are C^0 but not C^1 on Γ . By the way, the third mesh has not to be too coarse since we risk to have a couple of triangles on Γ from Ω_1 and Ω_2 which do not interact since none of the integration nodes fall simultaneously in the two triangles.

In the following tables, we report the real number of degrees of freedom for various discretizations, respectively, together with the final residual and number of iterations of the used Conjugue Gradient procedure. The tables also display the values of the stored magnetic energy obtained for a uniform density current of intensity 10^7 A/m² directed along the y-axis. In all examples, the vector \mathbf{T} such that $\text{curl} \mathbf{T} = \mathbf{J}$ is $\mathbf{T} = (0, 0, T_0(x - .5))$ with $T_0 = 10^7$ A/m. The computed value W_h for the stored magnetic energy has to be compared with the analytical one given by (see [1])

$$W_a = \mu_0 J^2 L^5 \left(\frac{1}{24} + \frac{8}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh(2\pi + 1)\pi/2}{(2n + 1)^5} \right).$$

For the considered situation, the analytical value of the energy is 2.208 MJ and the magnetic induction \mathbf{B} has a maximum intensity of 3.9 Wb/m. It can be seen that the energy values obtained by the magnetic vector potential formulation are always approximated below and the finer the mesh is, the closer the computed energy value is to the analytical one.

In Table 2, results address to the conforming case where both sub-domains are discretized with the same mesh. In this case, the coupling matrix Q is squared and “equivalent” to the identity. For each row i of Q , there exists only one column j such that $Q(i, j) \neq 0$ and $Q(i, j) = 1$, with j not necessarily equal to i due to the different numerotation of the degrees of freedom in each sub-domain.

Table 2: Conforming discretizations

meshes	degrees of freedom	CG residual/ 10^{-7}	CG iterations	energy/ 10^6
I - I (*)	68	4.7063	20	1.5419
II - II	296	9.7081	30	1.9261
III - III (*)	712	9.9794	43	2.0271
IV - IV	2652	9.9279	52	2.1267
V - V	2604	8.9139	67	2.1267
VI - VI	6416	9.4174	90	2.1622
VII - VII	12820	9.4468	113	2.1787

In Figure 9, we present the magnetic induction distribution in the transversal plane of equation $y = 0.25$ computed on matching coarse and fine meshes I and III respectively. The corresponding energy values are indicated in the rows denoted by (*) of Table 2. Arrows indicate the magnetic induction vector evaluated at the elements' barycentres and the arrows length is adapted automatically with respect to the maximum diameter h of the mesh tetrahedra by the plotting package itself. As it can be seen, the information is correctly transferred from the master to the slave sub-domain.

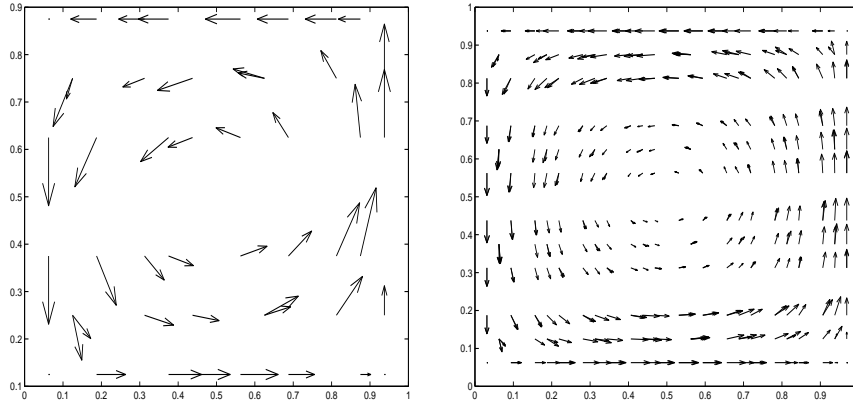


Figure 9: The magnetic induction \mathbf{B} on the plane $y = .25$ computed on matching coarse (left) and fine (right) meshes.

In Tables 3, results address to the non-conforming case where both sub-domains are discretized either with the same mesh (the second rotated of 90° with respect to the first one) or with different meshes. In this case, the coupling matrix Q is rectangular and no more “equivalent” to the identity.

Table 3: Non-conforming discretizations

meshes	degrees of freedom	CG residual/ 10^{-7}	CG iterations	energy/ 10^6
I - I rotated	68	7.3256	53	1.5521
III - I	358	7.8839	35	1.7466
I - III	422	9.2364	141	1.7764
I - III rotated	422	9.6712	127	1.7779
II - II rotated	296	9.7265	75	1.9195
II - IV	1539	9.7055	143	2.0216
II - IV rotated	1539	9.6157	142	2.0264
III - III rotated	712	9.7021	92	2.0277
IV - IV rotated	2652	9.6514	108	2.1318
V - V rotated	2604	9.9828	116	2.1267
VI - VI rotated	6416	9.9618	135	2.1621
VI - VII (*)	9722	9.8627	193	2.1703
VII - VI (*)	9514	9.7641	186	2.1703
VII - VII rotated	12820	9.7970	194	2.1786

In Figures 10 and 11 we present the magnetic induction distribution in the section of equation $y = 0.25$ computed on non-matching meshes VII - VI and VI - VII respectively. Colors refer to the vector intensity (in Wb/m) and arrows are the projections on the plane $y = 0.25$ of the magnetic induction vectors associated to the element barycenters. The corresponding energy values are indicated in the rows denoted by (*) of Table 3. Looking at the pictures, we see that the information is correctly transferred from the master to the slave sub-domain despite the discretizations do not match at the interface and even when the master mesh is coarser than the slave one. Moreover, the maximum of the computed magnetic induction intensity (on the top of the color scale reported on the right of the pictures) is equal to the analytical one. We remark that the theoretical analysis predicts the same optimal estimate for the approximation error in both cases when the slave mesh is coarser or finer than the master one. This is confirmed by the numerical results: the magnetic energy is 2.1703 MJ in both cases. On the other hand, the number of iterations is meaningless since the solving procedure is not optimal at all.

By looking at Figures 9, 10 and 11, it has to be remembered that the computed vector is the magnetic vector potential \mathbf{u} whereas the displayed vector is the magnetic induction \mathbf{B} . The representation of the computed magnetic induction \mathbf{B}_h on a plane $y = \text{const}$ allows to better put in evidence the continuity across the mortar interface of the normal component of \mathbf{B}_h , despite the non-conformity of the sub-domain discretizations at that interface. In order to underline the continuity across the interface ? of the tangential component of the computed magnetic vector potential \mathbf{u}_h , a representation of \mathbf{u}_h on the plane $x = 0.5$ has to be considered: this representation is possible but more difficult to “read” since it involves two sets of arrows lying on the same plane.

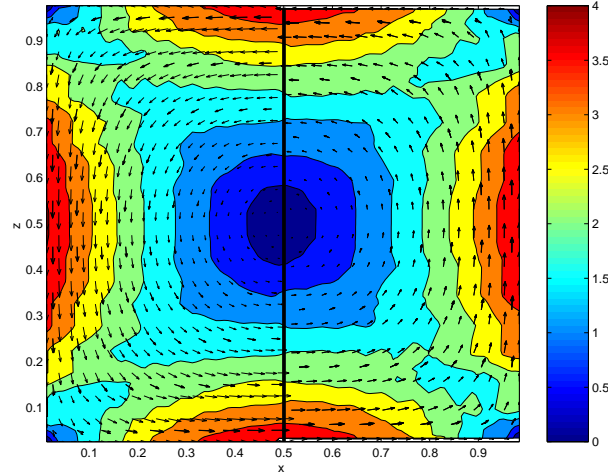


Figure 10: Magnetic induction on the section $y = 0.25$ of $[0, 1]^3$: colors refer to the induction intensity (in Wb/m) and arrows refer to the projection on the section of the induction vector computed at the tetrahedra barycenters. The dark line separates the two sub-domains. Here, the master mesh is *finer* ($h_1 < h_2$).

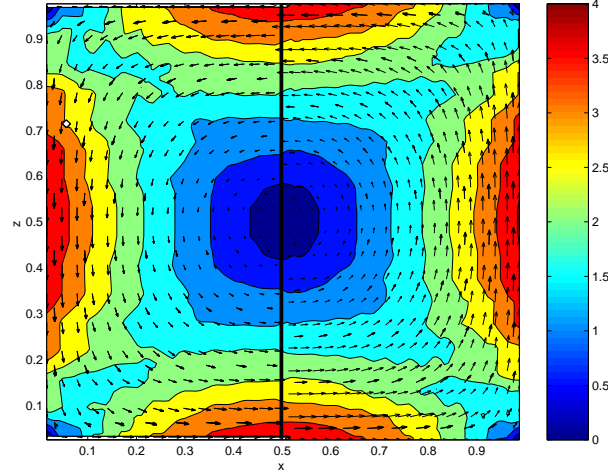


Figure 11: Magnetic induction on the section $y = 0.25$ of $[0, 1]^3$: colors refer to the induction intensity (in Wb/m) and arrows refer to the projection on the section of the induction vector computed at the tetrahedra barycenters. The dark line separates the two sub-domains. Here, the master mesh is *coarser* ($h_1 > h_2$).

We now investigate the precision of the proposed method by considering the dependence of the relative error $(W_a - W_h)/W_a$ for the stored magnetic energy on the mesh parameter h (i.e. the maximum diameter of the tetrahedra contained in the meshes discretizing the sub-domains).

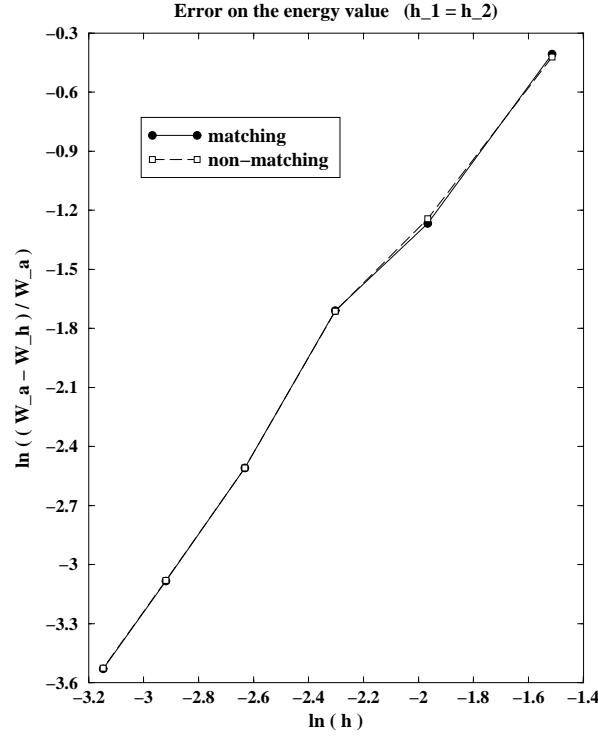


Figure 12: Relative error (in logarithm scale) on the stored magnetic energy: both sub-domains are discretized by the same mesh ($h_1 = h_2$). The triangular discretizations, induced on the interface by the sub-domain meshes, are either conforming or (when one mesh is rotated with respect to the other) non-conforming.

In Figure 12, the relative error is computed in the case where both sub-domains are discretized by the same mesh. Whether the two triangular discretization of Γ , induced by the sub-domain meshes, match or not, the error is the same and decreases linearly with the mesh parameter h , as predicted by the theoretical analysis.

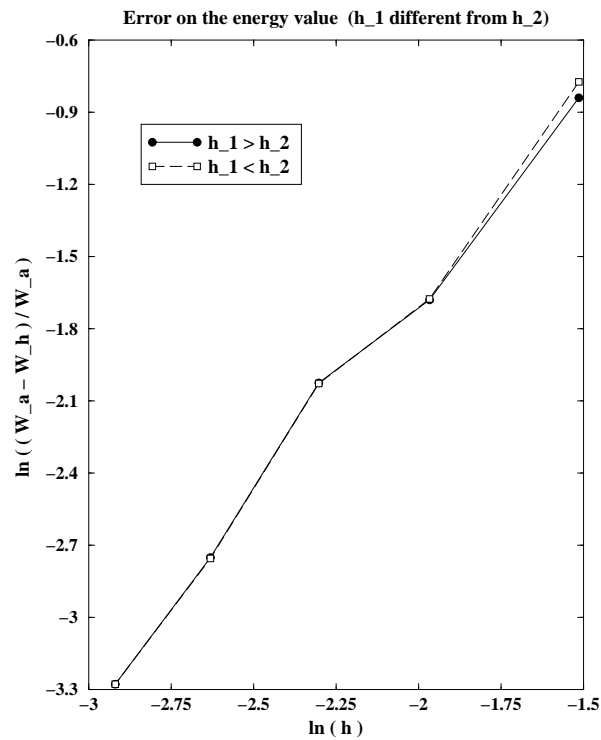


Figure 13: Relative error (in logarithm scale) on the stored magnetic energy: the two sub-domains are discretized with different meshes ($h_1 \neq h_2$) and the triangular discretizations induced on the interface by the sub-domain meshes are non-conforming.

In Figure 13, we analyse the influence of the master mesh element size h_1 on the precision of the method. The relative error is then computed twice, taking the master mesh finer ($h_1 < h_2$) or coarser ($h_1 > h_2$) than the slave one. We can observe that the error is the same in both cases and decreases linearly with h_1 . A similar figure can be obtained by displaying the dependence of the relative error on h_2 .

In Table 4, results are about the non-conforming case where both sub-domains are discretized with the same mesh (the second rotated of 90° with respect to the first one): results are obtained by approximating the solution on the interface by using either the first or the second order edge elements.

Table 4: Different edge element families on the interface

meshes	family	degrees of freedom	CG residual/ 10^{-7}	CG iterations	energy/ 10^6
III - III rotated (*)	first	672	8.9823	58	1.8921
III - III rotated (*)	second	712	9.7021	92	2.0277
IV - IV rotated	first	2567	9.5748	227	2.0916
IV - IV rotated	second	2652	9.6514	108	2.1318

In Figure 14, we present the magnetic induction distribution in the transversal plane of equation $y = 0.25$ computed on non-matching meshes III - III rotated corresponding to the energy values indicated in the rows denoted by (*) of Table 4. In [3], authors have proven optimal error estimates when second order edge elements are used to approximate the solution on the interface ?. Concerning the use of first order edge elements on ?, numerical results confirm the feared non-optimality of the approximation: we have in fact that with second order edge elements, the computed value for the magnetic energy is closer to the analytical one. We thus underline the importance of using second order edge elements on the common interface for a more accurate transfer of the information from one sub-domain to the other.

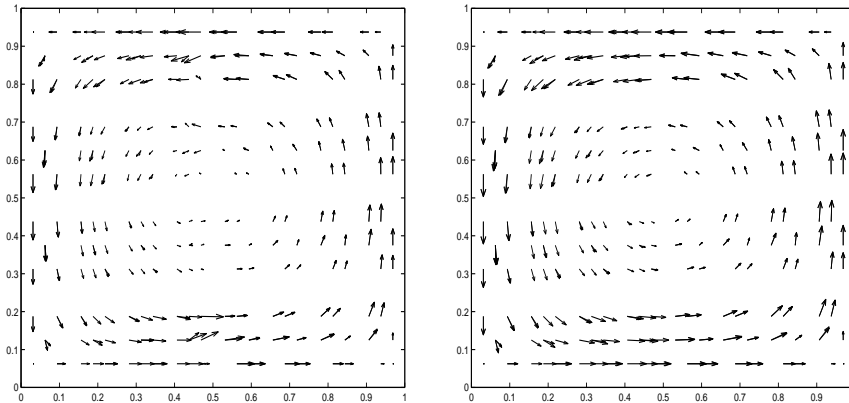


Figure 14: The magnetic induction B on the plane $y = .25$ computed on non-matching meshes. The magnetic vector potential on ? is approximate by using either the first family (left) or the second one (right).

6 Conclusions

A non-conforming approximation of the three-dimensional magnetostatic problem has been briefly presented and analysed mainly from the implementation point of view. Based on the mortar edge element method, this approximation has allowed to work in a very elegant way with domain discretizations that do not match at the interface. The interest of the proposed method is focused on the following issues: (1) the imposition at a discrete level of the transmission condition for the tangential component of the magnetic vector potential field across the sliding interface, is done without any constraint between the spatial discretization steps h_1 and h_2 ; (2) the use of second order edge elements on the interface is mandatory to have an optimal approximation of the problem solution; (3) non-matching grids can be easily intersected by means of a projection procedure based on the introduction of an independent third surface mesh; (4) the system of the discretized problem has a symmetric and positive definite. Numerical results confirm the theoretical ones and put in evidence the ability of the proposed method.

Appendix

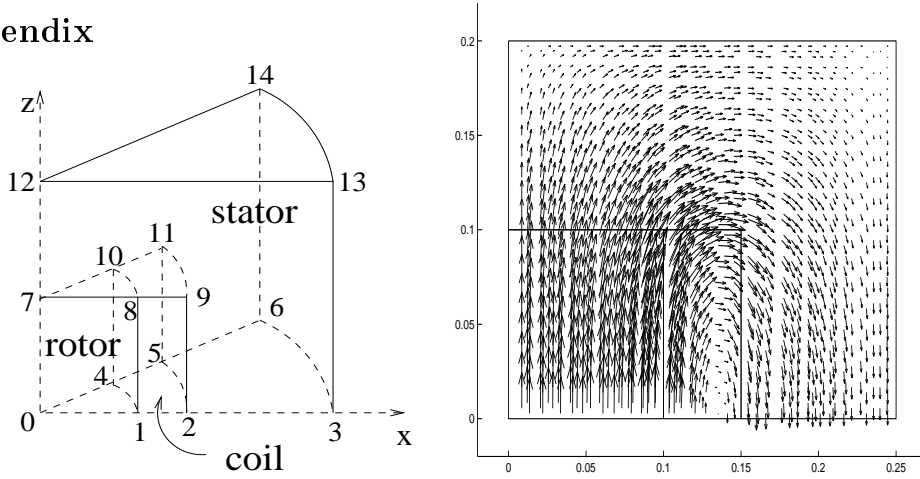


Figure 15: The computational domain (left) and the magnetic induction \mathbf{B} on the plane $x = 0$ (right) resulting from the approximation of problem (1) in a stator + coil + rotor system by means of first order edge elements. We have imposed homogeneous Dirichlet b. c. on the surfaces $\langle 3, 13, 14, 6 \rangle$, $\langle 12, 13, 14 \rangle$, homogeneous Neumann b. c. on $\langle 0, 3, 6 \rangle$ and periodic b. c. on $\langle 0, 3, 13, 12 \rangle$, $\langle 0, 6, 14, 12 \rangle$. The source current density \mathbf{J} has intensity $5 \cdot 10^3 \text{ A/m}^2$ and flows in the coil in the z -axis direction. The Conjugate Gradient algorithm converges in 104 iterations with residual equal to $9.80788299 \cdot 10^{-7}$. The stored magnetic energy is $4.03846252 \cdot 10^{-6} \text{ J}$. Due to the domain and source cylindrical symmetry, numerical simulations have been run on the eight part of the full structure with a sensitive gain in the computational cost.

In this paper, we have reported the numerical results concerning the application of the mortar element method to approximate problem (1) in a given domain. These results have been obtained by solving the corresponding algebraic systems through the Conjugate Gradient (CG) procedure. Due to the reduced number of unknowns in the considered cases, the final system matrix $\tilde{Q}^T S \tilde{Q}$ was firstly assembled in morse format and then inverted. We want here to make some remarks on an efficient way to solve the final algebraic system (39).

Aiming at applying the mortar element method to more complex geometries, especially in three dimensions (see Figure 15), the assembling process of the global matrix represents a too much expensive step in the final resolution. In the following we describe the idea to by-pass the assembling task by observing the fact that, thanks to the mortar method philosophy, residuals can be computed in parallel as observed in [4]. We present the subject in the time independent case (the time dependent case follows straightforwardly).

Assembled matrix inversion algorithm – The assembled system $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ with $M = \tilde{Q}^T S \tilde{Q}$ and $\mathbf{b} = \tilde{Q}^T \mathbf{F}$ has been inverted with the following preconditioned CG procedure:

1. Initialize

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^0 &\in \mathbb{R}^n \quad \text{with } n = m^1 + m^2 - m_{\Gamma \setminus \partial\Gamma}^2 \\ \mathbf{r}^0 &= \mathbf{b} - M\mathbf{x}^0 \\ \mathbf{z}^0 &= P^{-1}\mathbf{r}^0 \quad \text{with } P = \text{diag}(M) \\ \mathbf{d}^0 &= \mathbf{z}^0\end{aligned}$$

2. Iterate $k = 1, 2, \dots$ until convergence

$$\begin{aligned}\alpha^k &= (\mathbf{z}^k, \mathbf{r}^k) / (M\mathbf{d}^k, \mathbf{d}^k) \\ \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{d}^k \\ \mathbf{r}^{k+1} &= \mathbf{r}^k - \alpha^k M\mathbf{d}^k \\ \mathbf{z}^{k+1} &= P^{-1}\mathbf{r}^{k+1} \\ \beta^{k+1} &= (\mathbf{z}^{k+1}, \mathbf{r}^{k+1}) / (\mathbf{z}^k, \mathbf{r}^k) \\ \mathbf{d}^{k+1} &= \mathbf{z}^{k+1} + \beta^{k+1} \mathbf{d}^k\end{aligned}$$

We have to remark that, while setting the profile of the new matrix M , full space was given to those blocs which result from the multiplication per Q^T of blocs in the local matrices S^1 and S^2 . This can be reasonable with non-matching grids, since Q is a rectangular full matrix, but not with matching ones, being $Q = Id$. Note that having considered local matrix blocs multiplied by Q^T as full ones means that the unknowns associated to edges lying on ? from the master part are coupled with *all* the unknowns from the slave part even though this is not true (this phenomenon typically occurs with integral methods).

Nevertheless, both in two and three dimensions, it may happen that when two edges/triangles are in contact for one extremity (the intersection area has zero measure), the corresponding element in Q is very little but not zero. As a possible solution, we may adopt a “filter” to reduce the memory storage requirements for $\tilde{Q}^T S \tilde{Q}$ (see Figure 17 to compare the profile of the assembled matrix M whether the filtering process is adopted (left) or not (right)).

On the other hand, a filtering process can slow down the whole algorithm and lead to additional computational errors. A more sensitive gain in the memory storage requirements can be attained by NOT assembling the final matrix thanks also to the mortar method philosophy.

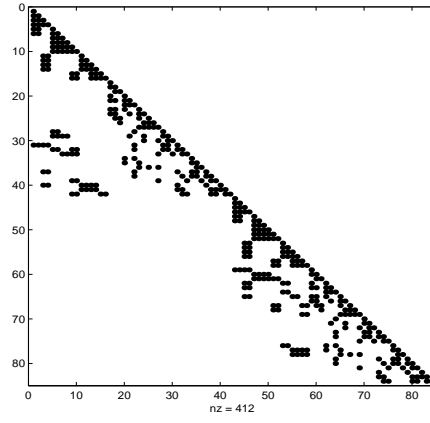


Figure 16: Inferiour triangular part of the block matrix S before the coupling at the mortar interface.

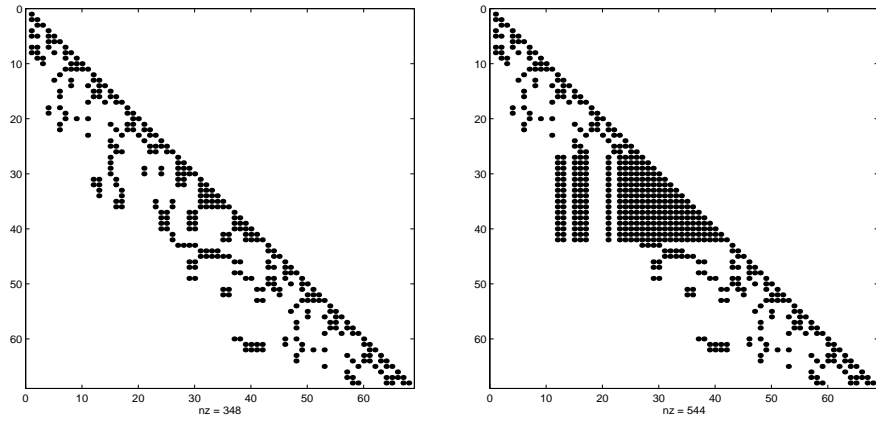


Figure 17: Inferiour triangular part of the final assembled matrix $\tilde{Q}^T S \tilde{Q}$ filtering (left) or not (right) the “almost zero” elements (i.e. of the order of 10^{-9}) of the matrix Q (conforming case).

Non-assembled matrix inversion algorithm – In this case, we have to work with the “objects” Q , S^i ($i = 1, 2$) separately. For a vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ with $n = m^1 + m^2 - m_{\Gamma \setminus \partial\Gamma}^2$, the matrix-vector product $\tilde{Q}^T S \tilde{Q} \mathbf{v}$ can be done in three sequential steps:

(step₁) we compute $\mathbf{q} = \tilde{Q} \mathbf{v}$ with $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ with $m = m^1 + m^2$;

(step₂) we compute $\mathbf{p} = S \mathbf{q}$ separately in each sub-domain, i.e. $\mathbf{p}^i = S^i \mathbf{q}^i$ for $i = 1, 2$;

(step₃) we compute $\mathbf{w} = \tilde{Q}^T \mathbf{p}$ with $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$.

In this three-step product, the most expensive step is the second one due to the size of the sub-domain matrices; the products involving the coupling matrix are not expensive at all (the number of edges, and consequently of the unknowns, on Γ is inferior to that in the adjacent volume). The CG algorithm is similar to the previous one but the matrix-vector products (denoted by an asterisc) have to be done as explained.

1. Initialize

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^0 &\in \mathbb{R}^n \quad \text{with } n = m^1 + m^2 - m_{\Gamma \setminus \partial\Gamma}^2 \\ \mathbf{r}^0 &= \tilde{Q}^T \mathbf{b} - \tilde{Q}^T S \tilde{Q} \mathbf{x}^0 \quad (*) \\ \mathbf{z}^0 &= P^{-1} \mathbf{r}^0 \quad \text{with } P = \text{diag}(\tilde{Q}^T S \tilde{Q}) \\ \mathbf{d}^0 &= \mathbf{z}^0 \end{aligned}$$

2. Iterate $k = 1, 2, \dots$ until convergence

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^k &= \tilde{Q}^T S \tilde{Q} \mathbf{d}^k \quad (*) \\ \alpha^k &= (\mathbf{z}^k, \mathbf{r}^k) / (\mathbf{v}^k, \mathbf{d}^k) \\ \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{d}^k \\ \mathbf{z}^{k+1} &= P^{-1} \mathbf{r}^{k+1} \\ \mathbf{w}^k &= \tilde{Q}^T S \tilde{Q} \mathbf{d}^k \quad (*) \\ \mathbf{r}^{k+1} &= \mathbf{r}^k - \alpha^k \mathbf{w}^k \\ \beta^{k+1} &= (\mathbf{z}^{k+1}, \mathbf{r}^{k+1}) / (\mathbf{z}^k, \mathbf{r}^k) \\ \mathbf{d}^{k+1} &= \mathbf{z}^{k+1} + \beta^{k+1} \mathbf{d}^k \end{aligned}$$

With such a kind of procedure, we do not need to assemble the final matrix and we work with “objects” already present in the code.

For what concerns the preconditioner P , the only very new diagonal elements of $\tilde{Q}^T S \tilde{Q}$ are those contained in the local matrix block multiplied by Q^T and can be easily determined.

References

- [1] R. Albanese, G. Rubinacci, *Magnetostatic field computations in terms of two-component vector potentials*, Int. J. for Num. Meth. in Engineering, 29, 515-532, (1990).
- [2] A. Ben Abdallah, F. Ben Belgacem and Y. Maday, *Mortaring the two-dimensional "Nédélec" finite elements for the discretization of the Maxwell equations*, technical report of the Laboratoire d'Analyse Numérique (Université de Paris VI), (1998).
- [3] F. Ben Belgacem, A. Buffa and Y. Maday, *The mortar element method for 3D Maxwell equations: first results*, technical report of the Laboratoire d'Analyse Numérique (Université de Paris VI), (submitted to SIAM J. Numer. Anal.), (1999).
- [4] F. Ben Belgacem, Y. Maday, *A Spectral Element Methodology Tuned to Parallel Implementations*, Comp. Methods Applied Mech. and Eng., 116, 59-67, (1994).
- [5] A. Bossavit, Computational Electromagnetism: Variational Formulations, Complementarity, Edge Elements, 1st ed., Academic Press, (1988).
- [6] A. Bossavit, *Edge elements for magnetostatics*, Int. J. Num. Meth., 9, 19-34, (1996).
- [7] A. Buffa, Y. Maday and F. Rapetti, *A sliding mesh-mortar method for a two-dimensional eddy currents model of electric engines*, technical report of the Laboratoire d'Analyse Numérique (Université de Paris VI), No. R99002 (submitted to M²AN), (1999).
- [8] A. Buffa, Y. Maday and F. Rapetti, *The Mortar Element Method for 3D Maxwell's equations: analysis and application to electric engines*, 12th International Conference on Domain Decomposition, Chiba, Japan (1999).
- [9] L. Cazebeau, C. Lacour, Y. Maday, *Numerical quadratures and mortar methods*, Computational Science for the 21st Century, John Wiley & Sons, 119-128, (1997).
- [10] P. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, Amsterdam, (1978).
- [11] J.L. Coulomb, *Finite element three dimensional magnetic field computation*, IEEE Trans. Mag., 17, 3241-3246, (1981).
- [12] B. Davat, Z. Ren and M. Lajoie-Mazenc, *The movement in field modeling*, IEEE Trans. Mag., 21, 2296-2298, (1985).
- [13] C.R.I. Emson, C.P. Riley, D.A. Walsh, K. Ueda and T. Kumano, *Modelling eddy currents induced in rotating systems*, IEEE Trans. Mag., 34, 2593-2596, (1998).
- [14] C. Golovanov, J.-L. Coulomb, Y. Marechal and G. Meunier, *3D mesh connection techniques applied to movement simulation*, IEEE Trans. Mag., 34, 3359-3362, (1998).
- [15] A. Konrad, *The zero divergence constraint in 3D vector finite element methods*, COMPEL, 9, Suppl.A, 7-16.
- [16] Y. Maday, C. Bernardi and A. Patera, *A new nonconforming approach to domain decomposition: The mortar elements method*, in Nonlinear partial differential equations and their applications, H. Brezis and J. Lions, eds., Pitman, 13-51, (1994).

- [17] Y. Marechal, G. Meunier, J.L. Coulomb and H. Magnin, *A general purpose tool for restoring inter-element continuity*, IEEE Trans. Mag., 28, 1728-1731, (1992).
- [18] J. C. Nédélec, *Mixed finite elements in \mathbb{R}^3* , Numer. Math., 35, 315-341, (1980).
- [19] J. C. Nédélec, *A new family of mixed finite elements in \mathbb{R}^3* , Numer. Math., 35, 57-81, (1986).
- [20] A. Nicolet, F. Delincé, A. Genon and W. Legros, *Finite elements - boundary elements coupling for the movement modeling in two dimensional structures*, J. de Phys.III, 2, 2035-2044, (1992).
- [21] F. Rapetti, L. Santandrea, F. Bouillault and A. Razek, *Calculation of eddy currents in moving structures using a finite element method on non-matching grids*, COMPEL, 19, 1, 10-29, (2000).
- [22] F. Rapetti, *The mortar edge element method on non-matching grids for eddy current calculations in moving structures*, submitted to Int. J. Num. Meth., (1999).
- [23] A. Razek, J. Coulomb, M. Felliachi and J. Sobonnadière, *Conception of an air-gap element for dynamic analysis of the electromagnetic fields in electric machines*, IEEE Trans. Mag., 18, 655-659, (1982).
- [24] Z. Ren, *Influence of the R.H.S. on the convergence behaviour of the curl-curl equation*, IEEE Trans. Mag., 32, 3, 1647-1650, (1996).
- [25] D. Rodger, H.C. Lai and P.J. Leonard, *Coupled elements for problems involving movement*, IEEE Trans. Mag., 26, 548-550, (1990).
- [26] I.J. Tsukerman, *Overlapping finite elements for problems with movement*, IEEE Trans. Mag., 28, 2247-2249, (1992).

Chapitre 8

Vers le parallélisme

Dans le chapitre précédent, nous avons décrit l'application de la méthode des éléments joints en trois dimensions spatiales.

En présence d'une structure périodique et d'un matériau homogène, les résultats numériques peuvent être obtenus sur une portion (périodique) du domaine entier: ceci nous permet de limiter le nombre d'inconnues du problème et de gagner soit en temps de calcul que en espace mémoire.

Dans le cas général, en absence de toute symétrie et homogénéité, nous sommes forcés de travailler avec la structure complète. La taille importante des systèmes à résoudre et des informations à mémoriser conduit de façon naturelle à s'intéresser aux ordinateurs à mémoire distribuée.

Une autre question qui se pose est le choix de l'algorithme d'inversion du système final [50, 70, 105]. Les méthodes *directes* sont robustes et permettent d'obtenir la solution *exacte* du système avec un nombre d'opérations et un temps de calcul *finis* (en absence des erreurs de arrondi). Cependant, dû à la quantité de mémoire utilisée, les méthodes directes ne sont pas applicables pour inverser des matrices de grande taille comme celles des systèmes linéaires qu'on obtient par discrétisation d'un problème en trois dimensions à l'aide d'une méthode aux éléments finis. Dans ce cas, nous préférons souvent des méthodes *itératives* qui permettent d'obtenir, quand elles convergent, la solution du système par *approximations successives*. Ces méthodes ont des avantages par rapport aux méthodes directes: elles exploitent efficacement le caractère creux de la matrice en réduisant l'espace mémoire utilisé (le phénomène de remplissage est réduit de façon importante), elle permettent, avec le test d'arrêt, de contrôler la précision du calcul de la solution (qui peut être important en présence d'un problème non linéaire) et la mise en œuvre d'une leur version parallèle est plus faisable que pour des méthodes directes.

Il faut tenir compte du fait que nous ne connaissons pas "a-priori" le temps nécessaire à la convergence de l'algorithme itératif (pour certaines méthodes, l'analyse théorique nous

fournit des estimations sur des cas académiques et qui, dans la réalité, ne sont que de peu d'usage); de plus, la vitesse de convergence est liée au nombre de conditionnement de la matrice du système. En général, la matrice K du système algébrique $K\mathbf{U} = \mathbf{F}$ provenant de la discrétisation d'une équation différentielle aux dérivées partielles par la méthode des éléments finis est mal conditionnée, c'est-à-dire son nombre de conditionnement $k(K) \gg 1$: il est en effet fonction de $1/h$ où h est la taille des éléments du maillage. Le nombre de conditionnement $k(K)$ est sensible, de plus, à la distorsion des éléments et à variations importantes des coefficients de la matrice d'un élément à l'autre. Si d'un côté le système algébrique ne peut pas être résolu par une méthode directe dû à sa dimension importante, une méthode itérative ne converge pas rapidement dû au conditionnement mauvais de la matrice. Une solution possible est le préconditionnement du système algébrique, c'est-à-dire trouver une matrice M telle que $k(M^{-1}K) \ll k(K)$, avec M^{-1} facilement calculable et $k(M^{-1}K) \approx 1$. Le système à résoudre devient $M^{-1}K\mathbf{U} = M^{-1}\mathbf{F}$.

Un préconditionneur M peut être défini comme *optimal* si $k(M^{-1}K)$ dépend "faiblement" du paramètre h de discrétisation spatiale. En général, une dépendance de la forme $O((1 + \log(\frac{1}{h}))^\alpha)$, avec α "petit", est considérée faible. Les techniques de décomposition de domaine permettent de définir de tels préconditionneurs.

Les méthodes de sous-domaine (voir [106]) connaissent actuellement un bon succès car elles permettent de définir des algorithmes de résolution utilisant efficacement les architectures parallèles des calculateurs scientifiques. En effet, ces méthodes sont toutes basées sur la résolution itérative, où chaque itération consiste principalement à calculer les solutions de problèmes indépendants sur les différentes sous-structures. La résolution en parallèle de ces problèmes locaux conduit à un parallélisme de forte granularité, c'est-à-dire avec des tâches effectuant un nombre d'opérations d'un ordre de grandeur supérieur à la quantité de données à récupérer en entrée ou en sortie de ces tâches.

La plus ancienne et la plus connue de ces méthodes est l'algorithme de Schwarz [92]. Cependant, cette méthode fait intervenir des sous-domaine recouvrant, ce qui implique des calculs redondants sur les zones de recouvrement, et réduit le parallélisme intrinsèque de la méthode [93]. Par ailleurs, il a été démontré que cette méthode pouvait s'interpréter comme une résolution par l'algorithme de Gauss-Seidel d'un problème condensé sur les interfaces entre les différents sous-domaines, alors que d'autres méthodes de sous-domaines permettent d'utiliser un algorithme de type gradient conjugué préconditionné pour résoudre le même problème [21]. Actuellement, la méthode de Schwarz est plutôt utilisée pour construire des préconditionneurs [57]. Une autre technique classique est la méthode du complément de Schur [106].

L'efficacité d'un algorithme parallèle est liée à deux aspects: (1) l'équi-répartition des données et des opérations entre les différents processeurs, (2) la minimisation des échanges entre les processeurs. Si une des deux "conditions" n'est pas respectée, l'utilisation du calcul parallèle risque de ne pas faire gagner autant de temps qu'on souhaiterait.

En ce qui concerne la décomposition du maillage entre les différents processeurs, ils existent des partitionneurs automatiques (citons comme exemple METIS¹) qui distribuent le même nombre d'éléments aux processeurs et minimisent le nombre d'éléments adjacents assignés aux différents processeurs. Pour ce qui concerne la équi-distribution des opérations entre les processeurs, cela dépend beaucoup de l'expérience du programmeur.

L'article présenté dans ce chapitre, contient la description et la validation numérique d'une technique de préconditionnement du système algébrique dérivant de l'approximation des équations de Maxwell en deux dimensions par une méthode de décomposition de domaine de type FETI combinée avec les éléments d'arête sur maillage non-conformes. Ce travail a été accompli en prévision d'appliquer la même technique en trois dimensions.

8.1 Introduction

Dans l'article qui va suivre, nous considérons le problème suivant:

$$\begin{aligned} L\mathbf{u} &:= \operatorname{rot} (a \operatorname{rot} \mathbf{u}) + A \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (8.1)$$

avec Ω un domaine polygonal borné dans \mathbb{R}^2 et $\boldsymbol{\tau}$ le vecteur unitaire tangent à $\partial\Omega$. Dans le Chapitre 3, nous avons défini $\operatorname{rot} v$ par la relation (3.2) et $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ par la relation (3.3). La matrice A est symétrique, uniformément définie positive avec $A_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ ($1 \leq i, j \leq 2$) et $a \in L^\infty(\Omega)$ est une fonction strictement positive.

Nous voulons maintenant écrire le problème (8.1) en forme variationnelle pour pouvoir dans la suite le discrétiser avec les éléments finis d'arête. Nous introduisons l'espace de Hilbert $H(\operatorname{rot}, \Omega)$ défini dans le Chapitre 3 pour l'opérateur (3.2) et $H_0(\operatorname{rot}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in H(\operatorname{rot}, \Omega) \mid \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$. Nous rappelons que pour un vecteur $\mathbf{u} \in H(\operatorname{rot}, \Omega)$, la trace tangentielle $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Pour chaque $D \subset \Omega$, nous définissons la forme bilinéaire

$$a_D(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_D (a \operatorname{rot} \mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{v} + A \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) d\Omega \quad , \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H(\operatorname{rot}, \Omega). \quad (8.2)$$

La formulation variationnelle du problème (8.1) est la suivante: trouver $\mathbf{u} \in H_0(\operatorname{rot}, \Omega)$ tel que

$$a_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad , \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\operatorname{rot}, \Omega). \quad (8.3)$$

Si maintenant, nous approximations le problème (8.3) par la méthode des éléments finis d'arête, et reformulons le problème discret en forme matricielle, le système algébrique final a la structure suivante

$$K\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (8.4)$$

¹<http://www-users.cs.umn.edu/~karypis/software/index.htm>

avec K la matrice de raideur, \mathbf{F} le vecteur lié au second membre du problème (8.1) et \mathbf{U} le vecteur inconnu ayant pour composantes les circulations du vecteur \mathbf{u} le long des arêtes du maillage.

8.2 Deux sous-domaines: formulation avec multiplieurs de Lagrange

Appliquons la méthode des joints au problème (8.1): nous supposons que le domaine Ω est divisé en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 sans recouvrement et notons $\Gamma := \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}$ l'interface entre Ω_1 et Ω_2 . Nous indiquons par \mathbf{u}_i la restriction à Ω_i de la fonction \mathbf{u} ($i=1,2$); le problème (8.1) peut être reformulé de façon équivalente comme suit:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & L\mathbf{u}_1 = \mathbf{f}_1 && \text{dans } \Omega_1, \\
(2) \quad & \mathbf{u}_1 \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 && \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega, \\
(3) \quad & \mathbf{u}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma = \mathbf{u}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma && \text{sur } \Gamma, \\
(4) \quad & a \operatorname{rot} \mathbf{u}_1 = a \operatorname{rot} \mathbf{u}_2 && \text{sur } \Gamma, \\
(5) \quad & \mathbf{u}_2 \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 && \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega, \\
(6) \quad & L\mathbf{u}_2 = \mathbf{f}_2 && \text{dans } \Omega_2.
\end{aligned} \tag{8.5}$$

Les équation (8.5)(3) et (4) sont les conditions de transmissions pour \mathbf{u} à travers Γ (voir le Chapitre 5).

Pour écrire le problème (8.5) en forme variationnelle, nous introduisons l'espace

$$X = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \mathbf{u}_i \in H(\operatorname{rot}, \Omega_i), (\mathbf{u}_i \cdot \boldsymbol{\tau})|_{\partial\Omega_i \cap \partial\Omega} = 0, i = 1, 2\}.$$

L'ensemble X est un espace de Hilbert pour la norme $\|\mathbf{u}\|_* := (\sum_{i=1}^2 \|\mathbf{u}_i\|_{\operatorname{rot}, \Omega_i}^2)^{1/2}$. L'espace $H_0(\operatorname{rot}, \Omega)$ peut être défini à travers l'espace X comme suit:

$$H_0(\operatorname{rot}, \Omega) \equiv \{\mathbf{u} \in X \mid \forall \boldsymbol{\psi} \in (H^1(\Omega))^2, \sum_{i=1}^2 \langle \mathbf{u}_i \cdot \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\psi} \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \partial\Omega_i} = 0\} \tag{8.6}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \partial\Omega_i}$ est le produit de dualité entre $(H^{-1/2}(\partial\Omega_i))^2$ et $(H^{1/2}(\partial\Omega_i))^2$. La contrainte dans (8.6) peut s'exprimer de façon équivalente comme suit

$$\mathbf{u}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma = \mathbf{u}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma \quad , \quad \text{dans } (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))'. \tag{8.7}$$

Nous pouvons écrire la contrainte (8.7) de continuité de la composante tangentielle du vecteur \mathbf{u} à travers Γ en forme faible comme dans la suite:

$$\langle \mathbf{u}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma - \mathbf{u}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma, \mu \rangle_\Gamma = 0 \quad , \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{8.8}$$

Introduisons la forme bilinéaire continue $b(.,.)$ définie sur $X \times (H^{-1/2}(\Gamma))^2$ par:

$$b(\mathbf{v}, \mu) = \langle \mathbf{v}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma - \mathbf{v}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma, \mu \rangle_\Gamma. \quad (8.9)$$

La forme variationnelle, connue comme formulation mixte ou hybride, du problème (8.5) est la suivante:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega + b(\mathbf{v}, \lambda) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in X, \\ b(\mathbf{u}, \mu) &= 0, \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Les résultats classiques sur les formulations mixtes nous montrent que le problème hybride (8.10) a une solution unique sous les conditions suivantes (voir [67]):

- (1) la forme bilinéaire symétrique, définie positive $a(.,.)_\Omega$ est elliptique sur l'espace des fonctions X telles que $b(\mathbf{v}, \mu) = 0$ pour tout $\mu \in H^{-1/2}(\Gamma)$;
- (2) la forme bilinéaire satisfait la condition “inf-sup”

$$\inf_{\{\mu|_{H^{-1/2}(\Gamma)}=1\}} \sup_{\{\mathbf{v}|_X=1\}} b(\mathbf{v}, \mu) = C > 0.$$

La condition (1) est satisfaite due aux hypothèses sur a et A et la condition (2) aussi puisque l'espace fonctionnel dans lequel on a défini les multiplicateurs de Lagrange est précisément l'espace dual des traces sur Γ des fonctions dans X .

La vérification de la coercivité de la forme bilinéaire $a(.,.)_\Omega$ ainsi que de la condition “inf-sup” est directe dans le cadre du problème continu. Il faut savoir que dans le cadre des formulations discrètes, l'espace approché X_h des champs $\mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_{1h}, \mathbf{v}_{2h})$ avec le saut des composantes tangentielles faiblement nul à l'interface Γ ne sera plus contenu dans $H_0(\text{rot}, \Omega)$, et que la vérification des conditions (1) et (2) sera moins triviale (voir [67]).

Il faut observer cependant que nous considérons un problème mixte particulier dans lequel le second membre de la deuxième équation du système (8.10) est toujours zéro. Même si nous pouvons donner une signification physique au multiplicateur de Lagrange, il n'est pas évident de voir que l'introduction de cette nouvelle inconnue conduise à un problème bien posé quand l'on ajoute aux équations locales la forme faible de la contrainte de continuité des composantes tangentielles des champs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ sur Γ . Ceci ne gêne pourtant en rien l'existence, l'unicité et l'optimalité de l'approximation de la quantité qui nous intéresse ici c'est-à-dire le champ \mathbf{u} .

8.3 Discrétisation de la formulation avec multiplicateurs de Lagrange

En discrétisant la formulation hybride (8.10) à l'aide des éléments finis d'arête de la première famille, on obtient le système linéaire suivant, dans lequel on a pris les mêmes

notations pour les champs discrets que celles utilisées avant pour les champs continus:

$$\begin{aligned} K\mathbf{U} + B^T\lambda &= \mathbf{F} \\ B\mathbf{U} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (8.11)$$

où K est la matrice de raideur, diagonale par blocs, associée aux problèmes discrétisés sur Ω_1 et Ω_2 avec conditions aux limites de type Neumann sur Γ . Elle est inversible puisque $A \neq 0$. La matrice B est associée à la forme discrète de $b(.,.)$. Le problème qui se pose est celui du choix de l'espace d'interpolation pour les champs λ . La vérification de la condition "inf-sup" nécessite que l'on ne prenne pas un espace de multiplicateurs trop riche. Mais moins l'espace est riche et moins la relation $B\mathbf{U} = \mathbf{0}$ assure la continuité de la composante tangentielle des champs discrets. Avec la méthode des joints, nous avons vu dans le Chapitre 5 quels sont les espaces de multiplicateurs de Lagrange proposés pour les différents problèmes: dans ce cas, l'espace est composé par les traces tangentielles sur Γ des champs définis sur Ω_1 (ou, de façon équivalente, sur Ω_2).

L'expression $B\mathbf{U}$ peut s'écrire comme $C_1\mathbf{U}_1 - C_2\mathbf{U}_2$ avec C_1 et C_2 les matrices avec les éléments donnés par

$$\begin{aligned} C_1(i, j) &= \int_{\Gamma} (\mathbf{w}_i^1 \cdot \boldsymbol{\tau}_{\Gamma}) (\mathbf{w}_j^1 \cdot \boldsymbol{\tau}_{\Gamma}) d\Gamma, \quad \forall i, j \mid a_i, a_j \in \Gamma \cap \partial\Omega_1, \\ C_2(i, j) &= \int_{\Gamma} (\mathbf{w}_i^2 \cdot \boldsymbol{\tau}_{\Gamma}) (\mathbf{w}_j^1 \cdot \boldsymbol{\tau}_{\Gamma}) d\Gamma, \quad \forall i, j \mid a_i \in \Gamma \cap \partial\Omega_2, a_j \in \Gamma \cap \partial\Omega_1, \end{aligned}$$

où \mathbf{w} sont les fonctions de base des éléments d'arête et a_i indiquent les arêtes du maillage. Pour des maillages de Ω_1 et Ω_2 *conformes* sur l'interface Γ , la matrice B a les éléments dans l'ensemble des valeurs $\{0, 1, -1\}$; pour des maillages *non-conformes*, les éléments de la matrice B ont des valeurs qui dépendent de intersections entre les arêtes sur Γ des deux côtes. Nous rappelons que si l'on travaille dans un espace X contraint, comme nous avons fait dans les chapitres précédents, les matrices C_1 et C_2 sont celles qui nous permettent de définir la matrice de couplage $Q = C_1^{-1}C_2$.

8.4 Deux méthodes pour la résolution du problème discret

Nous rappelons deux méthodes classiques pour la résolution du problème discret dans le cas où les maillages des sous-domaines sont conformes aux interfaces communes. Avant de présenter les deux méthodes, nous introduisons quelque notations. Si on numérote en premier les inconnues associées aux arêtes internes de chaque sous-domaine et en dernier celles sur les interfaces, les matrices de raideur locales dans chaque sous-domaine peuvent s'écrire sous la forme:

$$K_1 = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{1\Gamma} \\ K_{\Gamma 1} & K_{\Gamma\Gamma}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} K_{22} & K_{2\Gamma} \\ K_{\Gamma 2} & K_{\Gamma\Gamma}^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (8.12)$$

Les matrices K_1 et K_2 sont inversibles dû au fait que dans (8.1) nous avons $A \neq 0$.

8.4.1 La méthode primale ou du complément de Schur

Si on additionne les équations du système (8.4), nous avons:

$$\begin{pmatrix} K_{11} & 0 & K_{1\Gamma} \\ 0 & K_{22} & K_{2\Gamma} \\ K_{\Gamma 1} & K_{\Gamma 2} & K_{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_\Gamma \end{pmatrix}$$

avec notations intuitives. Dans les matrices K_1 et K_2 nous avons que $K_{\Gamma i} = K_{i\Gamma}^T$ ($i=1,2$) et les blocs diagonaux K_{ii} sont symétriques positifs et nécessairement définis puisqu'ils sont respectivement associés aux problème (8.1) avec conditions de Dirichlet sur $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega$. Nous pouvons donc faire une élimination de Gauss par blocs des inconnues associées aux degrés de liberté internes aux deux ouverts: ceci correspond à la résolution d'un problème de Dirichlet à l'intérieur de chaque sous-domaine. Nous sommes donc ramené à un système condensé sur l'interface:

$$S \mathbf{U}_\Gamma = \mathbf{b}_\Gamma \quad (8.13)$$

où

$$S = K_{\Gamma\Gamma} - K_{\Gamma 1} K_{11}^{-1} K_{1\Gamma} - K_{\Gamma 2} K_{22}^{-1} K_{2\Gamma} \quad , \quad \mathbf{b}_\Gamma = \mathbf{F}_\Gamma - K_{\Gamma 1} K_{11}^{-1} \mathbf{F}_1 - K_{\Gamma 2} K_{22}^{-1} \mathbf{F}_2 .$$

La matrice condensée S est appelée *matrice du complément de Schur* de la matrice K (voir [21]): elle représente la forme discrète de l'opérateur de Steklov-Poincaré (voir le Chapitre 6 de l'ouvrage [105]). Cette matrice est symétrique et définie positive; elle est dense et son calcul est coûteux puisqu'il nécessiterait d'inverser un système linéaire dans chacun des sous-domaines pour chaque degré de liberté sur l'interface. Cependant on peut résoudre le système linéaire (8.13) par la méthode de Gradient Conjugué sans calculer explicitement la matrice; un tel algorithme présente un grand intérêt du point de vue du parallélisme (voir [123]).

La matrice K peut être diagonalisée en faisant intervenir la matrice S comme le prouve l'égalité matricielle suivante:

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -K_{\Gamma 1} K_{11}^{-1} & -K_{\Gamma 2} K_{22}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{11} & 0 & K_{1\Gamma} \\ 0 & K_{22} & K_{2\Gamma} \\ K_{\Gamma 1} & K_{\Gamma 2} & K_{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & -K_{11}^{-1} K_{1\Gamma} \\ 0 & I & -K_{22}^{-1} K_{2\Gamma} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix} .$$

8.4.2 La méthode duale

Dans le cas où K est inversible, l'inversion des matrices K_1 et K_2 permet d'éliminer les inconnues \mathbf{U}_1 et \mathbf{U}_2 dans le système (8.11) et de transformer ce dernier en une équation en λ seulement. Dans le cas de deux sous-domaines, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_1 &= K_1^{-1}(\mathbf{F}_1 - B_1^T \lambda) \\ \mathbf{U}_2 &= K_2^{-1}(\mathbf{F}_2 + B_2^T \lambda),\end{aligned}$$

où B_i ($i=1,2$) est la matrice de restriction à l'interface de la matrice B , c'est-à-dire la matrice de correspondance entre les degrés de liberté sur l'interface et ceux du multiplicateur de Lagrange. Si on élimine \mathbf{U}_1 et \mathbf{U}_2 dans le système (8.11), on voit que λ satisfait l'équation suivante,

$$(B_1 K_1^{-1} B_1^T + B_2 K_2^{-1} B_2^T) \lambda = B_1 K_1^{-1} \mathbf{F}_1 + B_2 K_2^{-1} \mathbf{F}_2$$

aussi appelé problème dual. Le système (8.11) est équivalent au système linéaire dual suivant:

$$D \lambda = \mathbf{b} \tag{8.14}$$

avec

$$D = \sum_{i=1}^2 B_i K_i^{-1} B_i^T \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \sum_{i=1}^2 B_i K_i^{-1} \mathbf{F}_i.$$

Si les matrices K_1 et K_2 sont inversibles, on peut démontrer que la matrice D est symétrique et définie positive. Le système (8.14) ainsi obtenu peut donc être résolu par la méthode du Gradient Conjugué: dans cet algorithme, nous n'avons pas besoin de calculer la matrice D explicitement mais nous devons seulement calculer le produit de cette matrice par un vecteur, opération qui peut se faire aisément en trois étapes. Une fois obtenu le multiplicateur de Lagrange, la solution des systèmes locaux est donnée par une inversion locale sur chaque sous-domaine.

Contrairement à ce qui se passe avec la méthode du complément de Shur, dû à la nature faible de la condition de continuité, une interface entre sous-domaines n'est à prendre en compte que si sa mesure est non nulle, c'est-à-dire si elle coïncide avec une arête commune en deux dimensions ou une face commune en trois dimensions.

8.5 La méthode FETI

La méthode FETI ("Finite Element Tearing and Interconnecting") est une technique de résolution itérative qui se base sur l'utilisation de la méthode duale. Elle a été introduite par Farhat et Roux dans [61] et détaillée dans [62]. Utilisée pour résoudre des équations

avec des opérateurs elliptiques dans H^1 , auto-adjoints et du deuxième ordre, elle a été appliquée à plusieurs autres problèmes (par exemple, pour résoudre problèmes dans le temps, avec plaques, en présence de matériaux composites, etc). La méthode FETI a été introduite pour des approximations conformes avec des éléments finis et elle est basée sur une décomposition sans recouvrement du domaine de calcul Ω à l'aide d'un ensemble fini de sous-domaines. La continuité des fonctions à travers les interfaces entre sous-domaines adjacents est imposée à l'aide de multiplicateurs de Lagrange. La résolution du problème est accomplie en trois pas:

pas₁: on élimine d'abord les inconnues associées aux degrés de liberté internes aux sous-domaines;

pas₂: on résout le problème dual exprimé en termes des multiplicateurs de Lagrange à travers un Gradient Conjugué Projeté (PCG);

pas₃: on obtient les valeurs des inconnues primales en résolvant un problème local dans chaque sous-domaine.

Farhat, Mandel et Roux [63] ont démontré que l'application d'un certain opérateur de projection dans le PCG a un rôle similaire à la résolution d'un problème grossier pour d'autres algorithmes de décomposition de domaine, et que certaines versions de l'algorithme FETI sont échelonnables par rapport à la dimension du problème et au nombre de sous-domaines. Mandel et Tezaur [94] ont montré que l'algorithme FETI avec préconditionnement du type Dirichlet, porte à résoudre des systèmes où la matrice a un nombre de conditionnement proportionnel à $(1 + \log(H/h))^3$ (H et h sont liés respectivement au diamètre des sous-domaines et à la taille des éléments du maillage).

Récemment, pour le problème (8.1), Toselli et Klawonn [128] ont analysé la construction d'un problème grossier et les performances de l'algorithme FETI combiné avec le préconditionneur présenté dans [77]. Ils ont montré que la matrice résultante de la discrétisation de (8.1) par des éléments d'arête sur maillages conformes en deux dimensions a un nombre de conditionnement indépendant de sauts des coefficients a et A . De plus, la dépendance du nombre de conditionnement du type $(1 + \log(H/h))^2$ est conservée.

8.6 Deux ingrédients fondamentaux pour FETI plus MORTAR sur maillages non-conformes

Dans l'article [112] qui va suivre, nous présentons un préconditionneur du type FETI pour la matrice du système linéaire obtenu à partir de la discrétisation des équations de Maxwell en deux dimensions par des éléments d'arête du premier ordre sur maillages non-conformes. Dans ce cas, les coefficients a et A n'ont pas de sauts à travers les interfaces entre sous-domaines adjacents. En se basant sur l'analyse de ce type de méthode FETI pour des problèmes différents on peut reconnaître deux ingrédients fondamentaux pour

que la méthode soit échelonnable:

- (a) la construction (similaire à celle contenue dans [128]) d'un espace grossier V_0 sur lequel la résolution exacte sera faite: cet espace n'existe pas naturellement pour le problème considéré;
- (b) la prise en compte dans la construction du préconditionneur du changement de métrique en passant d'un sous-domaine à l'autre (à partir de l'idée présentée dans [86, 87]).

Le premier ingrédient, qui intervient à travers un opérateur de projection P entre l'espace des solutions V et l'espace grossier V_0 , nous permet d'avoir le nombre de conditionnement de la matrice du système préconditionné indépendant du nombre des sous-domaines. Pour l'équation de Poisson ou les problèmes élasto-statiques, les matrices locales K_i sont en général singulières, avec un noyau qui contient, respectivement, les constantes ou les déplacements rigides. Par conséquent, nous avons à résoudre des problèmes locaux afin d'obtenir les composantes de la solution orthogonales au noyau de la matrice et on choisit $V_0 \equiv \text{noyau}$. Pour l'équation (8.1), les problèmes locaux ne sont pas singuliers: il n'y a donc pas d'espace grossier V_0 naturellement associé aux sous-domaines et il faut le construire explicitement par un choix approprié.

Le deuxième ingrédient, qui intervient à travers une matrice de préconditionnement M , nous permet de prendre en compte le changement de métrique dû au fait que chaque sous-domaine est maillé de façon indépendante par rapport aux autres sous-domaines; de plus, il permet de retrouver en non-conforme les bonnes optimalités de convergence observées dans le cas conforme.

Les deux outils (opérateur de projection et matrice de préconditionnement) sont utilisés dans la procédure itérative du Gradient Conjugué comme on va l'indiquer dans la suite.

Algorithme itératif du Gradient Conjugué Projeté et Préconditionné

Soit V l'espace où l'on cherche la solution \mathbf{U} du système $K\mathbf{U} = \mathbf{F}$. Si on écrit $V = V_0 \oplus V_0^\perp$, la résolution du système précédent est équivalente à trouver $\mathbf{U} \in \mathbf{U}^0 + V_0^\perp$ tel que

$$PMP^TK\mathbf{U} = PMP^T\mathbf{F}$$

où

- $P = Id - P_0$ avec P_0 la projection orthogonale par rapport au produit scalaire induit par K sur l'espace grossier V_0 associé aux sous-domaines;

- $M = \sum_{i=1}^2 M_i$ est un préconditionneur où chaque matrice M_i comporte la résolution d'un problème local dans le sous-domaine Ω_i ;
- $\mathbf{U}^0 = P_0 \mathbf{U}$ est la composante de \mathbf{U} dans V_0 .

La projection P assure que le nombre de conditionnement de la matrice finale dépend faiblement de H et le preconditionneur M assure que la dépendance en h est faible. L'algorithme du *Gradient Conjugué Projeté et Préconditionné* (PPCG) que nous avons considéré est le suivant:

1. Initialisation

Trouver \mathbf{U}^0
 $\mathbf{r}^0 = \mathbf{F} - K\mathbf{U}^0$

2. Pour $k = 1, 2, \dots$, il faut itérer jusqu'à convergence

Projection: $\mathbf{w}^{k-1} = P^T \mathbf{r}^{k-1}$
 Préconditionnement: $\mathbf{z}^{k-1} = M^{-1} \mathbf{w}^{k-1}$
 Projection: $\mathbf{y}^{k-1} = P \mathbf{z}^{k-1}$

$\beta^k = \langle \mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{w}^{k-1} \rangle / \langle \mathbf{y}^{k-2}, \mathbf{w}^{k-2} \rangle \quad [\beta^1 = 0]$
 $\mathbf{p}^k = \mathbf{y}^{k-1} + \beta^k \mathbf{p}^{k-1} \quad [\mathbf{p}^1 = \mathbf{y}^0]$
 $\alpha^k = \langle \mathbf{y}^{k-1}, \mathbf{w}^{k-1} \rangle / \langle \mathbf{p}^k, K \mathbf{p}^k \rangle$
 $\lambda^k = \lambda^{k-1} + \alpha^k \mathbf{p}^k$
 $\mathbf{r}^k = \mathbf{r}^{k-1} - \alpha^k K \mathbf{p}^k$

La différence de l'algorithme précédent par rapport à la méthode du Gradient Conjugué classique est que les directions de descentes sont calculées dorénavant à partir de la projection orthogonale du gradient sur l'espace grossier V_0 et non plus seulement à partir du gradient.

Deux quantités sont à choisir: l'espace grossier V_0 et les matrices locales M_i .

Le préconditionneur pour un opérateur elliptique sur H^1 (Laplacien, élasticité)

Dans [123], Roux a analysé le préconditionneur de la méthode FETI dans le cas où les maillages des sous-domaines sont conformes aux interfaces du squelette. Considérons la matrice du complément de Schur étudiée dans la Section 8.4.1 et celle de l'opérateur dual

obtenu par la formulation hybride discrète introduite dans la Section 8.4.2. Chacune de ces deux matrices est construite par assemblage de contributions locales indépendantes les unes des autres associées aux différents sous-domaines.

Considérons un sous-domaine Ω_i ($i=1,2$) et la matrice de raideur correspondante K_i avec structure par blocs définie en (8.12). La contribution du sous-domaine Ω_i à la matrice du complément de Schur s'écrit alors:

$$S^{(i)} = K_{\Gamma\Gamma}^{(i)} - K_{\Gamma i} K_{ii}^{-1} K_{i\Gamma}.$$

Plus précisément, $S^{(i)}$ est la contribution de Ω_i à la matrice du complément de Schur pour les arêtes de l'interface complète qui appartient à la frontière de Ω_i .

On note par B_i la matrice de restriction à l'interface de la matrice B , c'est-à-dire la matrice de correspondance entre les multiplicateurs de Lagrange et les degrés de liberté localisés sur les interfaces du sous-domaine Ω_i .

La contribution du sous-domaine Ω_i à la restriction de l'opérateur dual complet D aux degrés de liberté du multiplicateur de Lagrange associés à ce sous-domaine s'écrit:

$$D^{(i)} = B_i^T K_i^{-1} B_i.$$

Proposition : *Si le noyau de K est vide, alors les contributions du sous-domaine Ω_i à la matrice du complément de Schur et à la matrice de l'opérateur dual sont les inverses l'une de l'autre.*

En effet, si l'hypothèse est vérifiée, chaque degré de liberté de l'interface de Ω_i avec les autres sous-domaines est associé à un degré de liberté et un seul multiplicateur de Lagrange. Si l'on numérote les degrés de liberté localisés sur les arêtes de l'interface dans le même ordre que les degrés de liberté du multiplicateur de Lagrange, la matrice B_i , pour des maillages conformes, a la forme suivante:

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & Id \end{pmatrix},$$

où 0 est une matrice nulle ayant un nombre de colonnes égal au nombre de degrés de liberté internes à Ω_i , et Id est la matrice identité de dimension égale aux nombres de degrés de liberté sur l'interface.

On a donc la relation suivante:

$$D^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii} & K_{i\Gamma} \\ K_{\Gamma i} & K_{\Gamma\Gamma}^{(i)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ Id \end{pmatrix}. \quad (8.15)$$

On considère maintenant la matrice:

$$\begin{pmatrix} C_{ii} \\ C_{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{ii} & K_{i\Gamma} \\ K_{\Gamma i} & K_{\Gamma\Gamma}^{(i)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ Id \end{pmatrix}.$$

Grâce à la définition (8.15) de $D^{(i)}$, nous avons que $D^{(i)} = C_{\Gamma\Gamma}$. De plus, par la définition de C_{ii} et $C_{\Gamma\Gamma}$, on a:

$$\begin{aligned} K_{ii}C_{ii} + K_{i\Gamma}C_{\Gamma\Gamma} &= 0 \\ K_{\Gamma i}C_{ii} + K_{\Gamma\Gamma}^{(i)}C_{\Gamma\Gamma} &= Id. \end{aligned} \tag{8.16}$$

Par élimination de la matrice C_{ii} dans l'équation (8.16), on obtient:

$$-K_{\Gamma i}K_{ii}^{-1}K_{i\Gamma}C_{\Gamma\Gamma} + K_{\Gamma\Gamma}^{(i)}C_{\Gamma\Gamma} = (K_{\Gamma\Gamma}^{(i)} - K_{\Gamma i}K_{ii}^{-1}K_{i\Gamma})C_{\Gamma\Gamma} = Id,$$

d'où

$$D^{(i)} = (S^{(i)})^{-1}, \tag{8.17}$$

comme affirmé dans la Proposition précédente.

Préconditionnement à l'aide des matrices de Schur locales : Une idée naturelle pour trouver un preconditionnement est de remarquer que la matrice duale D est construite à partir des inverses locaux de $S^{(i)}$ et donc de proposer un premier preconditionneur M_1 à partir de $S^{(i)}$:

$$M_1 = \sum_i S^{(i)} = \sum_i B_i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S^{(i)} \end{pmatrix} B_i^T. \tag{8.18}$$

Comme il a été démontré dans [94], le nombre de conditionnement de la matrice PM_1P^TK satisfait

$$k(PM_1P^TK) \leq C \left(1 + \log\left(\frac{H}{h}\right) \right)^3$$

avec la constante C indépendante de H et h . La projection P est ici celle associée à l'espace des modes rigides locaux. D'autre part, les matrices $S^{(i)}$ sont coûteuses à calculer, on cherche ainsi à les simplifier.

Préconditionnement à l'aide des matrices de raideur locales : Grâce à une étude spectrale, Farhat et Roux ont amélioré la convergence de l'algorithme en proposant un nouveau preconditionneur

$$M_2 = \sum_i B_i K_i B_i^T. \tag{8.19}$$

Dans [62], ils ont montré que M_2 est une bonne approximation de D^{-1} au sens où elle accélère la convergence de la méthode.

Préconditionneur diagonale par blocs dans le cas non-conforme : Dans le cas de deux sous-domaines dont les maillages ne coïncident pas sur l'interface Γ , la matrice B est construite comme nous l'avons expliqué dans la Section 8.3. Un preconditionneur M_3 a été proposé par Lacour [86, 87] pour le cas non-conforme. Il est donné par

$$M_3 = \sum_i (\text{diag} B_{i\gamma} B_{i\gamma}^T)^{-1} (B_i K_i B_i^T) (\text{diag} B_{i\gamma} B_{i\gamma}^T)^{-1} \quad (8.20)$$

où $\text{diag} B_{i\gamma} B_{i\gamma}^T$ donne une contribution au bloc diagonale associé à chaque côté non joint γ . Ce preconditionneur permet de prendre en compte le changement de métrique dus aux fait que les maillages des interfaces peuvent être très différents.

Généralisation du preconditionneur M_3 : La matrice de preconditionnement proposée dans [77] est la suivante:

$$M_4 = \sum_i (B_i B_i^T)^{-1} (B_i K_i B_i^T) (B_i B_i^T)^{-1}. \quad (8.21)$$

Le preconditionneur M_4 est un généralisation du précédent: en effet, M_3 peut être obtenu à partir de M_4 en prenant seulement la partie diagonale par blocs de $B_i B_i^T$. Comme avant, dans le cas non-conforme, le produit par la matrice $B_i B_i^T$ permet de prendre en compte le changement de métrique. Dans [77], les auteurs ont montré que pour des maillages conformes,

$$k(P M_4 P^T K) \leq C \left(1 + \log\left(\frac{H}{h}\right) \right)^2$$

avec la constante C indépendante de H et h . Dans ce cas, la matrice $B_i B_i^T$ est proportionnelle à Id . Nous remarquons que pour une décomposition géométriquement non-conforme, la matrice $B B^T$ n'est pas diagonale par blocs mais reste à diagonale dominance stricte.

Stefanica et Klawonn [125] ont testé trois preconditionneurs sur un problème elliptique, auto-adjoint en deux dimensions discrétisé par la méthode des éléments finis nodaux avec joints sur maillage non-conformes: (1) celui proposé dans [63], (2) le preconditionneur diagonale à bloc décrit par Lacour dans [86, 87] et (3) le preconditionneur défini par Klawonn et Widlund [77]. Ils ont montré que le preconditionneur (2) est 10 fois plus performant que (1) et que (3) est deux fois plus performant que (2).

Notre choix du preconditionneur : Dans [112], nous avons choisi $M = M_4$.

Espace grossier

Dans cette section, nous voulons introduire le concept de *espace grossier* (ou “coarse space”) dans le cadre général où les noyaux locaux sont réduits à $\{0\}$ et ne permettent pas de guider l’intuition très exploitée par les algorithmes de décomposition de domaine. L’idée de base est celle de résoudre le problème de départ sur un espace grossier pour avoir une première solution qui n’est pas correcte mais qui est transmise à l’ensemble des sous-domaines. Ensuite, cette solution est projetée sur les maillages fins contenus dans les sous-domaines, mise à jour par l’algorithme itérative et re-projetée sur le maillage grossier.

Nous voulons donc définir l’espace V_0 pour le problème (8.1) approximé par des éléments d’arête du premier ordre sur des maillages non-conformes aux interfaces entre sous-domaines. La construction est présentée en deux dimensions. Soit X_i l’espace des éléments d’arête du premier ordre sur Ω_i ,

$$X_i = X_h(\Omega_i) = \{\mathbf{u}_{i,h} \in H(\text{rot}, \Omega_i) \mid \mathbf{u}_{i,h}|_T \in \mathcal{R}(T), \forall T \in \mathcal{T}_{i,h}\}$$

où $\mathcal{T}_{i,h}$ est une triangulation de Ω_i en triangles T et

$$\mathcal{R}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 y \\ \alpha_2 - \alpha_3 x \end{pmatrix} \mid \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nous introduisons ensuite l’espace produit

$$X_h(\Omega) = X = \prod_{i=1}^N X_i \subset \prod_{i=1}^N H(\text{rot}, \Omega_i).$$

On considère ensuite l’espace des vecteurs tangents

$$W_h(\partial\Omega_i) = W_i = \{(\mathbf{u}_{i,h} \cdot \boldsymbol{\tau}_i) \boldsymbol{\tau}_i \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega \mid \mathbf{u}_{i,h} \in X_i\},$$

et l’espace produit

$$W_h(\Gamma) = W = \prod_{i=1}^N W_i.$$

On remarque que les espaces W_i contiennent des *vecteurs* tangents à $\partial\Omega_i \setminus \partial\Omega$ constants par morceaux.

Pour définir l’espace grossier, on introduit d’abord les matrices

$$R = [R^{(1)} \quad R^{(2)} \quad \dots \quad R^{(N)}] \quad , \quad G = (BB^T)BR,$$

où les colonnes de $R^{(j)}$ sont des vecteurs de W . Plus précisément, nous supposons que $R^{(j)}$ est construite à partir d'un vecteur local $\mathbf{r}_j \in W_j$ sur $\partial\Omega_j \setminus \partial\Omega$ par extension à zéro de ce dernier sur les frontières des autres sous-domaines. Si G était égale à BR seulement, la méthode ne serait pas scalable avec le nombre de sous-domaines.

Notre choix de l'opérateur de projection : $P = Id - G(G^T K G)^{-1} G^T K$, qui est orthogonale par rapport au produit scalaire induit par K .

Dans l'algorithme du Gradient Conjugué Projeté et Préconditionné nous avons donc

$$\mathbf{U}_0 = G(G^T K G)^{-1} G^T \mathbf{F};$$

elle représente la solution dans V_0 (engendrée par les vecteurs associés à R) du problème

$$a_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in V_0.$$

8.7 *Article 7* – A FETI preconditioner for two dimensional edge element approximations of Maxwell's equations on non-matching grids

par *F. Rapetti, A. Toselli*

soumis au SIAM J. on Scientific Computing (1999).

A FETI PRECONDITIONER FOR TWO DIMENSIONAL EDGE ELEMENT APPROXIMATIONS OF MAXWELL'S EQUATIONS ON NON-MATCHING GRIDS

FRANCESCA RAPETTI* AND ANDREA TOSELLI†

Abstract. A class of FETI methods for the mortar approximation of a vector field problem in two dimensions is introduced and analyzed. Edge element discretizations of lowest degree are considered. The method proposed can be employed with geometrically conforming and non-conforming partitions. Our numerical results show that its condition number increases only with the number of unknowns in each subdomains, and is independent of the number of subdomains and the size of the problem.

Key words. Edge elements, Maxwell's equations, domain decomposition, FETI, preconditioners, non-matching grids

AMS subject classifications. 65F10, 65N22, 65N30, 65N55

1. Introduction. In this paper, we consider the boundary value problem

$$(1) \quad \begin{aligned} L\mathbf{u} &:= \operatorname{curl}(a \operatorname{curl} \mathbf{u}) + A\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned}$$

with Ω a bounded polygonal domain in \mathbb{R}^2 . Here

$$\operatorname{curl} v := \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial v}{\partial x_1} \end{bmatrix}, \quad \operatorname{curl} \mathbf{u} := \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2};$$

see, e.g., [17]. The coefficient matrix A is a symmetric, uniformly positive definite matrix-valued function with entries $A_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $1 \leq i, j \leq 2$, and $a \in L^\infty(\Omega)$ is a positive function bounded away from zero. The domain Ω has unit diameter and \mathbf{t} is the unit tangent to its boundary.

The weak formulation of problem (1) requires the introduction of the Hilbert space $H(\operatorname{curl}; \Omega)$, defined by

$$H(\operatorname{curl}; \Omega) := \{ \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2 \mid \operatorname{curl} \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \}.$$

The space $H(\operatorname{curl}; \Omega)$ is equipped with the following inner product and graph norm,

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\operatorname{curl}} := \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \operatorname{curl} \mathbf{u} \operatorname{curl} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \|\mathbf{u}\|_{\operatorname{curl}}^2 := (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\operatorname{curl}}.$$

The tangential component $\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}$, of a vector $\mathbf{u} \in H(\operatorname{curl}; \Omega)$ on the boundary $\partial\Omega$, belongs to the space $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$; see [17, 8]. The subspace of vectors in $H(\operatorname{curl}; \Omega)$ with vanishing tangential component on $\partial\Omega$ is denoted by $H_0(\operatorname{curl}; \Omega)$.

*ASCI-UPR 9029 CNRS, Paris Sud University, Building 506, 91403 Orsay Cedex, FRANCE. E-mail: rapetti@asci.fr. URL: <http://www.asci.fr/Francesca.Rapetti>. This work was supported by the European Community under Contract TMR ERB4001GT965424 and by the Direction des Relations Internationnelles du CNRS, France, under the fund PICS 478.

†Courant Institute of Mathematical Sciences, 251 Mercer Street, New York, N.Y. 10012, USA. E-mail: toselli@cims.nyu.edu. URL: <http://www.math.nyu.edu/~toselli>. This work was supported in part by the Applied Mathematical Sciences Program of the U.S. Department of Energy under Contract DEFGO288ER25053.

For any $\mathcal{D} \subset \Omega$, we define the bilinear form

$$(2) \quad a_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\mathcal{D}} (a \operatorname{curl} \mathbf{u} \operatorname{curl} \mathbf{v} + A \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H(\operatorname{curl}; \Omega).$$

The variational formulation of equation (1) is:
Find $\mathbf{u} \in H_0(\operatorname{curl}; \Omega)$ such that

$$(3) \quad a_{\Omega}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{v} \in H_0(\operatorname{curl}; \Omega).$$

We discretize this problem using edge elements, also known as Nédélec elements; see [24]. These are vector-valued finite elements that only ensure the continuity of the tangential component across the common side of adjacent mesh triangles, as is physically required for the electric and magnetic fields, which are solutions of Maxwell's equations.

In this paper, we consider a mortar approximation of this problem. The computational domain is partitioned into a family of non-overlapping subdomains and independent triangulations are introduced in each subdomain. The weak continuity of the tangential component of the solution is then enforced by using suitable integral conditions that require that the jumps across the subdomain inner boundaries are perpendicular to suitable finite element spaces defined on the edges of the partition. We note that the mortar method was originally introduced in [9] for finite element approximations in H^1 . Mortar approximations for edge element approximations in two and three dimensions have been studied in [3] and [4], respectively. There has also been additional recent work for the case of sliding meshes for the study of electromagnetic fields in electrical engines; see, e.g., [25].

The applications that we have in mind are mainly problems arising from static and quasi-static Maxwell's equations (eddy current problems); see, e.g., [6, 5]. In this paper, we only consider the model problem (3), where the dependency on the time variable or on the frequency has been eliminated, and we generically refer to it as Maxwell's equations. A good preconditioner for this model problem is the first step for the efficient solution of linear systems arising from the edge element approximation of static problems, and of time- or frequency-dependent problems arising from the quasi-static approximation of Maxwell's equations.

The aim of this paper is to build an iterative method of Finite Element Tearing and Interconnecting (FETI) type for a mortar edge element approximation of problem (1). FETI methods were first introduced for the solution of conforming approximations of elasticity problems in [15]. In this approach, the original domain Ω is decomposed into non-overlapping subdomains Ω_i , $i = 1, \dots, N$. On each subdomain Ω_i a local stiffness matrix is obtained from the finite element discretization of $a_{\Omega_i}(\cdot, \cdot)$. Analogously, a set of right hand sides is built. The continuity of the solution corresponding to the primal variables is then enforced, by using Lagrange multipliers, across the interface defined by the subdomain inner boundaries. In the original FETI algorithm, the primal variables are then eliminated by solving local Neumann problems, and an equation in the Lagrange multipliers is obtained. Several preconditioners have been proposed and studied for its solution; see, e.g., [14, 16, 23, 13, 29, 26, 19, 32].

Many iterative methods for the solution of linear systems arising from mortar approximations have been proposed. We cite, in particular, [22, 1, 20, 2, 10, 11, 7, 12, 21, 33] and refer to the references therein for a more detailed discussion.

To our knowledge, the application of FETI preconditioners to mortar approximations was first explored in [18] and then tested more systematically in [28]. The idea is fairly simple and relies on the observation that mortar approximations with Lagrange multipliers and FETI formulations, where the pointwise continuity across the substructures is enforced by using Lagrange multipliers, give rise to indefinite linear systems that have the same form. FETI preconditioners can then be devised for mortar approximations in a straightforward way; see [28]. In this paper, we apply the FETI preconditioner introduced in [19] for the case of non-redundant Lagrange multipliers, to the mortar approximation originally studied in [3]. Our work generalizes that for FETI preconditioners for two-dimensional conforming edge-element approximations in [32]. As opposed to the H^1 case, the generalization of FETI preconditioners to mortar approximations requires some modifications in $H(\text{curl})$. More precisely, the coarse components of the preconditioners need to be modified here in order to obtain a scalable method, and a suitable scaling matrix Q has to be introduced; see section 5. As shown in [28], no modification appears to be necessary for nodal finite elements in H^1 . Finally, we note that in this paper we only consider problems without jumps of the coefficients. For conforming approximations, FETI methods that are robust with respect to large variations of jumps of the coefficients have been developed and studied, see [26, 19], but the case of nodal or edge element approximations on non-matching grids still needs to be explored and is left for a forthcoming paper.

The outline of the remainder of this paper is as follows. In section 2, we introduce a partition of the domain Ω and local finite element spaces. In section 3, we consider the mortar condition and in section 4, we present our FETI method, in terms of a projection onto a low-dimensional subspace and a local preconditioner. The expressions for the projection and the preconditioner are then given in section 5 and some numerical results for geometrically conforming and non-conforming partitions are presented in section 6.

2. Finite element spaces. We first consider a non-overlapping partition of the domain Ω ,

$$\mathcal{F}_H = \left\{ \Omega_i, i = 1, \dots, N \mid \bigcup_{i=1}^N \overline{\Omega_i} = \overline{\Omega} \quad ; \quad \Omega_k \cap \Omega_l = \emptyset \quad , \quad 1 \leq k < l \leq N \right\},$$

such that each subdomain Ω_i is a connected polygonal open set in \mathbb{R}^2 . We remark that \mathcal{F}_H does not need to be geometrically conforming. We denote the diameter of Ω_i by H_i and the maximum of the diameters of the subdomains by H :

$$H := \max_{1 \leq i \leq N} \{H_i\}.$$

The elements of \mathcal{F}_H are also called *substructures*. Let \mathbf{t}_i be the unit tangent to $\partial\Omega_i$, chosen so that following the direction of \mathbf{t}_i , Ω_i is on the left.

For every subdomain Ω_i , we define the set of its open edges that do not lie on $\partial\Omega$ by $\{\Gamma^{i,j} \mid j \in \mathcal{I}_i\}$. We then define the interface Γ , also called the “skeleton” of the decomposition, as the union of the edges of \mathcal{F}_H that do not lie on $\partial\Omega$:

$$\Gamma := \bigcup_{i=1}^N \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega = \bigcup_{i=1}^N \bigcup_{j \in \mathcal{I}_i} \Gamma^{i,j}.$$

We also define the local spaces of restrictions of vectors in $H_0(\text{curl}; \Omega)$ to Ω_i :

$$H_\star(\text{curl}; \Omega_i) := \{\mathbf{u}_i \in H(\text{curl}; \Omega_i) \mid \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{t} = 0 \text{ on } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i\}.$$

For every substructure Ω_i , we consider a triangulation $\mathcal{T}_{i,h}$, made of triangles or rectangles. Let $\mathcal{E}_{i,h}$ be the set of edges of $\mathcal{T}_{i,h}$. For every edge $e \in \mathcal{E}_{i,h}$, we fix a direction, given by a unit vector \mathbf{t}_e . The length of the edge e is denoted by $|e|$. The local triangulations are assumed shape-regular and quasi-uniform, and they do not need to match across the inner boundaries of the subdomains. We define h as the maximum of the mesh-sizes of the triangulations.

We next consider the lowest-order Nédélec finite element (FE) spaces, originally introduced in [24], defined on each subdomain Ω_i as

$$X_h(\Omega_i) = X_i := \{\mathbf{u}_i \in H_\star(\text{curl}; \Omega_i) \mid \mathbf{u}_i|_t \in \mathcal{R}(t), t \in \mathcal{T}_{i,h}\},$$

where, in the case of triangular meshes, we have

$$\mathcal{R}(t) := \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 x_2 \\ \alpha_2 - \alpha_3 x_1 \end{bmatrix} \mid \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

We recall that the tangential component of a vector $\mathbf{u}_i \in X_i$ is constant on the edges of the triangulation $\mathcal{T}_{i,h}$, and that the degrees of freedom can be chosen as the values of the tangential component on the edges

$$(4) \quad \lambda_{e_k}(\mathbf{u}_i) = u_k^{(i)} := \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{t}_{e_k}|_{e_k}, \quad e_k \in \mathcal{E}_{i,h}.$$

We next introduce the product space

$$X_h(\Omega) = X := \prod_{i=1}^N X_i \subset \prod_{i=1}^N H_\star(\text{curl}; \Omega_i),$$

the spaces of tangential vectors

$$W_h(\partial\Omega_i) = W_i := \{(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{t}_i) \mathbf{t}_i \text{ restricted to } \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega \mid \mathbf{u}_i \in X_i\},$$

and the product space

$$W_h(\Gamma) = W := \prod_{i=1}^N W_i.$$

We note that we have chosen a different definition of the trace spaces than that employed in [32]. Here, the spaces W_i consist of piecewise constant tangential *vectors* on $\partial\Omega_i \setminus \partial\Omega$.

Throughout this paper, we will use the following conventions. We will use the same notation for the vectors in X_i and tangential vectors in W_i . We denote a generic vector function in X_i using a bold letter with the subscript i , e.g., \mathbf{u}_i , and the column vector of its degrees of freedom, defined in (4), using the same letter with the superscript (i) , e.g., $u^{(i)}$. Its k -th degree of freedom corresponding to the edge e_k , defined in (4), is $u_k^{(i)}$. A generic vector in the product space X (or W) is also denoted by a bold letter, e.g., \mathbf{u} , and the corresponding vector of degrees of freedom by the same letter, e.g., u . We will use the same notation for the spaces of functions X_i and W_i and the corresponding spaces of degrees of freedom.

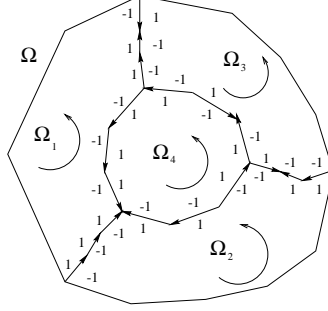


FIG. 1. *Example of partition of the domain Ω . We show the directions of the subdomain boundaries, given by the unit vectors $\{\mathbf{t}_i\}$, those of the fine edges on the interface Γ , and the corresponding values of the degrees of freedom $t^{(i)}$.*

Given the unit vectors \mathbf{t}_i , the column vectors $t^{(i)}$ are defined by

$$t_k^{(i)} := \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_{e_k}, \quad e_k \subset \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega, \quad e_k \in \mathcal{E}_{i,h}.$$

We will need these tangential vectors in the definition of our FETI method; see section 5. We remark that, in case that all the edges e_k on $\partial\Omega_i$ have the same direction of the boundary $\partial\Omega_i$, the entries of the vector $t^{(i)}$ are equal to one. Figure 1 shows an example of a partition, with the directions of the subdomain boundaries and of the fine edges on the interface Γ , and the corresponding degrees of freedom $t^{(i)}$.

Finally, for $i = 1, \dots, N$, we define the discrete harmonic extensions with respect to the bilinear forms $a_{\Omega_i}(\cdot, \cdot)$ into the interior of Ω_i

$$\mathcal{H}_i : W_i \longrightarrow X_i.$$

We recall that $\mathcal{H}_i \mathbf{u}_i$ minimizes the energy $a_{\Omega_i}(\mathcal{H}_i \mathbf{u}_i, \mathcal{H}_i \mathbf{u}_i)$ among all the vectors of X_i with tangential component equal to \mathbf{u}_i on $\partial\Omega_i \setminus \partial\Omega$.

3. A mortar condition. The mortar method presented in this section was originally developed and studied in [3]. We consider the skeleton Γ and choose a splitting of Γ as the disjoint union of some edges $\{\bar{\Gamma}^{k,j}\}$, that we call *mortars*. We note that this partition is not in general unique; see Figure 2 (left) for an example of decomposition.

A unique set of indices corresponds to this choice and we denote it by

$$\mathcal{I}_M := \{m = (k, j) \text{ such that } \Gamma^{k,j} \text{ is a mortar}\}.$$

To simplify the notation, we denote the mortars by $\{\Gamma^m \mid m \in \mathcal{I}_M\}$. We have

$$\bar{\Gamma} := \bigcup_{i=1}^M \bar{\Gamma}^m, \quad \Gamma^m \cap \Gamma^n = \emptyset, \quad \text{if } m \neq n \text{ and } n, m \in \mathcal{I}_M.$$

For any m in \mathcal{I}_M , we denote by W^m the space $W^{k,j}$ ($m = (k, j) \in \mathcal{I}_M$) given by

$$W^{k,j} := \{(\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{t}_k) \mathbf{t}_k \text{ restricted to } \Gamma^{k,j} \mid \mathbf{u}_k \in X_k\}.$$

We note that the vectors in $W^{k,j}$ are also the restrictions of vectors in W_k to $\Gamma^{k,j}$. Before introducing the mortar space, we need to fix a last point. Let Γ^m be a mortar

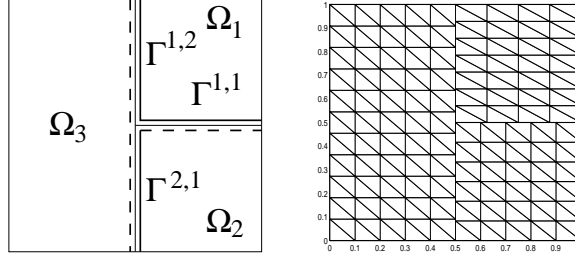


FIG. 2. An example where the domain is decomposed into three (rectangular) non-overlapping subdomains. The skeleton has two partitions (figure on the left): one in terms of mortars (solid dark line) and the other in terms of non-mortars (long dashed lines). On the right, an example of discretization of the subdomains by means of triangular grids that do not match at the interfaces between adjacent subdomains.

edge with $m = (k, j)$ and $\mathbf{u} \in X_h$: for almost every $\mathbf{x} \in \Gamma^m$, there exists an index l ($1 \leq l \leq N$), $l \neq k$ such that $\mathbf{x} \in \Gamma^m \cap \partial\Omega_l$. At this point \mathbf{x} we have two fields, namely \mathbf{u}_k and \mathbf{u}_l . Since the domain decomposition is in general non-conforming, the value of l depends on \mathbf{x} and we denote by \mathcal{J}_l the set of indices l ($1 \leq l \leq N$) such that $\Gamma^m \cap \partial\Omega_l \neq \emptyset$. We then define

$$\mathbf{u}_{-k}(\mathbf{x}) := \mathbf{u}_l(\mathbf{x}) \quad , \quad \mathbf{x} \in \Gamma^m \cap \partial\Omega_l, \quad l \in \mathcal{J}_l.$$

The function \mathbf{u}_{-k} is defined for almost all $\mathbf{x} \in \Gamma^m$. In general, it is not the tangential component at Γ^m of a field $\mathbf{u} \in H_*(\text{curl}; \Omega_i)$: it can indeed correspond to tangential components from different subdomains which share a subset of Γ^m and live on different grids.

The equality between $\mathbf{u}_{-k} \cdot \mathbf{t}_k$ and $\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{t}_k$ at Γ^m becomes a too stringent condition since the two fields are in general defined on different and non-matching grids. As is usually done in non-conforming mortar domain decomposition methods, we impose these constraints in a weak form by means of suitable Lagrange multipliers. Here, the Lagrange multiplier space consists of the tangential components of the shape functions at the mortar edges; see [3].

REMARK 3.1. *The definition of the mortar space for the edge elements is simpler than for nodal finite elements. In the nodal case, the space of Lagrange multipliers cannot be chosen as a space of traces on the mortar edges, but only as a suitable subspace of it. In the edge case, it is not necessary to decrease the dimension of the multiplier space since the information is associated to edges and not to nodes; see [9] for more details.*

The Lagrange multiplier (mortar) space is now defined by

$$\{\mathbf{v} \in L^2(\Gamma) \mid \mathbf{v}|_{\Gamma^m} \in W^m, \quad m \in \mathcal{I}_M\}.$$

We remark that this is a space of tangential vectors on Γ . The transmission conditions at the interface between adjacent subdomains are then weakly imposed by means of these Lagrange multipliers. A solution $\mathbf{u} \in W$ is required to satisfy the constraints

$$(5) \quad \int_{\Gamma^m} (\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{t}_k - \mathbf{u}_{-k} \cdot \mathbf{t}_k) \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_k \, ds = 0, \quad \mathbf{v} \in W^m, \quad m = (k, j) \in \mathcal{I}_M.$$

The set of transmission conditions can be expressed in matrix form in the following way:

Let \mathbf{w}_i^k be the basis function associated to the k -th mesh edge of $\partial\Omega_i \setminus \partial\Omega$. We introduce two matrices C and D by

$$C_{kl} := \int_{\Gamma^m} (\mathbf{w}_i^k \cdot \mathbf{t}_i)(\mathbf{w}_i^l \cdot \mathbf{t}_i) ds = \delta_{kl} |e_k|, \quad e_k, e_l \subset \Gamma^m,$$

$$D_{kn} := \int_{\Gamma^m} (\mathbf{w}_i^k \cdot \mathbf{t}_i)(\mathbf{w}_r^n \cdot \mathbf{t}_i) ds, \quad e_k \subset \Gamma^m, \quad e_n \subset \partial\Omega_r, \quad r \in \mathcal{J}_m,$$

where $\Gamma^m = \Gamma^{i,j}$. Then the matching conditions (5) have the form

$$Bu = 0 \quad \text{where} \quad B = C - D.$$

We remark that the entries of C and D depend on the particular choice of degrees of freedom defined in (4).

The matrix B can also be written as

$$B = \begin{bmatrix} B^{(1)} & B^{(2)} & \dots & B^{(N)} \end{bmatrix},$$

where the local matrices $B^{(i)}$ act on vectors in W_i . The entries of B do not belong in general to $\{0, 1, -1\}$ as in the conforming case described in [32] but, since we are working with non-matching grids, they take into account the edge intersections at the interfaces.

4. A FETI method. In this section, we introduce a FETI method for the solution of the linear system arising from the mortar edge element approximation of problem (3).

We first assemble the local stiffness matrices, relative to the bilinear forms $a_{\Omega_i}(\cdot, \cdot)$, and the local load vectors. The degrees of freedom that are not on the interface Γ only belong to one substructure and can be eliminated in parallel by block Gaussian elimination. Let $f^{(i)}$ be the resulting right hand sides and let $S^{(i)}$ be the Schur complement matrices

$$S^{(i)} : W_i \longrightarrow W_i,$$

relative to the degrees of freedom on $\partial\Omega_i \setminus \partial\Omega$.

We recall that the local Schur complements satisfy the following property

$$(6) \quad u^{(i)t} S^{(i)} u^{(i)} = a_{\Omega_i}(\mathcal{H}_i \mathbf{u}_i, \mathcal{H}_i \mathbf{u}_i);$$

see, e.g., [27, 31].

Following [19, 32], we can then write our mortar problem as

$$(7) \quad \begin{array}{rcl} Su & + & B^t \lambda = f \\ Bu & & = 0 \end{array}$$

where

$$u := \begin{bmatrix} u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(N)} \end{bmatrix} \in W, \quad S := \text{diag}\{S^{(1)}, \dots, S^{(N)}\}, \quad f := \begin{bmatrix} f^{(1)} \\ \vdots \\ f^{(N)} \end{bmatrix}.$$

The vector λ is a Lagrange multiplier relative to the weak continuity constraint $Bu = 0$.

We remark that the $S^{(i)}$ are always invertible and, consequently, there is no natural coarse space associated to the substructures; we are in a similar case as the one considered in [13]. We first find u from the first equation in (7), and substitute its value in the second equation. We obtain the system

$$(8) \quad F\lambda = d,$$

where

$$F := B S^{-1} B^t, \quad d := B S^{-1} f.$$

Following [19, 32, 28], we now define a preconditioner. Since we assume that the coefficients do not have any jump, we do not need to introduce a set of scaling matrices as is required for problems with coefficient jumps; see, e.g., [30, 31, 19, 32].

We introduce the matrices,

$$(9) \quad R := \begin{bmatrix} R^{(1)} & R^{(2)} & \dots & R^{(M)} \end{bmatrix}, \quad G := Q B R,$$

where $R^{(i)}$ are vectors in W , related to the substructures $\{\Omega_i\}$ and Q is a suitable invertible matrix that we will specify in the next section. More precisely, we suppose that $R^{(i)}$ is obtained from a local vector $\mathbf{r}_i \in W_i$ on $\partial\Omega_i \setminus \partial\Omega$, by extending it by zero on the boundaries of the other substructures. We will make a particular choice of R for problem (3), in section 5, and specify the dimension M .

Following [13, 32], we define the projection

$$P := I - G(G^t F G)^{-1} G^t F,$$

onto the complement of $\text{Range}(G)$. This projection is orthogonal with respect to the scalar product induced by F . Following [19, 32], we next define the preconditioner

$$\widehat{M}^{-1} := (B B^t)^{-1} B S B^t (B B^t)^{-1}.$$

It can be easily seen that $B B^t$ is invertible and is block-diagonal only if the partition \mathcal{F}_H is geometrically conforming.

Now, we consider a projected conjugate gradient method, as in [13, 32].

1. Initialize

$$\begin{aligned} \lambda^0 &= G(G^t F G)^{-1} G^t d \\ q^0 &= d - F\lambda^0 \end{aligned}$$

2. Iterate $k = 1, 2, \dots$ until convergence

$$\begin{aligned} \text{Project: } w^{k-1} &= P^t q^{k-1} \\ \text{Precondition: } z^{k-1} &= \widehat{M}^{-1} w^{k-1} \\ \text{Project: } y^{k-1} &= P z^{k-1} \\ \beta^k &= \langle y^{k-1}, w^{k-1} \rangle / \langle y^{k-2}, w^{k-2} \rangle \quad [\beta^1 = 0] \\ p^k &= y^{k-1} + \beta^k p^{k-1} \quad [p^1 = y^0] \\ \alpha^k &= \langle y^{k-1}, w^{k-1} \rangle / \langle p^k, F p^k \rangle \\ \lambda^k &= \lambda^{k-1} + \alpha^k p^k \\ q^k &= q^{k-1} - \alpha^k F p^k \end{aligned}$$

The first projection can be omitted; because of the choice of the initial vector λ^0 , we have $w^{k-1} = q^{k-1}$ after the first projection step. Here, we have denoted the residual at the k -th step by q^k . In practice, partial or full re-orthogonalization may be required; cf. [16].

The method presented here is equivalent to using the conjugate gradient method for solving the following preconditioned system

$$(10) \quad P\widehat{M}^{-1}P^tF\lambda = P\widehat{M}^{-1}P^td, \quad \lambda \in \lambda_0 + V,$$

with

$$(11) \quad V := \text{Range}(P).$$

We remark that the matrices S and S^{-1} do not need to be calculated in practice. The action of S on a vector requires the solution of a Dirichlet problem on each substructure, while the action of S^{-1} requires the solution of a Neumann problem on each substructure; see [27, Ch. 4].

5. A particular choice of the matrices R and Q . In this section, we consider a particular choice of the matrices R and Q in the definition of the FETI algorithm for problem (3).

We proceed in a similar way as in [32, Sect. 5], but we will need to introduce a suitable matrix Q , different from the identity.

The definition of R is the same as in the conforming case, see [32, Sect. 5], and is given in terms of local vectors.

DEFINITION 5.1. *The local vectors $\{\mathbf{r}_i, i = 1, \dots, N\}$, with the corresponding vectors of degrees of freedom $\{r^{(i)}\}$, are the unique vectors that satisfy*

$$r^{(i)t} v^{(i)} = \sum_{\substack{e_k \subset \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega \\ e_k \in \mathcal{E}_{i,h}}} r_k^{(i)} v_k^{(i)} = \int_{\partial\Omega_i \setminus \partial\Omega} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{t}_i ds, \quad \mathbf{v}_i \in W_i.$$

The global vectors $R^{(i)}$ are obtained by extending the local vectors $r^{(i)}$ by zero outside $\partial\Omega_i$.

We can easily find that

$$r_k^{(i)} = |e_k| t_k^{(i)}, \quad e_k \subset \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega.$$

The vectors \mathbf{r}_i have then the same direction as the \mathbf{t}_i and are scaled using the lengths of the edges of the triangulations $\mathcal{T}_{i,h}$.

We then define the matrix Q as

$$(12) \quad Q := (BB^t)^{-1}.$$

We remark that in the case of a conforming triangulation the matrix Q is a multiple of the identity; see [32]. For matching grids, we then obtain the same preconditioner as introduced in [32] for conforming approximations. Here, our choice of Q does not require any additional calculation, since $(BB^t)^{-1}$ is also needed for the application of the preconditioner \widehat{M}^{-1} .

It remains to decide how many of the local vectors $R^{(i)}$ need to be considered in the definition of the matrix R . We introduce \mathcal{G}_H as the dual graph of the partition \mathcal{F}_H . Thus, \mathcal{G}_H has a vertex for each substructure of \mathcal{F}_H and there is an edge in

\mathcal{G}_H between two vertices if the intersection of the boundaries of the corresponding substructures has positive measure. As in [32], we define the matrix R by

$$(13) \quad R := \begin{cases} [R^{(1)} & R^{(2)} & \dots & R^{(N-1)}], & \text{if } \mathcal{G}_H \text{ is two-colorable,} \\ [R^{(1)} & R^{(2)} & \dots & R^{(N)}], & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The following result can be proven using [32, Lem. 5.2 and Th. 5.1].

LEMMA 5.1. *Let R be defined in (13). Then the matrix G has full rank.*

REMARK 5.1. *An analogous FETI method can also be devised for problems involving the bilinear form*

$$\int_{\Omega} (a \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} + A \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, dx, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H(\operatorname{div}; \Omega),$$

discretized with the lowest-order Raviart–Thomas spaces. Here, $H(\operatorname{div}; \Omega)$ is the space of vectors in $(L^2)^2$, with divergence in L^2 . Since, in two dimensions, vectors in the Raviart–Thomas spaces can be obtained from those in the Nédélec spaces by a rotation of ninety degrees, the unit outward normal vectors \mathbf{n}_i to the boundaries $\partial\Omega_i$, instead of the unit tangent vectors \mathbf{t}_i , have to be employed in the construction of the local functions \mathbf{r}_i . All the definitions in this paper remain valid in this case. For Raviart–Thomas discretizations in three dimensions, an analogous method can also be defined and all our definitions remain valid.

6. Numerical results. The purpose of this section is to show that, for problems without jumps, the FETI method proposed here performs similarly to the corresponding method for conforming approximations; see [32, Sect. 6]. In particular, our method appears to be scalable, its condition number only depends on the number of degrees of freedom per subdomain, and it is quite insensitive to variations of the ratios of the coefficients. In addition, it appears to be robust when the meshes of adjacent subdomains are very different.

In many iterative substructuring methods, an important role is played by the ratio H/h that measures the number of degrees of freedom per subdomain. In particular, the condition number of these methods grows only quadratically with the logarithm of H/h ; see, e.g., [27]. This ratio is regarded as a local quantity and can vary greatly from one subdomain to another. In our numerical results, we always report the maximum value of this ratio taken over the subdomains.

We consider the domain $\Omega = (0, 1)^2$ and assume that the coefficient matrix A is diagonal and equal to

$$A = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}.$$

In our first set of results, we consider a family of geometrically conforming partitions of Ω , into $2^d \times 2^d$ substructures of equal size, with $d = 1, 2, 3, 4$. For a fixed partition, we consider two kinds of uniform triangulations for the substructures, in such a way that on the interface between two adjacent substructures the meshes do not match. The ratio between the mesh-sizes of the two triangulations is $h_1/h_2 = 4/3$. Figure 3 shows an example of this checkerboard-type discretization for $d = 2$.

In Table 1, we show the estimated condition number and the number of iterations to obtain a relative residual $\|q_k\|/\|f\|$ less than 10^{-6} , as a function of the diameter of the finer mesh and the partition. Here, q_k is the k -th residual as defined in the

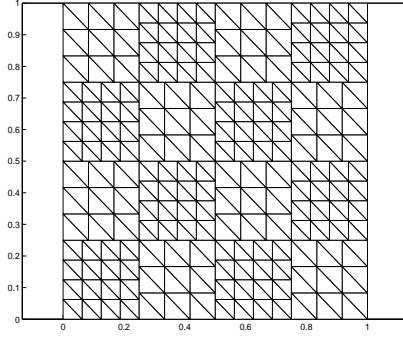


FIG. 3. A conforming partition and a checkerboard-type discretization.

TABLE 1

The FETI method for conforming partitions with $h_1/h_2 = 4/3$. Estimated condition number and number of CG iterations necessary to obtain a relative residual $\|q_k\|/\|f\|$ less than 10^{-6} (in parentheses), versus H/h and h . Case of $a = 1$, $b = 1$. The asterisks denote the cases for which we have not enough memory to run the corresponding algorithm.

H/h	32	16	8	4
$1/h = 32$ (1600 el.)	-	1.805 (5)	2.941 (9)	2.179 (8)
$1/h = 64$ (6400 el.)	2.151 (6)	4.045 (11)	3.035 (10)	2.165 (7)
$1/h = 128$ (25600 el.)	5.314 (12)	4.175 (12)	3.013 (9)	*

algorithmic description given in section 4. For a fixed ratio H/h , the condition number and the number of iterations are quite insensitive to the dimension of the fine meshes. In addition, even for non-matching grids, the ratio H/h appears to play an important role.

TABLE 2

The FETI method for conforming partitions with $h_1/h_2 = 4/3$. Estimated condition number and number of CG iterations necessary to obtain relative preconditioned residual ($\|q_k\|/\|f\|$) less than 10^{-6} (in parentheses), versus H/h and b . Case of $1/h = 128$ and $a = 1$.

H/h	8	16	32
$b=0.0001$	3.091 (16)	4.216 (20)	5.364 (18)
$b=0.001$	3.078 (14)	4.21 (18)	5.358 (16)
$b=0.01$	3.069 (13)	4.203 (16)	5.353 (15)
$b=0.1$	3.044 (11)	4.192 (14)	5.346 (14)
$b=1$	3.013 (9)	4.175 (12)	5.314 (12)
$b=10$	2.992 (8)	4.114 (11)	5.154 (11)
$b=100$	2.939 (9)	3.829 (11)	4.379 (11)
$b=1000$	2.501 (7)	2.746 (8)	2.486 (7)
$b=1e+04$	1.418 (4)	1.493 (4)	1.533 (4)
$b=1e+05$	1.037 (2)	1.042 (2)	1.044 (2)
$b=1e+06$	1.06 (2)	1.046 (2)	1.044 (2)

In Table 2, we show some results when the ratio of the coefficients b and a changes. For a fixed value of $1/h = 128$ and $a = 1$, and for the partitions into 2^d by 2^d

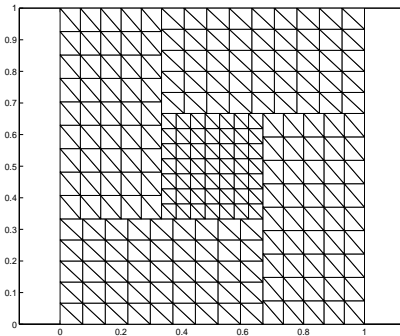


FIG. 4. A block consisting of five subdomains, employed for building a non-conforming partition.

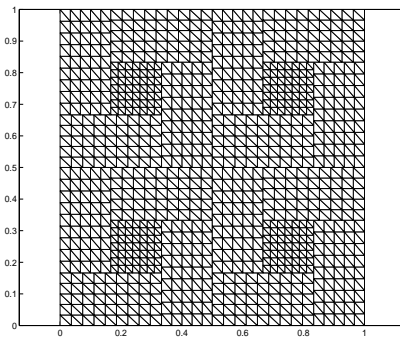


FIG. 5. A non-conforming partition consisting of four blocks.

substructures, with $d = 2, 3, 4$, the estimated condition number and the number of iterations are shown as a function of H/h and b . The number of iterations and the condition number appear to be bounded independently of the ratio of the coefficients.

We then consider some test cases relative to geometrically non-conforming partitions of the domain $(0, 1)^2$. We consider partitions consisting of $2^d \times 2^d$ equal blocks, $d = 0, 1, 2, 3$. A block is made of five non-conforming subdomains and is shown in Figure 4 together with a possible triangulation. Figure 5 shows a partition for the case $d = 1$ (four blocks and twenty subdomains). The number of subdomains is thus five times the number of blocks. We then consider uniform triangulations for the subdomains in each block. The rectangular subdomains have the same mesh.

We first consider a case where the ratio between the mesh sizes of the rectangular and square subdomains is $h_1/h_2 = 7/5$; see Figures 4 and 5 for two examples. In Table 3, we show the estimated condition number and the number of iterations to obtain a relative residual $\|q_k\|/\|f\|$ less than 10^{-6} , as a function of the diameter of the finer mesh and the ratio H/h . The condition number appears to increase slowly with H/h and to be quite insensitive to the size of the fine meshes.

In Table 4, we show some results when the ratio of the coefficients b and a changes. For a fixed value of $1/h = 84$ (29312 elements) and $a = 1$, and for the partitions into 2^d by 2^d blocks, with $d = 1, 2, 3$, the estimated condition number and the number of

TABLE 3

The FETI method for non-conforming partitions with $h_1/h_2 = 7/5$. Estimated condition number and number of CG iterations necessary to obtain a relative residual $\|q_k\|/\|f\|$ less than 10^{-6} (in parentheses), versus H/h and h . Case of $a = 1$, $b = 1$.

H/h	20	10	5
$1/h = 21$ (1832 el.)	-	2.728 (8)	2.63 (10)
$1/h = 42$ (7328 el.)	3.459 (8)	3.23 (11)	2.876 (10)
$1/h = 84$ (29312 el.)	4.034 (13)	3.619 (12)	2.901 (10)
$1/h = 168$ (117248 el.)	4.552 (14)	3.619 (12)	*

iterations are shown as a function of H/h and b .

TABLE 4

The FETI method for non-conforming partitions with $h_1/h_2 = 7/5$. Estimated condition number and number of CG iterations necessary to obtain relative preconditioned residual ($\|q_k\|/\|f\|$) less than 10^{-6} (in parentheses), versus H/h and b . Case of $1/h = 84$ and $a = 1$.

H/h	5	10	20
$b=0.0001$	2.966 (17)	3.667 (20)	4.068 (21)
$b=0.001$	2.955 (15)	3.663 (18)	4.064 (19)
$b=0.01$	2.951 (14)	3.658 (16)	4.06 (17)
$b= 0.1$	2.933 (12)	3.651 (14)	4.054 (15)
$b= 1$	2.901 (10)	3.619 (12)	4.034 (13)
$b= 10$	2.882 (9)	3.561 (11)	3.93 (12)
$b= 100$	2.769 (9)	3.214 (10)	3.284 (10)
$b= 1000$	2.305 (7)	2.197 (7)	2.229 (7)
$b=1e+04$	1.656 (5)	1.523 (4)	1.54 (4)
$b=1e+05$	1.173 (3)	1.178 (3)	1.086 (2)
$b=1e+06$	1.135 (2)	1.115 (2)	1.089 (2)

For the same non-conforming partitions, we finally consider a case where the ratio between the diameters of the meshes of the rectangular and square subdomains is larger. We choose $h_1/h_2 = 2.8$. In Table 5, we show some results when the ratio of the coefficients b and a changes. For a fixed value of $1/h = 168$ (48128 elements) and $a = 1$, and for the partitions into 2^d by 2^d blocks, with $d = 1, 2, 3$, the estimated condition number and the number of iterations are shown as a function of H/h and b . In this case, the meshes of adjacent substructures are very different but the condition numbers and the number of iterations are still quite satisfactory.

Acknowledgments. The authors are grateful to Olof Widlund and Yvon Maday for enlightening discussions of their work.

REFERENCES

- [1] Yves Achdou, Yuri A. Kuznetsov, and Olivier Pironneau. Substructuring preconditioners for the Q_1 mortar element method. *Numer. Math.*, 71(4):419–449, 1995.
- [2] Yves Achdou, Yvon Maday, and Olof B. Widlund. Iterative substructuring preconditioners for mortar element methods in two dimensions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 36(2):551–580, 1999.

TABLE 5

The FETI method for non-conforming partitions with $h_1/h_2 = 2.8$. Estimated condition number and number of CG iterations necessary to obtain relative preconditioned residual ($\|q_k\|/\|f\|$) less than 10^{-6} (in parentheses), versus H/h and b . Case of $1/h = 168$ and $a = 1$.

H/h	14	28	56
$b=0.0001$	5.058 (23)	5.062 (24)	6.275 (24)
$b=0.001$	5.054 (21)	5.056 (22)	6.27 (23)
$b=0.01$	5.045 (19)	5.043 (19)	6.258 (21)
$b=0.1$	5.026 (16)	5.032 (17)	6.241 (18)
$b=1$	4.994 (14)	5.008 (15)	6.205 (16)
$b=10$	4.922 (13)	4.977 (14)	6.094 (15)
$b=100$	4.833 (12)	4.761 (13)	5.48 (13)
$b=1000$	4.448 (11)	3.938 (10)	4.078 (9)
$b=1e+04$	3.381 (8)	2.669 (6)	2.668 (6)
$b=1e+05$	2.257 (5)	1.901 (4)	1.906 (3)
$b=1e+06$	1.947 (3)	1.786 (3)	1.436 (2)

- [3] Adnene Ben Abdallah, Faker Ben Belgacem, and Yvon Maday. Mortaring the two-dimensional “Nédélec” finite elements for the discretization of the Maxwell equations. *M²AN*, 2000. To appear.
- [4] Faker Ben Belgacem, Annalisa Buffa, and Yvon Maday. The mortar element method for 3D Maxwell equations: first results. Technical report, Laboratoire d’Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, 1999. Submitted to SIAM J. Numer. Anal.
- [5] Ozkár Bíró. Edge element formulations of eddy current problems. *Comput. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, 169:391–405, 1999.
- [6] Alain Bossavit. *Electromagnétisme en vue de la modélisation*. Mathématiques & Applications. Springer-Verlag France, Paris, 1993.
- [7] Dietrich Braess and Wolfgang Dahmen. Stability estimates of the mortar finite element method for 3-dimensional problems. *East-West J. Numer. Math.*, 6:249–263, 1998.
- [8] Franco Brezzi and Michel Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [9] Y. Maday C. Bernardi and A.T. Patera. A new nonconforming approach to domain decomposition: The mortar elements method. In H. Brezis and J.L. Lions, editors, *Nonlinear partial differential equations and their applications*, pages 13–51. Pitman, 1994.
- [10] Mario A. Casarin and Olof B. Widlund. A hierarchical preconditioner for the mortar finite element method. *ETNA*, 4:75–88, June 1996.
- [11] Maksymilian Dryja. An additive Schwarz method for elliptic mortar finite element problems in three dimensions. In P. E. Bjørstad, M. Espedal, and D. E. Keyes, editors, *Ninth International Conference of Domain Decomposition Methods*. John Wiley & Sons, Ltd, Strasbourg, France, 1997. Held in Ullensvang at the Hardanger Fjord, Norway, June 4–7, 1996.
- [12] Bernd Engelman, Ronald H.W. Hoppe, Yuri Iliash, Yuri A. Kuznetsov, Yuri Vassilevski, and Barbara I. Wohlmuth. Adaptive macro-hybrid finite element methods. In H. Bock, F. Brezzi, R. Glowinski, G. Kanschat, Y. A. Kuznetsov, J. Périaux, and R. Rannacher, editors, *Proceedings of the 2nd European Conference on Numerical Methods*, pages 294–302. World Scientific, Singapore, 1998.
- [13] Charbel Farhat, Po-Shu Chen, and Jan Mandel. A scalable Lagrange multiplier based domain decomposition method for time-dependent problems. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 38:3831–3853, 1995.
- [14] Charbel Farhat, Jan Mandel, and François-Xavier Roux. Optimal convergence properties of the FETI domain decomposition method. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 115:367–388, 1994.
- [15] Charbel Farhat and François-Xavier Roux. A method of Finite Element Tearing and Interconnecting and its parallel solution algorithm. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 32:1205–1227, 1991.
- [16] Charbel Farhat and François-Xavier Roux. Implicit parallel processing in structural mechan-

- ics. In J. Tinsley Oden, editor, *Computational Mechanics Advances*, volume 2 (1), pages 1–124. North-Holland, 1994.
- [17] Vivette Girault and Pierre-Arnaud Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, New York, 1986.
 - [18] Axel Klawonn and Dan Stefanica. A numerical study of a class of FETI preconditioners for mortar finite elements in two dimensions. Technical Report 773, Department of Computer Science, Courant Institute, November 1998.
 - [19] Axel Klawonn and Olof B. Widlund. FETI and Neumann–Neumann iterative substructuring methods: connections and new results. Technical Report 796, Department of Computer Science, Courant Institute, December 1999.
 - [20] Yuri A. Kuznetsov. Efficient iterative solvers for elliptic problems on nonmatching grids. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 10(3):187–211, 1995.
 - [21] Catherine Lacour. Iterative substructuring preconditioners for the mortar finite element method. In P. E. Bjørstad, M. Espedal, and D. E. Keyes, editors, *Ninth International Conference on Domain Decomposition*, pages 406–412. John Wiley & Sons, Ltd, Strasbourg, France, 1997. Held in Ullensvang at the Hardanger Fjord, Norway, June 4–7, 1996.
 - [22] Patrick Le Tallec and Taoufik Sassi. Domain decomposition with nonmatching grids: Augmented Lagrangian approach. *Math. Comp.*, 64(212):1367–1396, 1995.
 - [23] Jan Mandel and Radek Tezaur. Convergence of a substructuring method with Lagrange multipliers. *Numer. Math.*, 73:473–487, 1996.
 - [24] Jean-Claude Nédélec. Mixed finite elements in R^3 . *Numer. Math.*, 35:315–341, 1980.
 - [25] Francesca Rapetti. The mortar edge element method on non-matching grids for eddy current calculations in moving structures. *Int. J. Num. Meth.*, 1999. Submitted.
 - [26] Daniel Rixen and Charbel Farhat. A simple and efficient extension of a class of substructure based preconditioners to heterogeneous structural mechanics problems. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 44:489–516, 1999.
 - [27] Barry F. Smith, Petter E. Bjørstad, and William D. Gropp. *Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 1996.
 - [28] Dan Stefanica. *Domain decomposition methods for mortar finite elements*. PhD thesis, Courant Institute of Mathematical Sciences, September 1999.
 - [29] Radek Tezaur. *Analysis of Lagrange multiplier based domain decomposition*. PhD thesis, University of Colorado at Denver, 1998.
 - [30] Andrea Toselli. *Domain decomposition methods for vector field problems*. PhD thesis, Courant Institute of Mathematical Sciences, May 1999. Technical Report 785, Department of Computer Science, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University.
 - [31] Andrea Toselli. Neumann–Neumann methods for vector field problems. Technical Report 786, Department of Computer Science, Courant Institute, June 1999. Submitted to ETNA.
 - [32] Andrea Toselli and Axel Klawonn. A FETI domain decomposition method for Maxwell's equations with discontinuous coefficients in two dimensions. Technical Report 788, Department of Computer Science, Courant Institute, 1999. Submitted to SIAM J. Numer. Anal.
 - [33] Barbara I. Wohlmuth. Discretization methods and iterative solvers based on domain decomposition, November 1999. Mathematisch–Naturwissenschaftliche Fakultät, Universität Augsburg, Habilitationsschrift, 169pp.

Chapitre 9

Conclusions et perspectives

Le travail présenté dans cette Thèse a concerné la modélisation, tant mathématique que numérique, des courants induits dans des géométries bidimensionnelles et tridimensionnelles avec une portion mobile. La présentation a été organisée en trois parties.

Dans la première partie, contenu des Chapitres 2 et 3, nous avons étudié les différentes formulations mathématiques qui interviennent dans la modélisation des problèmes considérés, tant du point de vue continu que discret. Cette modélisation a comporté l'étude des espaces fonctionnels continus et discrets, des formulations fortes et faibles, de la discrétisation du domaine d'étude à l'aide d'un maillage et de la définition d'éléments finis liés aux entités géométriques du maillage. Nous avons rappelé la présentation d'une famille d'éléments finis spéciaux, le complexe de Whitney, qui possèdent des propriétés remarquables pour la discrétisation des champs électromagnétiques et des potentiels dont ils peuvent dériver. Ils font intervenir des degrés de liberté, associés aux nœuds, aux arêtes, aux facettes et aux volumes du maillage. De plus, la suite d'éléments finis développés permet d'interpoler des champs vectoriels sans imposer leur continuité totale, mais seulement celle de leur composantes tangentielle ou normale. Leur champs d'application est par conséquent plus général que celui des éléments finis classiques, nodaux, puisque ces derniers ne peuvent généralement assurer qu'une continuité totale.

L'étude de la distribution des courants induits dans des géométries avec une partie mobile a amené de façon naturelle à considérer la discrétisation du problème en question à l'aide d'une approche par décomposition de domaine. Dans ce type d'approche, la définition du repère pour la formulation du problème initial et l'imposition de conditions de transmissions, concernant la continuité des composantes tangentielle ou normale des champs aux interfaces communes entre sous-domaines adjacents, ont joué un rôle crucial dans le choix de la méthode numérique à appliquer (objet des Chapitres 4 et 5). Le passage en revue présentée dans le Chapitre 4 sur les méthodes existantes pour la prise en compte du mouvement et le raccordement de maillages aux interfaces du squelette

de la décomposition, a montré que l'approche eulerienne du problème et l'imposition "ponctuelle" des conditions de transmission ne sont pas satisfaisants ni du point de vue mathématique ni du point de vue numérique. Par contre, la méthode des joints, présentée dans le Chapitre 5, appliquée à une formulation lagrangienne du problème initial s'est révélée idéale pour la modélisation des courants induits sur ce type de géométries. Elle a permis de traiter élégamment des discrétisations spatiales non-conformes grâce au caractère "faible" avec lequel les conditions de transmissions sont imposées aux interfaces entre sous-domaines. De plus, il a été possible de modéliser un système couplé magnéto-mécanique où le mouvement de la partie géométrique mobile ne suit pas une loi imposée de l'extérieur mais dépend de la distribution de champ magnétique dans le domaine d'étude, distribution qui est, à son tour, influencée par le mouvement même.

Les éléments finis de Whitney se sont montrés bien adaptés pour être couplés avec la méthode de joints, soit de point de vue mathématique, pour l'optimalité des estimations d'erreurs, que de point de vue numérique lorsque de leur utilisation dans les différentes formulations discrètes des problèmes étudiés, pour les caractéristiques des systèmes algébriques à inverser (matrices bien conditionnées, symétriques, définies et creuses).

Les articles présentés dans les Chapitres 6,7,8 décrivent, l'ensemble des détails de la mise en œuvre de la méthode et les résultats numériques des logiciels développés. Ces résultats prouvent d'une part la précision de la méthode et d'une autre part sa flexibilité à modéliser les différents phénomènes physiques. De façon générale, comme on l'a décrit dans l'Annexe, l'introduction de la méthode des joints dans un logiciel d'éléments finis existant peut se faire en suivant la même démarche. On construit d'abord les matrices de raideur locales aux sous-domaines avec conditions de Neumann sur les interfaces communes; ensuite on les assemble en imposant la condition de couplage par l'intermédiaire des matrices Q et Q^T . Cette démarche caractérise toute application de la méthode des éléments avec joints avec des matrices locales et des conditions de couplage "propres" au problème considéré.

Cette approche a été suivie dans cette Thèse avec succès et on a aussi proposé une mise en œuvre plus sophistiquée reposant sur un algorithme par décomposition de domaine de type FETI. Ceci laisse espérer que la méthode des joints pour des problèmes plus complexes que ceux étudiés ici pourra bénéficier des algorithmes modernes de parallélisation.

Les travaux regroupés dans cette Thèse participent donc à la généralisation de la méthode des joints aux équations de Maxwell. Ils constituent à notre connaissance une première utilisation de cette méthode pour des configurations mobiles et une première mise en œuvre dans le cadre tridimensionnel.

Les perspectives de recherches futures sont nombreuses: elles concernent aussi bien l'exploitation que l'amélioration de ce que nous avons développés dans cette Thèse. Nous avons envisagé les point suivants:

- l'utilisation des codes de calcul développés pour mieux comprendre les aspects mathématique et physique de la répartition des champs électromagnétiques dans les structures considérées afin de faciliter les phases de conception et d'optimisation de dispositifs électrotechniques (il reste encore beaucoup à faire [122]);
- la modélisation mathématique et numérique de phénomènes magnéto-mécaniques avec plus d'attention vers le traitement des non linéarités, soit au niveau des lois de comportement soit au niveau des algorithmes de résolution;
- l'individuation des critères d'erreur pour l'adaptation isotrope et anisotrope des maillages;
- l'étude des préconditionneurs pour les matrices des systèmes algébriques qu'on est amené à résoudre, dans le cadre du calcul soit séquentiel soit parallèle.

Annexe

Nous présentons ici les structures des logiciels à éléments finis qu'on a utilisés pour l'approximation numérique des problèmes considérés. Cette présentation est faite dans le but de mettre en évidence les changements apportés à la structure de base des logiciels, rappelée dans la Section A.1, pour la mise en œuvre de la méthode avec joints. Les changements seront détaillés dans la Section A.2.

Cets programmes, écrits en langage Fortran 77 ou Fortran 90, constituent une première version de la mise en œuvre de la méthode, à partir de laquelle on pourra éventuellement s'inspirer pour en écrire (peut-être dans un langage de génération "supérieure") une version optimisée, mieux adaptée à une exploitation au niveau industriel.

A.1 Structure d'un logiciel à éléments finis

Le pré-traitement est une étape préliminaire à la simulation pendant laquelle l'utilisateur prépare toutes les données nécessaires à l'exécution du programme. Après, nous avons la phase dite de simulation où l'utilisateur fait exécuter les calculs à son logiciel avec les paramètres d'entrée définis au cours de la phase de pré-traitement. Enfin, dans la phase de post-traitement, l'utilisateur traite et visualise les résultats.

Le pré-traitement – La *discrétisation spatiale du domaine d'étude* constitue le premier pas du pré-traitement. Dans le cas général, cette tâche est prise en charge par un générateur automatique de maillages: pour la discrétisation d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, nous avons utilisé les modules de création du maillage de la bibliothèque MODULEF 3.04 pour $d = 2$ et SIMAIL 6.3 pour $d = 3$. Ces modules travaillent à partir d'un fichier des données qui contient la géométrie du domaine (sous forme de points, lignes, surfaces et liens entre ces entités géométriques) et des mots-clés à travers lesquels nous précisons le type de maillage et d'information qu'on désire à la sortie. La sortie standard d'un module de création de maillage est constituée par un ou plusieurs fichiers qui contiennent la description du maillage ainsi généré, élément par élément. Chaque élément est défini via les informations suivantes:

- son type géométrique (triangle, quadrangle, tétraèdre, hexaèdre, etc)
- son numéro de sous-domaine
- la liste de ses nœuds
- les attributs (numéro de référence) de ses nœuds.

De plus, nous avons la liste des coordonnées spatiales des nœuds du maillage dans un système de référence cartésien. Ceci représente l'information minimale en sortie d'un mailleur automatique et suffisante dans le cas d'un code à éléments finis nodaux. Nous remarquons que le numéro de référence est en général exploité dans le logiciel pour imposer des conditions aux limites sur les entités géométriques en question.

Si on travaille avec des éléments d'arêtes, nous avons besoin d'autres informations telles que la liste d'arêtes de chaque élément, l'orientation de ces arêtes par rapport à une orientation choisie sur l'élément de référence et les attributs des arêtes. Si on travaille avec des éléments de facette, il faut connaître encore d'autres informations telles que les nœuds, les arêtes et l'attribut de chaque face du maillage et pour chaque élément la liste de ses faces. Toute information additionnelle à celles que nous avons indiquées comme minimales, peut être déterminée à partir de la connaissance de la seule liste des nœuds de chaque élément à l'aide soit du mailleur même si possible, soit de quelques programmes personnels de traitement de maillage (comme dans notre cas).

Dans la phase de pré-traitement, l'utilisateur doit aussi préparer des fichiers contenant toutes les directives d'entrée et sortie pour le solveur. Les *fichiers d'entrée* contiennent en général:

- le nom du fichier du maillage,
 - le nom du fichier des paramètres physiques du problème,
- avec, pour un problème en temps,
- le pas de temps,
 - le nombre d'itérations temporelles ou le temps final de la simulation,
- et, pour inverser la matrice finale avec une méthode itérative,
- le nombre maximal d'itérations et la tolérance de l'erreur,
- et, pour la visualisation des résultats,
- le nom du fichier où l'on mémorise les résultats,
- plus d'autres paramètres qui sont propres du logiciel en question.

La simulation – La première étape dans le logiciel est une *phase d'initialisation* pendant laquelle on a

- la lecture de paramètres d'entrée,
- la lecture du maillage,
- la lecture des caractéristiques physiques du problème,

- l'allocation dynamique des tableaux à taille variable,
- le pré-traitement des conditions aux limites: toutes les inconnues liées aux entités géométriques avec condition au bord du type Dirichlet homogène ou périodiques sont éliminées de l'ensemble des inconnues du problème;
- l'estimation de l'espace mémoire nécessaire à contenir la matrice du système final selon le choix du type de stockage.

Pour la matrice (symétrique) du système algébrique final à inverser, nous avons utilisé un stockage du type profil pour les problèmes scalaires en deux dimensions, et condensé pour les problèmes vectoriels en deux et trois dimensions,

Le *stockage profil* d'une matrice symétrique A consiste en *deux* vecteurs monodimensionnels, $IPTR_A$ contenant des entiers et PTR_A contenant des réels. Le tableau PTR_A est rempli de la façon suivante: pour chaque ligne i , on garde tous les coefficients compris entre $A_{i,mc(i)}$ et $A_{i,i}$ nuls ou non ($mc(i)$ est le plus petit indice j de colonne tel que $A_{i,j} \neq 0$). Ces lignes sont alors rangées par ordre croissant dans PTR_A . Pour gérer la correspondance entre PTR_A et A , un pointeur $IPTR_A$ est nécessaire, ce qui donne pour chaque ligne i , l'adresse dans PTR_A du coefficient diagonale $A_{i,i}$. L'adresse ia dans PTR_A d'un coefficient quelconque $A_{i,j}$ est alors calculée par la formule (avec la convention $IPTR_A(1) = 0$)

$$ia = IPTR_A(i + 1) - i + j, \quad \text{pour } j \leq i.$$

Le cas où A n'est pas symétrique se traite de manière semblable, mais il faut cette fois stocker tous les coefficients de la matrice A . L'adresse ia dans PTR_A d'un coefficient quelconque $A_{i,j}$ est donnée par la formule (avec la convention $IPTR_A(1) = 0$)

$$\begin{aligned} ia &= IPTR_A(i + 1) - (IPTR_A(i + 1) - IPTR_A(i) - 1)/2 - i + j \quad \text{pour } i > j, \\ ia &= IPTR_A(i + 1) - j + i, \quad \text{pour } i \leq j. \end{aligned}$$

Le *stockage condensé* d'une matrice A , symétrique ou non, consiste en *trois* vecteurs monodimensionnels, $IPTR_A$ et $JPTR_A$ contenant des entiers et PTR_A contenant des réels. Le tableau PTR_A est rempli de la façon suivante: pour chaque ligne i , on ne garde que les coefficients $A_{i,j}$ non nuls, rangés par indice de colonne j croissant. Ces lignes sont alors rangées par ordre croissant dans PTR_A . Pour gérer la correspondance entre PTR_A et A , un pointeur $IPTR_A$ est nécessaire, qui donne pour chaque ligne i , l'adresse dans PTR_A du dernier coefficient non nul $A_{i,j}$. Enfin, un pointeur $JPTR_A$ de même taille que PTR_A , et rangé de manière cohérente donne pour chaque coefficient $A_{i,j}$ l'indice de colonne j correspondant. On ne stocke ainsi que les coefficients non nuls de la matrice A . L'adresse ia dans PTR_A d'un coefficient quelconque $A_{i,j}$ n'est pas accessible directement, car il faut rechercher l'indice de colonne j dans $JPTR_A$ entre les adresses $IPTR_A(i) + 1$

et $IPTR_A(i+1)$ (avec la convention $IPTR_A(1) = 0$).

Après la phase d'initialisation, nous avons la *résolution du système d'équations*: elle se déroule avec la construction préalable du système final suivi par son inversion. Pour des problèmes dans le temps, en présence de matériaux linéaires et structures en mouvement rigide, les matrices de masse et de raideur sont construites une fois à l'extérieur de la boucle en temps. La construction de ces deux matrices se fait de la façon suivante:

- on définit sur l'élément de référence les poids et les nœuds des formules de quadratures pour l'intégration numérique des intégrales de volume, de surface ou de ligne qui apparaissent dans la formulation discrète du problème,
- on calcule la valeur des fonctions de base des éléments finis choisis dans les nœuds d'intégration,
- pour chaque élément K du maillage:
 - on calcule les données élémentaires,
 - on définit les matrices et vecteurs de l'application de passage qui porte l'élément de référence dans l'élément K ,
 - on construit les matrices de masse et de rigidité locales à l'élément K .
- on assemble les contributions élémentaires dans les matrices globales de masse et de raideur selon le stockage choisi.

Pour un problème statique,

- nous calculons le deuxième membre du système final en faisant la boucle sur les éléments comme pour les matrices de masse et de rigidité,
- nous construisons le système final,
- nous imposons les conditions de Dirichlet non nulles,
- nous inversons le système à l'aide d'une méthode soit directe soit itérative.

S'il s'agit d'un problème en temps, on va répéter les quatre opérations vues pour le problème statique, à chaque pas de temps. La seule différence avec le cas statique est que la forme du système final dépend du schéma de discrétisation en temps choisi.

Après la solution du problème, nous avons une phase de *reconstruction de la solution* et de *sauvegarde des résultats* dans les différents fichiers selon les directives données au départ.

Nous pouvons résumer les différentes étapes de simulation dans un domaine Ω dans la structure du logiciel suivant.

début du programme

initialisation de toutes les variables pour le domaine Ω

construction des matrices de masse et de raideur pour le domaine Ω

début de la boucle en temps

----- à l'instant $t_{(n+1)}$ -----

construction du terme lié aux sources pour le domaine Ω

définition du système final (matrice et second membre) à résoudre dans le domaine Ω

inversion du système final pour le domaine Ω

préparation au pas de temps suivant dans le domaine Ω

fin de la boucle en temps

sauvegarde des résultats pour le domaine Ω

fin du programme

Le post-traitement – Cette phase consiste en le traitement et visualisation des résultats. Nous avons utilisé les modules de visualisation de MODULEF 3.04 pour avoir les résultats sous forme d'isovaleurs. Pour des courbes bidimensionnelles, nous avons choisi les paquets XMGR 4.1.2 ou bien GNUPLOT 3.7 et pour la visualisation sous forme de lignes de flux nous avons utilisé des modules de MATLAB 5.2.0. Pour les résultats en trois dimensions, soit on visualise sur des plans de coupe pré-définis et alors on s'appuie sur les outils indiqués pour la visualisation en deux dimensions, soit on utilise le paquet AVS/Express 4.0 qui nous permet aussi de faire des animations¹. Tous les résultats en deux dimensions que nous avons présenté dans les Chapitres 6,7,8 ont été obtenus sur une station Pentium Pro 200 MHz avec Linux comme système d'exploitation. Pour les calculs en trois dimensions, nous avons exécuté le logiciel sur une station Pentium II 400 MHz sous Linux.

¹Un exemple d'animation est sur la page web: <http://www.asci.fr/Francesca.Rapetti/figures2.html>.

A.2 Structure d'un logiciel à éléments finis avec joints

Dans cette section, nous allons montrer les changements importants qu'il faut apporter dans le logiciel à éléments finis considéré dans la section précédente, pour la mise en œuvre de la méthode des joints. A titre d'exemple, nous considérons un logiciel pour la discrétisation d'un problème magnétodynamique dans un domaine divisé en deux parties: une partie fixe, dite stator, et une partie qui peut éventuellement bouger, appelé rotor.

A.2.1 Sans couplage magnéto-mécanique

Le mouvement de la partie libre (rotor) est décrit par une loi imposée de l'extérieur par l'utilisateur.

```
début du programme
```

```
initialisation pour le domaine 1
```

```
construction des matrices de masse et de raideur pour le domaine 1
```

```
if (mortar) then
```

```
    initialisation pour le domaine 2
```

```
    construction des matrices de masse et de raideur pour le domaine 2
```

```
    if (.not. mouvement) then
```

```
        intersection des maillages sur l'interface |
        discrétisation de la condition de couplage | → matrice de couplage
```

```
    end if
```

```
end if
```

```
début de la boucle en temps
```

```
----- à l'instant  $t_{(n+1)}$  -----
```

```
construction du terme lié aux sources pour le domaine 1
```

```
définition du système final (matrice et second membre) à résoudre dans le domaine 1
```

```
if (mortar) then
```

```

construction du terme lié aux sources pour le domaine 2

définition du système final (matrice et second membre) à résoudre dans le domaine 2

if (mouvement) then
    définition de la position du rotor à l'instant  $t_{(n+1)}$ 
    (donnée par une loi fixée par l'utilisateur)

    intersection des maillages sur l'interface
    pour la position du rotor à l'instant  $t_{(n+1)}$ 
    discrétisation de la condition de couplage
    pour la position du rotor à l'instant  $t_{(n+1)}$ 
    |
    | → matrice de couplage
    | à l'instant  $t_{(n+1)}$ 
    |
end if

construction du système final réduit

inversion du système final réduit

reconstruction de la solution dans les deux domaines 1 et 2

préparation au pas de temps suivant dans les deux domaines 1 et 2

else

    inversion du système final pour le domaine 1

    préparation au pas de temps suivant dans le domaine 1

end if

fin de la boucle en temps

sauvegarde des résultats pour le domaine 1

if (mortar) then

    sauvegarde des résultats pour le domaine 2

end if

fin du programme

```

A.2.2 Avec couplage magnéto–mécanique

Le mouvement de la partie libre (rotor) est décrit par la loi solution des équations mécaniques.

début du programme

initialisation pour le domaine 1

construction des matrices de masse et de raideur pour le domaine 1

if (mortar) then

 initialisation pour le domaine 2

 construction des matrices de masse et de raideur pour le domaine 2

 if (.not. mouvement) then

intersection des maillages sur l'interface		→ matrice de couplage
discrétisation de la condition de couplage		

 end if

end if

début de la boucle en temps

----- à l'instant $t_{(n+1)}$ -----

construction du terme lié aux sources pour le domaine 1

définition du système final (matrice et second membre) à résoudre dans le domaine 1

if (mortar) then

 construction du terme lié aux sources pour le domaine 2

 définition du système final (matrice et second membre) à résoudre dans le domaine 2

 if (mouvement) then

```

définition de la position du rotor à l'instant  $t_{(n+1)}$  (donnée
par la solution des équations mécaniques au temps  $t_{(n+1)}$ )

intersection des maillages sur l'interface
pour la position du rotor à l'instant  $t_{(n+1)}$ 
discrétisation de la condition de couplage
pour la position du rotor à l'instant  $t_{(n+1)}$ 
end if

```

<pre> intersection des maillages sur l'interface pour la position du rotor à l'instant $t_{(n+1)}$ discrétisation de la condition de couplage pour la position du rotor à l'instant $t_{(n+1)}$ </pre>	<pre> → </pre>	<pre> matrice de couplage à l'instant $t_{(n+1)}$ </pre>
--	--------------------------	---

```

construction du système final réduit

inversion du système final réduit et calcul du champ à l'instant  $t_{(n+1)}$ 

calcul de la force et du couple magnétiques qui agissent sur le domaine 1

résolution des équation de la mécanique et définition de la position du rotor à l'instant  $t_{(n+2)}$ 

reconstruction de la solution dans les deux domaines 1 et 2

préparation au pas de temps suivant dans les deux domaines 1 et 2

else

inversion du système final pour le domaine 1

préparation au pas de temps suivant dans le domaine 1

end if

fin de la boucle en temps

sauvegarde des résultats pour le domaine 1

if (mortar) then

sauvegarde des résultats pour le domaine 2

end if

fin du programme

```

Les deux opérations qui sont propres de la méthode des joints et qui nécessite d'une certaine attention, sont:

- l'intersection des maillages à l'interface,
- la discrétisation de la condition de couplage.

Ces deux opérations ont été décrites en détail, pour les différents problèmes étudiés, dans les Articles 1, 2, 4. En trois dimensions, l'opération d'intersection des maillages est remplacée par une projection des maillages comme est décrit dans l'Article 6.

Bibliographie

- [1] Abdoulaev G., Kuznetsov Yu.A. et Pironneau O., *The numerical implementation of the domain decomposition method with mortar finite elements for a 3D problem*, tech. rep., Laboratoire d'Analyse Numérique, Univ. Pierre et Marie Curie, Paris, (1996).
- [2] Achdou Y., Kuznetsov Yu.A. et Pironneau O., *Substructuring preconditioners for finite element methods on nonmatching grids*, East-West J. Numer. Math., No.3, pp.1-28, (1995).
- [3] Achdou Y., Maday Y. et Widlund O., *Méthodes itératives de sous-structuration pour les éléments avec joints*, Note CRAS, Paris, t.322, Serie I, pp.185-190, (1995).
- [4] Albanese R. et Rubinacci G., *Magnetostatic field computation in terms of two-component vector potentials*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.29, pp.515-532, (1990).
- [5] Albanese R. et Rubinacci G., *Simulation of the eddy-current problem*, IEE Proceedings, Vol.137, Pt.A, No.1, pp.16-22, (1990).
- [6] Albanese R. et Rubinacci G., *Treatment of multiply connected regions in two-component electric vector potential formulations*, IEEE Trans. on Magn., Vol.26, No.2, pp.650-653, (1990).
- [7] Alonso A. et Valli A., *An optimal domain decomposition preconditioner for Low-Frequency Time-Harmonic Maxwell Equations*, Math. Comp., No.68, pp.607-631, (1999).
- [8] Anagnostou G., Patera A.T. et Maday Y., *A sliding mesh method for partial differential equations in nonstationary geometries: application to the incompressible Navier-Stokes equations*, tech. rep., Laboratoire d'Analyse Numérique, Univ. Pierre et Marie Curie, Paris, No.R91024, (1991).

- [9] Ben Abdallah A., Ben Belgacem F. et Maday Y., *Mortaring the two-dimensional "Nédélec" finite elements for the discretization of the Maxwell equations*, soumi au M^2AN , (1998).
- [10] Ben Belgacem F., *The mixed mortar finite element method for the incompressible Stokes problem: Convergence analysis*, SINUM, à paraître.
- [11] Ben Belgacem F., *The mortar finite element method with Lagrange multipliers*, Numer. Math., Vol.84, No.2, pp.173-195, (1999).
- [12] Ben Belgacem F. et Maday Y., *Non conforming spectral method for second order elliptic problems in three dimensions*, East-West J. Numer. Math., No.4, pp.235-251, (1993).
- [13] Ben Belgacem F. et Maday Y., *The mortar element method for three dimensional finite elements*, Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, RAIRO, Vol.31, pp.289-302, (1997).
- [14] Ben Belgacem F., Buffa A. et Maday Y., *The Mortar Finite Element Method for 3D Maxwell Equations: First Results*, C. R. Acad. Sci. Paris, t.329, Serie I, pp.903-908, (1999).
- [15] Berge A., Scott R. et Strang G., *Approximate boundary conditions in the finite element method*, Symposia Mathematica, Vol.X, pp.295-313, (1972).
- [16] Bernardi C. et Maday Y., *Raffinement de maillages en éléments finis par la méthode des joints*, Note CRAS, Analyse Numérique, t.320, Serie I, pp.373-377, (1995).
- [17] Bernardi, C., Maday Y. et Patera, A.T., *A new conforming approach to domain decomposition: the mortar element method*, Non Linear Partial Differential Equations and Applications, Collège de France Seminar, Pitman, pp.13-51, (1990).
- [18] Bertoluzza S. et Perrier V., *The mortar method in wavelets context*, Tech. Rep., Università di Pavia, (1999).
- [19] Biddlecombe C.S., Simkin J., Jay A.P., Sykulski J.K., Lepaul S., *Transient electromagnetic analysis coupled to electric circuits and motion*, IEEE Trans. on Magn., Vol.34, pp.3182-3185, (1998)
- [20] Biro O. et Preis K., *On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three dimensional eddy currents*, IEEE Trans. on Magn., Vol.25, pp.3145-3159, (1989).

- [21] Bjordstad P.E., Widlund O., *Iterative methods for solving elliptic problems on regions partitioned into substructures*, SIAM J. Num. Anal., Vol.23, No.6, pp.1097-1120, (1986).
- [22] Bossavit A., *On the numerical analysis of eddy-current problems*, Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol.27, pp.303-318, (1981).
- [23] Bossavit A. et Vérité J.C., *A mixed FEM–BIEM method to solve 3D eddy current problems*, IEEE Trans. on Magn., Vol.18, pp.431-435, (1982).
- [24] Bossavit, A., Electromagnétisme en vue de la modélisation, Springer-Verlag, France, (1986).
- [25] Bossavit, A., *Whitney forms: a class of finite elements for three dimensional computations in electromagnetism*, IEE Proc., Vol.135, Pt.A, No.8, pp.493-500, (1988).
- [26] Bossavit A., *Two dual formulations of the 3-D eddy-currents problem*, COMPEL, Vol.4, pp.103-116, (1985).
- [27] Bossavit A., *A rationale for ‘edge-elements’ in 3-D fields computations*, IEEE Trans. on Magn., Vol.24, No.1, pp.74-79, (1988).
- [28] Bossavit A., *Modèles et modélisation en   lectrotechnique*, Techniques de l’Ingénieur, traité Généralité, No.A 1 207, pp.1-25, (1989).
- [29] Bossavit A., *Le calcul des courants de Foucault en dimension 3, avec le champ électrique comme inconnue. I: Principes*, Revue Phys. Appl., Vol.25, pp. 189-197, (1990).
- [30] Bossavit A., *Notions de géométrie différentielle pour l’étude des courants de Foucault et des méthodes numériques en électromagnétisme*, dans Méthodes numériques en   lectromagn  tisme, Editions Eyrolles, pp.1-147, (1991).
- [31] Bossavit A., *Edge-element computation of the force field in deformable bodies*, IEEE Trans. on Magn., Vol.28, No.2, pp.1263-1266, (1992).
- [32] Bossavit A., *Differential forms and the computation of fields and forces in Electromagnetism*, European J. Mech. B/Fluids, Vol.10, No.5, pp.474-488, (1991).
- [33] Bossavit A., *Edge elements for magnetostatics*, Int. J. Num. Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields, Vol.9, pp.19-34, (1996).
- [34] Bossavit, A., Computational Electromagnetism. Variational Formulations, Complementarity, Edge Elements, Academic Press, (1998).

- [35] Boukari N., Lefèvre Y., Rebière O., Spitéri P., *Prise en compte dans un modèle 3D du mouvement du rotor d'un micromoteur électrostatique*, Colloque EF'99, Lille, pp.76-81, (1999).
- [36] Bouillault F., Razek A., *Hybrid numerical methods for movement consideration in electromagnetic systems*, IEEE Trans. on Magn., Vol.24, pp.259-261, (1988).
- [37] Bouillault F., Ren Z., Razek A., *Modélisation tridimensionnelle des courants de Foucault à l'aide de méthodes mixtes avec différentes formulations*, Revue Phys. Appl., Vol.25, pp.583-592, (1990).
- [38] Bouillault F., Buffa A., Maday Y., Rapetti F., *Simulation of a coupled magneto-mechanical system through the sliding-mesh mortar element method*, ISEF'99 proceedings, Pavia, pp.105-108, (1999).
- [39] Bouillault F., Buffa A., Maday Y., Rapetti F., *Simulation of a magneto-mechanical damping machine: analysis, discretization and results*, en préparation, (1999).
- [40] Braess D. et Dahmen W., *A multigrid algorithm for the mortar finite element method*, SINUM, à paraître, (1998).
- [41] Brezis H., Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, Paris, (1983).
- [42] Brezzi F., Douglas J., Marini L., *Two families of mixed elements for second order elliptic problems*, Numer. Math., No.47, pp.217-235, (1985).
- [43] Brown M.L., *Calculation of 3-dimensional eddy currents at power frequencies*, IEE Proc., Vol.129, Pt.A, No.1, pp.46-53, (1982).
- [44] Buffa A., Maday Y. and Rapetti F., *A sliding mesh-mortar method for a two dimensional eddy currents model of electric engines*, tech. rep., Laboratoire d'Analyse Numérique, Univ. Pierre et Marie Curie, No.R99002 (à paraître dans *M²AN*), (1999).
- [45] Buffa A., Maday Y., Rapetti F., *Calculation of eddy currents in moving structures by a sliding mesh-finite element method*, COMPUMAG'99 proceedings, Sapporo, pp.368-369, (à paraître dans IEEE Trans. on Magn.) (1999).
- [46] Buffa A., Maday Y., Rapetti F., *The Mortar Element Method for 3D Maxwell's equations: analysis and application to magnetodynamics*, Proceedings, 12th International Conference on Domain Decomposition, Chiba, (1999).
- [47] Burke W.L., Applied Differential Geometry, Cambridge University Press, (1985).

- [48] Carpenter C.J., *Comparison of alternative formulations of 3-dimensional magnetic-field and eddy-current problems at power frequencies*, IEE Proceedings, Vol.124, pp.1026-1034, (1977).
- [49] Ciarlet, P., The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, Amsterdam, (1978).
- [50] Ciarlet P.G., Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Masson, Paris, (1982).
- [51] Corson D.R., *Electromagnetic induction in moving systems*, Am. J. Phys., Vol.24, pp.126-130, (1956).
- [52] Coulomb J.L., *Finite element three dimensional magnetic field computation*, IEEE Trans. on Magn., Vol.17, pp.3241-3246, (1981).
- [53] Dautray R. et Lions J.-L., Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Volume 1, Modèles physiques, Masson, Paris, (1987).
- [54] Dautray R. et Lions J.-L., Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Volume 5, Spectre des opérateurs, Masson, Paris, (1988).
- [55] Dautray R. et Lions J.-L., Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Volume 6, Méthodes intégrales et numériques, Masson, Paris, (1988).
- [56] Davat B., Ren Z., Lajoie-Mazenc M., *The movement in field modeling*, IEEE Trans. on Magn., Vol.21, pp.2296-2298, (1985).
- [57] Dryja M., Smith B.F., Widlund O., *Schwarz analysis of iterative substructuring algorithms for elliptic problems*, SIAM J. Numer. Anal., Vol.31, No.6, pp.1662-1694, (1994).
- [58] Dubois F., *Discrete vector potential representation of a divergence-free vector field in three-dimensional domains: numerical analysis of a model problem*, SIAM J. Numer. Anal., Vol.27, No.5, pp.1103-1141, (1990).
- [59] Durand E., Electrostatique et magnétostatique, Masson, Paris, (1990).
- [60] Emson C.R.I., Riley C.P., Walsh D.A., Ueda K., Kumano T., *Modelling eddy currents induced in rotating systems*, IEEE Trans. on Magn., Vol.34, pp.2593-2596, (1998).

- [61] Farhat C. et Roux F.-X., *A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm*, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.32, pp.1205-1227, (1991).
- [62] Farhat C. et Roux F.-X., *Implicit parallel processing in structural mechanics*, Computational Mechanics Advances, J. Tinsley Oden editor, Vol.2, No.1, pp.1-124, (1994).
- [63] Farhat C., Mandel J., Roux F.-X., *Optimal convergence properties of the FETI domain decomposition method*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol.115, pp.367-388, (1994).
- [64] Feliachi M., *Contribution au calcul du champ électromagnétique par la méthode des éléments finis en vue d'une modélisation dynamique de machines électriques*, Thèse de doctorat, LGEP, (1981).
- [65] Gaspalou B., Colamartino F., Marchand C., Ren Z., *Simulation of an electromagnetic actuator by a coupled magneto-mechanical modelling*, COMPEL, Vol.14, pp.203-206, (1995).
- [66] Giblin P.J., Graphs, Surfaces and Homology. An Introduction to Algebraic Topology, Chapman and Hall Mathematical Series, John Wiley & Sons, New York, (1977).
- [67] Girault V. et Raviart P.-A., Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations – Theory and Algorithms, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (1986).
- [68] Golovanov C., *Développement de formulations éléments finis 3D en potentiel vecteur magnétique: application à la simulation de dispositifs électromagnétiques en mouvement*, Thèse de doctorat, INP Grenoble, (1992).
- [69] Golovanov O., Coulomb J.L., Maréchal Y., Meunier G., *3D mesh connection techniques applied to movement simulation*, IEEE Trans. on Magn., Vol.34, pp.3359-3362, (1998).
- [70] Golub G.H., Van Loan C.F., Matrix Computations, North Oxford Academic & John Hopkins U.P., (1983).
- [71] Greenberg M.J., Harper J.R., Algebraic Topology, A First Course, Benjamin/Cummings (Reading, MA) (1981).
- [72] Hetch F., Marrocco A., *A finite element simulation of an alternator connected to a non linear external circuit*, COMPUMAG Proc., Tokyo, (1989).

- [73] Hoppe R.H.W., *Mortar edge element methods in \mathbb{R}^3* , soumis au East-West J. Numer. Math., (1999).
- [74] Ida N., Bastos J.P.A., Electro-magnetics and calculation of fields, Springer-Verlag, New York, (1997).
- [75] Kameari A., *Three dimensional eddy current calculation using finite element method with A-V in conductor and Ω in vacuum*, IEEE Trans. on Magn., Vol.24, pp.118-121, (1988).
- [76] Kameari A., *Calculation of transient 3D eddy current using edge elements*, IEEE Trans. on Magn., Vol.26, pp.466-469, (1990).
- [77] Klawonn A. et Widlund O., *A modified FETI preconditioner for elliptic problems*, Technical report, Department of Computer Science, Courant Institute (en preparation, 1998).
- [78] Kometani H., Sakabe S., Kameari A., *3-D analysis of induction Motor with skewed slots using regular coupling mesh*, COMPUMAG'99 proceedings, Sapporo, pp.98-99, (1999).
- [79] Konrad A., *The zero divergence constraint in 3D vector finite element methods*, COMPEL, Vol.9, Supplement A, pp.7-16.
- [80] Kosniowski C., A first course in algebraic topology, Cambridge University Press, (1980).
- [81] Kotiuga P.R., *On making cuts for magnetic scalar potentials in multiply connected regions*, J. Appl. Phys., Vol.61, No.8, pp.3916-3918, (1987).
- [82] Kotiuga P.R., *Correspondance on magnetostatics with scalar potentials in multiply connected regions*, IEE Proc., Vol.137, Pt.A, No.4, pp.230-231, (1990).
- [83] Kurz S., Fetzner J., Lehner G., Rucker W. M., *A novel formulation for 3D eddy current problems with moving bodies using a Lagrangian description and BEM-FEM coupling*, IEEE Trans. on Magn., Vol.34, pp.3068-3073, (1998).
- [84] Jackson J.D., Classical Electrodynamics, New York, NY: Wiley, (1952).
- [85] Johnson C., Numerical solution of partial differential equations by the finite element method, Cambridge University Press, Cambridge, (1987).

- [86] Lacour C., *Analyse et Resolution Numérique de Méthode de Sous-Domaines Non Conformes pour des Problèmes de Plaques*, Thèse de doctorat, Univ. Pierre et Marie Curie, Paris, (1997).
- [87] Lacour C., *Iterative substructuring preconditioners for the mortar finite element method*, Proceedings of the Ninth International Conference of Domain Decomposition Methods, (1997).
- [88] Lambert J.D., Computational Methods in Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, (1973).
- [89] Landau L.D., Lifschitz E.M., Course of Theoretical Physics, Vol.VIII: Electrodynamics of Continuous Media, Pergamon Press, Oxford, (1984).
- [90] Lefèvre Y., *Etude de la répartition des efforts électromagnétiques dans les machines synchrones à aimant permanents et commutation électronique. Détermination des vibrations d'origines magnétiques*, Thèse de doctorat, INPT, (1988).
- [91] Lewis R.W., Numerical method in coupled system, John Wiley & Son, (1984).
- [92] Lions P.L., *On the Schwarz alternating method I*, Proceedings of the First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, R. Glowinski, G.H. Golub, G.-A. Meurant, J. Périaux, eds., SIAM, Philadelphie, USA, pp.1-42 (1988).
- [93] Lions P.L., *On the Schwarz alternative principle III: a variant for non-overlapping subdomains*, Proceedings of the Fourth International Conference on Domain Decomposition Methods, Huston, Texas, (1989).
- [94] Mandel J. et Tezaur R., *Convergence of a substructuring method with Lagrange multipliers*, Numer. Math., Vol.73, PP.473-487, (1996).
- [95] Maréchal Y., *Modélisation des phénomènes magnétostatiques avec term de transport. Applications aux ralentisseurs électromagnétiques*, Thèse de doctorat, INP Grenoble, (1991).
- [96] Maréchal Y., Meunier G., Coulomb J.L., Magnin H., *A general purpose tool for restoring inter-element continuity*, IEEE Trans. on Magn., Vol.28, pp.1728-1731, (1992).
- [97] Mohellebi H., Féliachi M., *A fast macro-element coupled with finite elements for movement simulation in axisymmetric electromagnetic devices*, COMPUMAG'99 proceeding, Sapporo, pp.566-567, (1999).

- [98] Morisue T., Fukumi K., *3D eddy current calculations using the magnetic vector potential*, IEEE Trans. on Magn., Vol.24, pp.106-109, (1988).
- [99] Mur G., de Hoop A.T., *A finite-element method for computing three-dimensional electromagnetic fields in inhomogeneous media*, IEEE Trans. on Magn., Vol.19, pp.2188-2191, (1985).
- [100] Nédélec J.C., *Mixed finite elements in \mathbb{R}^3* , Numer. Math., Vol.35, pp.315-341, (1980).
- [101] Nédélec J.C., *A new family of mixed finite elements in \mathbb{R}^3* , Numer. Math., Vol.35, pp.57-81, (1986).
- [102] Nicolet A., Delincé F., Genon A., Legros W., *Finite elements - boundary elements coupling for the movement modeling in two dimensional structures*, J. de Phys.III, No.2, pp.2035-2044, (1992).
- [103] Perrin-Bit R., *Modélisation des machines électriques tournantes par la méthode des éléments finis tridimensionnels: calcul des grandeurs magnétiques avec prise en compte du mouvement*, Thèse de doctorat, INP Grenoble, (1994).
- [104] Preis K., Bardi I., Biro O., Magele C., Vrisk G., Richter K.R., *Different finite element formulations of 3D Magnetostatics fields*, IEEE Trans. on Magn., Vol.28, pp.1056-1059, (1992).
- [105] Quarteroni A., Valli A., Numerical approximation of partial differential equations, Springer-Verlag, Berlin, (1994).
- [106] Quarteroni A., Valli A., Domain decomposition methods for partial differential equations, Oxford Science Publications, (1999).
- [107] Rapetti F., Santandrea L., Bouillault F., Razek A., *Calculation of eddy currents in moving structures using a finite element method on non-matching grids*, COMPEL, Vol.19, No.1, pp.10-29, (2000).
- [108] Rapetti F., *The mortar edge element method on non-matching grids for eddy current calculations in moving structures*, soumis au International Journal for Numerical Methods in Engineering, (1999).
- [109] Rapetti F., Bouillault F., Santandrea L., Buffa A., Maday Y., Razek A., *Calculation of eddy currents with edge elements on non-matching grids in moving structures*, COMPUMAG'99 proceedings, Sapporo, pp.366-367, (à paraître dans IEEE Trans. on Magn.) (1999).

- [110] Rapetti F., Buffa A., Bouillault F., Maday Y., *Simulation of a coupled magneto-mechanical system through the sliding-mesh mortar element method*, COMPEL, Vol.19, No.2, (2000).
- [111] Rapetti F., Bouillault F., Maday Y., *The mortar edge element method in three dimensions: application to magnetostatics*, en préparation, (1999).
- [112] Rapetti F., Toselli A., *A FETI preconditioner for two dimensional edge element approximations of Maxwell equations on non-matching grids*, Tech. Rep.797, Department of Computer Science, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York Univ., (soumis au SIAM J. Scien. Comp.) (2000).
- [113] Raviart P.A. et Thomas J.M., *A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems*, in Mathematical Aspect of Finite Element Methods, A. Dold and B. Eckmann Editions, Lecture Notes, No.606, Springer-Verlag, (1977).
- [114] Razek A., Coulomb J., Felliachi M., Sobonnadière J., *Conception of an air-gap element for dynamic analysis of the electromagnetic fields in electric machines*, IEEE Trans. on Magn., Vol.18, pp.655-659, (1982).
- [115] Ren Z., Razek A., *A strong coupled model for analysing dynamic behaviour of non-linear electromechanical systems*, IEEE Trans. on Magn., Vol.30, pp.3252-3255, (1994).
- [116] Ren Z., Razek A., *Boundary edge elements and spanning tree technique in three-dimensional electromagnetic field computation*, Int. J. Num. Meth. in Engng., Vol.36, pp.2877-2893, (1993).
- [117] Ren Z., Razek A., *Computation of 3D electromagnetic field using differential forms based elements and dual formulations*, Int. J. Num. Mod., Vol.9, pp.81-98, (1996).
- [118] Ren Z., *Influence of the R.H.S. on the convergence behaviour of the curl-curl equation*, IEEE Trans. on Magn., Vol.32, pp.655-658, (1996).
- [119] Robinson F.N.H., Macroscopic Electromagnetism, Oxford: Pergamon Press, (1973).
- [120] Rodger D., Karaguler H.T., Leonard P.J., *A formulation for 3D moving conductor eddy current problems*, IEEE Trans. on Magn., Vol.25, pp.4147-4149, (1989).
- [121] Rodger D., Lai H.C., Leonard P.J., *Coupled elements for problems involving movement*, IEEE Trans. on Magn., Vol.26, pp.548-550, (1990).

- [122] Rodger D., *Electrical machines ... a challenge for the year 00 ?*, ICS Newsletter, Vol.6, No.2, pp.5-7, (1999).
- [123] Roux F.-X., *Méthode de décomposition de domaine à l'aide de multiplicateur de Lagrange et application à la résolution en parallèle des équations de l'élasticité linéaire*, Thèse de Doctorat de l'Université de Paris VI, (1989).
- [124] Sadowski N., Lefèvre Y., Lajoie-Mazenc M., Cros J., *Finite element torque calculation in electrical machines while considering the movement*, IEEE Trans. on Magn., Vol.28, pp.1410-1413, (1992).
- [125] Stefanica D. et Klawonn A., *A numerical Study of a Class of FETI Preconditioners For Mortar Finite Elements in Two Dimensions*, (1998).
- [126] Stratton J.A., Electromagnetic theory, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, (1941).
- [127] Tarhasaari T., Koski A., Forsman K., Kettunen L., *Hybrid formulations for eddy current problem with moving objects*, IEEE Trans. on Magn., Vol.34, pp.2660-2663, (1998).
- [128] Toselli A. et Klawonn A., *A FETI decomposition method for Maxwell's equations with discontinuous coefficients in two dimensions*, Tech. Rep.788, Department of Computer Science, Courant Institute, (soumis au SIAM J. Numer. Anal.) (1999).
- [129] Tsukerman I.J., *Overlapping finite elements for problems with movement*, IEEE Trans. on Magn., Vol.28, pp.2247-2249, (1992).
- [130] Vassallo C., Electromagnétisme classique dans la matière, Dunod, Paris, (1980).
- [131] Vassent E., *Contribution à la modélisation des moteurs asynchrones par la méthode des éléments finis*, Thèse de doctorat, INP Grenoble, (1990).
- [132] Vassent E., Meunier G., Foggia A., Reyne G., *Simulation of induction machine operation using a step by step finite element method coupled with circuits and mechanical equations*, IEEE Trans. on Magn., Vol.27, No.6, pp.5232-5234, (1991).
- [133] Wait J.R. Electromagnetic wave theory, John Wiley & Sons, Inc., New York, (1987).
- [134] Webster D.L., Whitten R.C., *Which electromagnetic equations apply in rotating coordinates ?*, Astrophysics and Space Science, Vol.24, pp.323-333, (1973).
- [135] Whitney H., Geometric Integration Theory, Princeton U.P., Princeton, (1957).

- [136] Wohlmuth B., *A residual based error estimator for mortar finite element discretizations*, tech. rep., Math.-Nat. Fakultät, Universität Augsburg, No.370, (1997).