# Analyse Numérique
## Corrigé du TD 6

**EXERCICE 1**
**Matrices diagonales, triangulaires**

### 1.1 Matrices diagonales

**Soit** $D = (d_{ii})_{i=1,\dots,n}$ **une matrice diagonale d'ordre** $n > 0$**. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que** $D$ **soit inversible.**

On peut représenter $D$ sous forme du tableau suivant :

$$\begin{pmatrix} d_{11} & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & d_{ii} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Comme $det\ D = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}$, on a

$$D \text{ inversible } \iff det\ D \neq 0 \iff d_{ii} \neq 0\,, \quad \forall\, i = 1, ..., n\,.$$

### 1.2 Matrices triangulaires inférieures

**Soit** $L = (l_{ij})_{i,\, j=1,\dots,n}$ **une matrice triangulaire inférieure d'ordre** $n > 0$**.**

**a. Sous quelle condition nécessaire et suffisante** $L$ **est-elle inversible ?**

La matrice $L$ peut se mettre sous la forme suivant :

$$\begin{pmatrix} l_{11} & & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ l_{1i} & & l_{ij} & l_{ii} & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ \vdots & & & & l_{n-1\,n-1} & \\ l_{n\,1} & & l_{nj} & \dots & l_{n\,n-1} & l_{nn} \end{pmatrix},$$

d'où la matrice triangulaire inférieure $L$ peut être caractérisée par :

$$l_{ij} = 0 \text{ si } i < j, \forall\, i, j = 1, ..., n\,.$$

Puisque $det\ L = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}$, on a

$$L \text{ inversible } \iff det\ L \neq 0 \iff l_{ii} \neq 0\,, \quad \forall\, i = 1, ..., n\,.$$

**b. On suppose que la matrice triangulaire inférieure $L$ est inversible. Soit $b$ un vecteur colonne ayant $n$ composantes.**

**Donner un algorithme qui permet de résoudre l'équation d'inconnue $y$ :**

$$L\, y = b\,. \tag{1.1}$$

Comme $l_{ii} \neq 0\,, \ \ \forall\, i = 1, ..., n$, la résolution du système (1.1) s'écrit

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= \frac{b_1}{l_{11}}\,, \\ y_i &= \frac{1}{l_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j\right), \quad \forall\, i = 2, ..., n\,. \end{aligned}} \tag{1.2}$$

**Quel est le coût de cet algorithme en termes d'opérations élémentaires (additions, multiplications, divisions) ?**

Le calcul de $y_1$ demande 1 division (div) dans l'algorithme (1.2).
Pour $i$ fixé dans $\{1, ..., n\}$, le calcul de $y_i$ par l'algorithme (1.2) requiert 1 division (div), $i-1$ additions (add) et $i-1$ multiplications (mult).
Au total le coût $\mathcal{C}_L$ de l'algorithme (1.2) est

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_L &= 1 \text{ div} + \sum_{i=2}^{n} \Big( (i-1) \text{ add} + (i-1) \text{ mult} + 1 \text{ div} \Big) \\ &= 1 \text{ div} + \sum_{i=2}^{n} 1 \text{ div} + \sum_{k=1}^{n-1} k \text{ add} + \sum_{k=1}^{n-1} k \text{ mult} \\ &= \frac{(n-1)n}{2} \text{add} + \frac{(n-1)n}{2} \text{mult} + n \text{ div}\,. \end{aligned}$$

Le nombre d'opérations élémentaires $\mathcal{C}_L$ est de l'ordre de $n^2$, *i.e.* $\mathcal{C}_L = O(n^2)$.

## 1.3 Matrices triangulaires supérieures

On considère une matrice triangulaire supérieure $U$ d'ordre $n > 0$ .

**a. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $U$ soit inversible.**

La matrice $U$ peut se mettre sous la forme suivant :

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & & \cdots & u_{1j} & u_{1\,n-1} & u_{1n} \\ & u_{22} & & & & u_{2\,n-1} & u_{2\,n} \\ & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & u_{ii} & u_{ij} & & u_{in} \\ & & 0 & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & u_{n-1\,n-1} & u_{n-1\,n} \\ & & & & & & u_{nn} \end{pmatrix},$$

d'où la matrice triangulaire inférieure $U$ peut être caractérisée par :

$$u_{ij} = 0 \text{ si } i > j, \forall\, i, j = 1, ..., n\,.$$

Comme $det\ U = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$, on a

$$U \text{ inversible } \iff det\ U \neq 0 \iff u_{ii} \neq 0\,, \quad \forall\, i = 1, ..., n\,.$$

**b. On suppose que la matrice triangulaire supérieure $U$ est inversible. Soit $y$ un vecteur colonne donné ayant $n$ composantes.**

**Écrire un algorithme qui permet de résoudre l'équation d'inconnue $x$ :**

$$U\,x = y\,. \tag{1.3}$$

Les $u_{ii}$ étant non nuls, l'inconnue $x$ solution du système linéaire (1.3) est donnée par

$$\boxed{\begin{array}{l} x_n = \dfrac{y_n}{u_{nn}}\,, \\ x_i = \dfrac{1}{u_{ii}} \left( y_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} y_j \right), \ \ \forall\, i = 1, ..., n-1\,. \end{array}} \tag{1.4}$$

**Donner la complexité de cet algorithme.**

Le calcul de $x_n$ requiert 1 multiplication (mult) dans l'algorithme (1.4).
Pour $i$ fixé dans $\{1, ..., n\}$, le calcul de $x_i$ par l'algorithme (1.4) demande 1 division (div), $n - i$ additions (add) et $n - i$ multiplications.

Par suite le coût $\mathcal{C}_U$ de l'algorithme (1.4) est

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_U &= 1 \text{ div} + \sum_{i=1}^{n-1}\Big((n-i) \text{ add} + (n-i) \text{ mult} + 1 \text{ div}\Big)\\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k \text{ add} + \sum_{k=1}^{n-1} k \text{ mult} + 1 \text{ div} + \sum_{i=1}^{n-1} 1 \text{ div}\\ &= \frac{(n-1)n}{2}\text{add} + \frac{(n-1)n}{2}\text{mult} + n \text{ div}\,.\end{aligned}$$

Le nombre d'opérations élémentaires $\mathcal{C}_U$ est de l'ordre de $n^2$, *i.e.* $\mathcal{C}_U = O(n^2)$..

**Vocabulaire**
L'algorithme (1.2) pour inverser les systèmes triangulaires inférieurs est dit **descente** ou **substitution directe**. L'algorithme (1.4) pour résoudre les systèmes triangulaires supérieurs est dit **remontée** ou **substitution rétrograde**.

# EXERCICE 2
# Méthode d'élimination de Gauss

## 2.1 Des exemples

**Effectuer une élimination de Gauss sur les système linéaires suivants**

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2\\ 8 & 0 & -2 & -2\\ 2 & 9 & 1 & 3\\ 2 & 1 & -3 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\\ -2\\ -8\\ -4 \end{pmatrix}.$$

*Premier exemple*
Nous écrivons le premier système sous la forme du tableau

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 6 & -6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1\\ L_2\\ L_3 \end{matrix}$$

• On effectue l'élimination de Gauss. On a successivement

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 0.5\, L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - 0.5\, L_1 \end{matrix} \tag{2.1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3\,L_2$$

On obtient alors le système triangulaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & & & 7x_3 & = & -7 \end{array} \right.$$

En utilisant l'algorithme de remontée (1.2) on a successivement
$x_3 = -1\,, x_2 = -1\,, x_1 = 5.$
L'élimination de Gauss ci-dessus est dite **sans permutation**.

• On peut par exemple à l'étape (2.1) ci-dessus, remplacer le pivot 1 par le coefficient 3 de $x_2$ de la dernière ligne, parce que $3 > 1$ donne plus de stabilité numérique. Dans ce cas on dit que l'on fait une élimination de Gauss avec **pivot partiel**. Dans ce contexte on obtient

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \longleftrightarrow L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -\dfrac{7}{3} & \dfrac{7}{3} \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3} \times L_2$$

D'où on obtient le système triangulaire supérieur suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ & & 3x_2 & + & 4x_3 & = & -7 \\ & & & - & \dfrac{7}{3}x_3 & = & \dfrac{7}{3} \end{array} \right.$$

En appliquant l'algorithme de remontée à ce système on obtient
$x_3 = -1\,, x_2 = -1\,, x_1 = 5.$

• On peut enfin par exemple à l'étape (2.1) ci-dessus, remplacer le pivot 1 par le coefficient le plus grand en module dans la sous-matrice

$$\boxed{\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{array}}$$

Ceci rend la méthode plus stable numériquement. Ici on trouve 4 comme nouveau pivot. Dans ce cas on dit que l'on fait une élimination de Gauss avec **pivot partiel**. Dans ce contexte on obtient

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_2 \longleftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & -7 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad c_2 \longleftrightarrow c_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix} \qquad L_3 \longleftarrow L_3 + \frac{1}{4}L_2$$

Cette dernière transformation donne le système linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_3 & + & 4x_2 & = & 2 \\ & + & 4x_3 & + & 3x_2 & = & -7 \\ & & & & \frac{7}{4}x_2 & = & -\frac{7}{4} \end{array} \right.$$

Par application de l'algorithme de remontée au système triangulaire ci-dessus on obtient :

$$x_2 = -1\,, x_3 = -1\,, x_1 = 5.$$

*Deuxième exemple*

On met le deuxième exemple sous forme du tableau suivant

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 & 6 \\ 8 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 9 & 1 & 3 & -8 \\ 2 & 1 & -3 & 10 & -4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \end{array}$$

puis on effectue

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -50 & -18 & -50 \\ 0 & 9 & -11 & -1 & -20 \\ 0 & 1 & -15 & 6 & -16 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 8L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array} \tag{2.2}$$

La matrice obtenue après la $1^{\text{ière}}$ étape d'élimination (2.2) a pour pivot 0. Pour continuer la méthode de Gauss, on peut soit utiliser la stratégie de pivot partiel ou soit celle de pivot total.

- *Pivot partiel* : on prend comme pivot le plus grand élément de la colonne

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cela revient à échanger la 2$^{\text{ième}}$ et la 3$^{\text{ième}}$ lignes. On obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 & 6 \\ 0 & 9 & -11 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -50 & -18 & -50 \\ 0 & 1 & -15 & 6 & -16 \end{pmatrix} \qquad L_2 \longleftrightarrow L_3$$

On continue l'élimination :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 & 6 \\ 0 & 9 & -11 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -50 & -18 & -50 \\ 0 & 0 & -\dfrac{124}{9} & \dfrac{55}{9} & -\dfrac{124}{9} \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{9} L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 & 6 \\ 0 & 9 & -11 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -50 & -18 & -50 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{2491}{225} & 0 \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{50}\frac{124}{9} L_3$$

On déduit le système triangulaire supérieur suivant

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrrrcr} x_1 & & & + & 6\,x_3 & + & 2\,x_4 & = & 6 \\ & & 9\,x_2 & - & 11\,x_3 & - & x_4 & = & -20 \\ & & & - & 50\,x_3 & - & 18\,x_4 & = & -50 \\ & & & & & + & \dfrac{2491}{225}\,x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

D'où par la formule de remontée on trouve

$$x_4 = 0\,, x_3 = 1\,, x_2 = -1\,, x_1 = 0.$$

• *Pivot total* : On part de l'étape (2.2) de l'élimination de Gauss. Le plus grand élément en module de la sous-matrice

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 0 & -50 & -18 \\ 9 & -11 & -1 \\ 1 & -15 & 6 \end{array}}$$

est $-50$, qui se trouve à la 2$^{\text{ième}}$ ligne et à la 3$^{\text{ième}}$ colonne de la matrice de départ. On positionne $-50$ en pivot, en échangeant la 2$^{\text{ième}}$ colonne et la 3$^{\text{ième}}$ colonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -50 & 0 & -18 & -50 \\ 0 & -11 & 9 & -1 & -20 \\ 0 & -15 & 1 & 6 & -16 \end{pmatrix} \qquad c_2 \longleftrightarrow c_3$$

On continue l'élimination :

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -50 & 0 & -18 & -50 \\ 0 & 0 & 9 & \dfrac{74}{25} & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{285}{25} & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_3 \longleftrightarrow L_3 - \dfrac{11}{50}L_2 \\ L_4 \longleftrightarrow L_4 - \dfrac{15}{50}L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -50 & 0 & -18 & -50 \\ 0 & 0 & 9 & \dfrac{74}{25} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{2491}{225} & 0 \end{pmatrix} \qquad L_4 \longleftrightarrow L_4 - \dfrac{1}{9}L_3$$

Ce qui conduit au système linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 6x_3 & & & + & 2x_4 & = & 6 \\ & - & 50x_3 & & & - & 18x_4 & = & -50 \\ & & & & 9x_2 & + & \dfrac{74}{25}x_4 & = & -9 \\ & & & & & & \dfrac{2491}{225}x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

dont la solution est

$$x_4 = 0\,, x_2 = -1\,, x_3 = 1\,, x_1 = 0.$$

## 2.2 Cas général

**On considère maintenant le cas général d'un système linéaire $A\,x = b$.**

**a. Écrire un algorithme de résolution de ce système par la méthode de Gauss.**

On écrit l'algorithme dans le cas avec pivot partiel. En modifiant l'étape de la recherche de pivot, on obtient soit l'algorithme de pivot total ou soit l'élimination de Gauss sans permutation.

```
//Triangulation
pour i allant de 1 à n − 1 faire

        //Recherche du pivot partiel
            numlignepiv = i
            pour k allant de i à n faire
                si |A(k, i)| > |A(numlignepiv, i)| alors
                    numlignepiv = k
                finsi

            //On met le pivot à sa place
                si numlignepiv ≠ i alors
                  //On échange les lignes numlignepiv et i
                    pour j allant de i à n faire
                      tampon = A(numlignepiv, j)
                      A(numlignepiv, j) = A(i, j)
                      A(i, j) = tampon
                    finpour
                finsi
            finpour

        //Elimination
            pivot = A(i, i)
            pour k allant de i + 1 à n faire
              factpivot = A(k, i) / pivot
              pour j allant de i à n faire
                A(k, j) = A(k, j) − factpivot ∗ A(i, j)
              finpour
              b(k) = b(k) − factpivot ∗ b(i)
            finpour
```

//Résolution par la remontée

$X(n) = \dfrac{b(n)}{A(n,n)}$

**pour** $i$ **allant de** $n-1$ **à** $1$ **par pas de** $-1$ **faire**

  **pour** $j$ **allant de** $i+1$ **à** $n$ **faire**

    $b(i) = b(i) - A(i,j) * X(j)$

  **finpour**

    $X(i) = \dfrac{b(i)}{A(i,i)}$

**finpour**

**b. Donner la complexité de cet algorithme.**

Le coût des opérations calculé ici ne tient pas compte de la recherche du pivot.

On s'intéresse à la partie "élimination" de l'algorithme ci-dessus. Considérons la ième étape de l'élimination, $i \in \{1, ..., n\}$. Pour chaque ligne $k$ allant de $i+1$ à $n$ on fait les opérations suivantes :

– une division (div) afin de calculer une fois pour toute le coefficient permettant d'obtenir des zéros sous le pivot ;
– une adddition (add) et une multiplication (mult) permettant de mettre à jour chaque coefficient de la ligne $k$, ce qui correspond à toutes les colonnes de numéros $j$ variant de $i$ à $n$ ;
– une addition (add) et une multiplication (mult) permettant de mettre à jour le second membre de la ligne $k$, *i.e.* $b(k)$.

Le nombre d'opérations pour l'élimination de Gauss avec prise en compte du second membre s'écrit donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_E &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} \left[ 1 \text{ div} + \left( \sum_{j=i}^{n} (1 \text{ add} + 1 \text{ mult}) \right) + 1 \text{ add} + 1 \text{ mult} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} \left[ 1 \text{ div} + (n-i+1) \text{ add} + (n-i+1) \text{ mult} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ (n-i)\text{div} + (n-i)(n-i+1) \text{ add} + (n-i)(n-i+1) \text{ mult} \right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_E &= \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\ \text{div} + \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i+1)\text{add} + \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i+1)\ \text{mult}\\
&\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\ \text{div} + \Big(\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) + \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^2\Big)\ \text{add} + \Big(\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) + \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^2\Big)\\
&= \sum_{l=1}^{n-1} l\ \text{div} + \Big(\sum_{l=1}^{n-1} l + \sum_{l=1}^{n-1} l^2\Big)\ \text{add} + \Big(\sum_{l=1}^{n-1} l + \sum_{l=1}^{n-1} l^2\Big)\ \text{mult}\\
&= \frac{(n-1)n}{2}\ \text{div} + \frac{(n-1)n}{2}\ \text{add} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\ \text{add}\\
&\qquad\qquad + \frac{(n-1)n}{2}\ \text{mult} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\ \text{mult}\,.
\end{aligned}
$$

Il vient le nombre d'opérations de la partie élimination de l'algorithme de Gauss est de l'ordre $n^3$ : $\mathcal{C}_E = O(n^3)$.
Or dans l'exercice 3 on a montré que l'algorithme de remontée est de l'ordre de $n^2$, $\mathcal{C}_U = 0(n^2)$. Au total l'algorithme d'élimination de Gauss avec résolution du système linéaire $Ax = b$ est de l'ordre de $n^3$, *i.e.* $O(n^3)$ où la matrice carrée $A$ est d'ordre $n$.

## EXERCICE 3
## Factorisation LU

### 3.1 Un exemple

**On revient sur la première matrice donnée dans l'exercice 2 :**

$$
\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.
$$

**Effectuer une factorisation $LU$ de cette matrice où $L$ est une matrice triangulaire inférieure ayant des $1$ sur sa diagonale et $U$ est une matrice triangulaire supérieure.**

*Décomposition LU*
Les mineurs principaux de la matrice proposée sont

$$\begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0\,, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0\,, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 14 \neq 0\,,$$

Donc on peut la factoriser sous la forme $LU$ où $L$ est une matrice triangulaire inférieure ayant des 1 sur sa diagonale et $U$ est une matrice triangulaire supérieure.

*Identification directe* Comme la matrice proposée est d'ordre 3, on peut écrire complètement le produit $LU$ et faire des identifications. On écrit :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} ,$$

d'où on obtient

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{11} & = & 2 \\ u_{12} & = & 4 \\ u_{13} & = & 4 \\ l_{21}u_{11} & = & 1 \\ l_{31}u_{11} & = & 1 \\ l_{21}u_{12} + u_{22} & = & 3 \\ l_{21}u_{13} + u_{23} & = & 1 \\ l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & = & 5 \\ l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} & = & 6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcccl} u_{11} & = & 2 & & \\ u_{12} & = & 4 & & \\ u_{13} & = & 4 & & \\ l_{21} & = & \dfrac{1}{2} & & \\ l_{31} & = & \dfrac{1}{2} & & \\ u_{22} & = & 3 - l_{21}u_{12} & = & 1 \\ u_{23} & = & 1 - l_{21}u_{13} & = & -1 \\ l_{32} & = & \dfrac{5 - l_{31}u_{12}}{u_{22}} & = & 3 \\ u_{33} & = & 6 - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} & = & 7 \end{array}\right.$$

On trouve

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} .$$

*Cas général* On écrit $A = A^{(1)} = L^{(1)}U^{(1)}$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} .$$

Par identification on a

$$\left\{ \begin{array}{lclc} a_{1j} & = a_{1j}^{(1)} & = & u_{1j}\,, \ \ j = 1, ..., 3 \\ a_{i1} & = a_{i1}^{(1)} & = & l_{i1}u_{11}\,, \ \ i = 2,3 \\ a_{ij} & = a_{ij}^{(1)} & = & l_{i1}u_{1j} + a_{ij}^{(2)}\,, \ \ i,j = 2,3 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} u_{1j} & = & a_{1j}\,, \ \ j = 1,2,3 \\ l_{i1} & = & \dfrac{a_{i1}}{u_{11}}\,, \ \ i = 2,3 \\ a_{ij}^{(2)} & = & a_{ij}^{(1)} - l_{i1}u_{1j}\,, \ \ i,j = 2,3 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lclcl} u_{11} & = & 2 \\ u_{12} & = & 4 \\ u_{13} & = & 4 \\ l_{21} & = & \dfrac{1}{2} \\ l_{31} & = & \dfrac{1}{2} \\ a_{22}^{(2)} & = & 3 - \dfrac{1}{2} \times 4 & = & 1 \\ a_{23}^{(2)} & = & 1 - \dfrac{1}{2} \times 4 & = & -1 \\ a_{32}^{(2)} & = & 5 - \dfrac{1}{2} \times 4 & = & 3 \\ a_{33}^{(2)} & = & 6 - \dfrac{1}{2} \times 4 & = & 4 \end{array} \right.$$

On pose

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} .$$

On décompose $A^{(2)} = L^{(2)}U^{(2)}$ avec

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{22} & u_{23} \\ 0 & u_{33} \end{pmatrix} .$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{22}^{(2)} & = & u_{22} \\ a_{23}^{(2)} & = & u_{23} \\ a_{32}^{(2)} & = & l_{32} \\ a_{33}^{(2)} & = & l_{32}u_{23} + u_{33} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} u_{22} & = & a_{22}^{(2)} \\ u_{23} & = & a_{23}^{(2)} \\ l_{32} & = & a_{32}^{(2)} \\ u_{33} & = & a_{33}^{(2)} - l_{32}u_{23} \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{cases} u_{22} &= & 1 \\ u_{23} &= & -1 \\ l_{32} &= & 3 \\ u_{33} &= & 4 - 3 \times (-1) = 7 \end{cases}$$

D'où

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Il vient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ou encore

$$A = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right] \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right],$$

ou bien encore

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

D'où la décomposition $LU$.

## 3.2 Cas général

**a. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires inférieures de même ordre est une matrice triangulaire inférieure.**

Soient $L^{(1)}$ et $L^{(2)}$ deux matrices triangulaires inférieures de même ordre $n$. Soit $L^{(3)}$ leur produit : $L^{(3)} = L^{(1)}L^{(2)}$.
Soit $i\,, j \in \{1\,, \dots, n\}$ tel que $i > j$. L'élément $l_{ij}^{(3)} = (L^{(3)})_{ij}$ est donné par :

$$\begin{aligned} l_{ij}^{(3)} &= \sum_{k=1}^{n} l_{ik}^{(1)}\, l_{kj}^{(2)} \\ &= \sum_{k=1}^{i} l_{ik}^{(1)}\, l_{kj}^{(2)} + \sum_{k=i+1}^{n} l_{ik}^{(1)}\, l_{kj}^{(2)} \\ &= \sum_{k=1}^{i} l_{ik}^{(1)} \times 0 + \sum_{k=i+1}^{n} 0 \times l_{kj}^{(2)} \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

car

si $j > i$, alors pour $k \in \{1, \dots, i\}$, on a $j > i \geq k$ et $l_{kj}^{(2)} = 0$,

et pour $k \in \{i+1, \dots, n\}$, on a $k > i$ et $l_{ik}^{(1)} = 0$.

D'où $L^{(3)}$ est une matrice triangulaire inférieure.

En particulier, les éléments qui sont sur la diagonale de $L^{(3)}$ sont donnés par

$$l_{ii}^{(3)} = l_{ii}^{(1)} l_{ii}^{(2)} \quad , \forall\, i \in \{1, \dots, n\}\,. \tag{3.1}$$

**b. Soit $L$ une matrice triangulaire inférieure et inversible.**
**Montrer que son inverse $L^{-1}$ est également une matrice triangulaire inférieure.**

Soit $n$ l'ordre de la matrice $L$.
Soient $x$ et $y$ deux vecteurs ayant $n$ compsantes tels que $Lx = y$. La recherche de l'inconnue $x$ peut s'écrire comme suit

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} l_{11}\, x_1 & & & & & & & = & y_1 \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \\ l_{n-1\,1}\, x_1 & + & \cdots & + & l_{n-1\,n-1}\, x_{n-1} & + & & = & y_{n-1} \\ l_{n1}\, x_1 & + & \cdots & + & l_{n\,n-1}\, x_{n-1} & + & l_{nn}\, x_n & = & y_n \end{array}\right.$$

En utilisant l'algorithme de descente (1.2), on obtient

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} s_{11}\, y_1 & & & & & & & = & x_1 \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \\ s_{n-1\,1}\, y_1 & + & \cdots & + & s_{n-1\,n-1}\, y_{n-1} & + & & = & x_{n-1} \\ s_{n1}\, y_1 & + & \cdots & + & s_{n\,n-1}\, y_{n-1} & + & s_{nn}\, y_n & = & x_n \end{array}\right.$$

où $s_{ii} = 1/l_{ii}$.

De $L^{-1}x = y$, on déduit que $L^{-1}$ est une matrice triangulaire inférieure. De plus, les éléments diagonaux de $L^{-1}$ sont $l_{ii}^{-1} = 1/l_{ii}$.

**c. Soit $A$ une matrice carrée régulière possédant une décomposition $LU$, avec $L$ une matrice triangulaire inférieure ayant des $1$ sur sa diagonale et $U$ une matrice triangulaire supérieure.**
**Montrer que cette factorisation $A = LU$ est unique.**

Soient $L_1$, $L_2$, $U_1$, $U_2$ entrant dans deux telles décompositions *i.e*

$$L_1\, U_1 = L_2\, U_2\,.$$

On en déduit

$$L_2^{-1}\, L_1 = U_2\, U_1^{-1}\,. \tag{3.2}$$

D'après les questions **a.** et **b.**, $L_2^{-1}\, L_1$ est une matrice triangulaire inférieure ayant des 1 sur sa diagonale et $U_2\, U_1^{-1}$ une matrice triangulaire supérieure. Les deux membres de l'égalité (3.2) ne sont rien d'autre que la matrice unité $I$ d'ordre $n$ :

$$L_2^{-1}\, L_1 = I = U_2\, U_1^{-1}\,.$$

Donc on a

$$L_1 = L_2 \text{ et } U_1 = U_2\,.$$

D'où l'unicité.

## 3.3 Factorisation $LU$ d'une matrice tridiagonale

**Soit $A$ une matrice tridiagonale inversible**
$\Big(a_{i-1\,i} = a_i\,,\ i = 2, ..., n\,; a_{ii} = b_i\,,\ i = 1, ..., n\,; a_{i\,i+1} = c_i\,, i = 1, ..., n-1\Big)$**.**

*On suppose que les mineurs principaux de la matrice $A$ sont non nuls.* Ainsi, la matrice $A$ admet-elle une décomposition $LU$, avec $L$ une matrice triangulaire inférieure ayant des 1 sur sa diagonale et $U$ une matrice triangulaire supérieure.

**Écrire un algorithme de factorisation $LU$ de $A$.**

*Forme des matrices L et U*
On cherche $L$ une matrice triangulaire inférieure ayant des 1 sur sa diagonale et $U$ une matrice triangulaire supérieure. On pose

$$A = L\,U$$

où

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_i & b_i & c_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \ddots & & & 0 \\ l_{31} & l_{32} & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & l_{i\,i-1} & 1 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n-1\,1} & & & \ddots & & 1 & 0 \\ l_{n1} & & \cdots & & & l_{n\,n-1} & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & u_{i\,i} & u_{i\,i+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 0 & u_{n-1\,n-1} & u_{n-1\,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Pour trouver $U$, on fait l'élimination de Gauss sur la matrice $A$. En l'effectuant sur les premières lignes de $A$, on voit que comme $A$ est tridiagonale, l'élimination de Gauss laisse inchangée les coefficients de la surdiagonale *i.e.* les éléments $c_i$ ou encore on trouve $u_i = c_i$. Supposons qu'au cours de l'élimination que l'on est arrivé à

$$\begin{pmatrix} d_1 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & c_2 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & d_i & c_i & 0 & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i+1} & b_{i+1} & c_{i+1} & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

On effectue l'élimination de Gauss sur la ligne $i+1$ *i.e.* que l'on fait l'opération :

$$L_{i+1} \longleftarrow L_{i+1} - \frac{a_{i+1}}{d_i} L_i.$$

On obtient la formule de récurrence suivante pour les $d_i$

$$\begin{cases} d_1 = b_1 \,, \\ d_{i+1} = b_{i+1} - \dfrac{a_{i+1}\, c_i}{d_i} \quad \text{pour} \;\; i = 1, ..., n-1 \,. \end{cases} \tag{3.3}$$

La matrice $U$ est de la forme

$$U = \begin{pmatrix} d_1 & u_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & u_2 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & d_i & u_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 0 & d_{n-1} & u_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & d_n \end{pmatrix} . \tag{3.4}$$

où les $u_i$ sont les éléments de la surdiagonale de la matrice $A$ :

$$u_i = c_i \;\; \text{pour} \;\; i = 1, ..., n-1 \,.$$

Pour calculer $L$, on utilise le fait que l'on cherche $A$ sous la forme $A = LU$, ce qui se traduit par

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik}\, u_{kj} \,.$$

Compte tenu de la forme de $U$, cette somme se simplifie en

$$a_{ij} = l_{i\,j-1}\, u_{j-1\,j} + l_{ij}\, u_{jj} \,. \tag{3.5}$$

Dans l'équation (3.5), faisons $j = i$, on obtient

$$a_{ii} = l_{i\,i-1}\, u_{i-1\,i} + l_{ii}\, u_{ii} \,. \tag{3.6}$$

Comme $a_{ii} = b_i$, $l_{ii} = 1$, $u_{i-1\,i} = u_{i-1} = c_{i-1}$ et avec la notation $u_{ii} = d_i$, l'égalité (3.6) s'écrit

$$b_i = l_{i\,i-1}\, c_{i-1} + d_i \,.$$

D'où

$$l_{i\,i-1} = \frac{b_i - d_i}{c_{i-1}} \,. \tag{3.7}$$

Les éléments de la sous-diagonale de $L$ sont ainsi déterminés.
Montrons que les autres éléments de $L$ sont nuls.

En faisant $j = i - 1$ dans l'équation (3.5), on obtient

$$a_{i\,i-1} = l_{i\,i-1}\, u_{i-1\,i-1} + l_{i-1\,i-2}\, u_{i-2\,i-1}\,,$$

ou encore

$$a_i = \frac{b_i - d_i}{c_{i-1}}\, d_{i-1} + l_{i-1\,i-2}\, u_{i-2\,i-1}\,, \tag{3.8}$$

grâce à la notation $a_{i\,i-1} = a_i$.
Comme d'après l'équation (3.7),

$$d_i = b_i - \frac{a_i c_{i-1}}{d_{i-1}}\,,$$

on constate que

$$a_i = \frac{b_i - d_i}{c_{i-1}}\, d_{i-1}\,.$$

De l'équation (3.8), on tire

$$l_{i-1\,i-2}\, u_{i-2\,i-1} = 0$$

et enfin

$$l_{i-1\,i-2} = 0\,,$$

car $u_{i-2\,i-1} = u_{i-2} = c_{i-2} \neq 0$.
Supposons à présent que les coefficients $l_{i\,i-k}$ soient tous nuls pour $k \geq 2$. Alors en faisant $j = i - k$ dans l'équation (3.5), on obtient

$$a_{i\,i-k} = l_{i\,i-k-1}\, u_{i-k-1\,i-k} + l_{i\,i-k}\, u_{i-k\,i-k}\,.$$

Comme par hypothèse $l_{i\,i-k} = 0$ pour $k \geq 2$ et $a_{i\,i-k} = 0$ pour $k \geq 2$ car la matrice $A$ est tridiagonale, on a

$$l_{i\,i-k-1} = 0\,,$$

car $u_{i-k-1\,i-k} = u_{i-k-1} = c_{i-k-1} \neq 0$.

Finalement la matice $L$ est de la forme

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \ddots & & & 0 \\ 0 & l_3 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & l_i & 1 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & l_n & 1 \end{pmatrix}.$$

En conclusion les éléments de la factorisation $A = LU$ sont donnés par :

$$\boxed{\begin{array}{l} u_i = c_i \ \text{ pour } \ i = 1, ..., n-1 \,, \\ d_1 = b_1 \,, \\ l_i = \dfrac{a_i}{d_{i-1}} \ \text{ et } \ d_i = b_i - l_i c_{i-1} \ \text{ pour } \ i = 2, ..., n \,. \end{array}} \tag{3.9}$$

*Algorithme de factorisation $LU$ d'une matrice tridiagonale*

Au vue des formules (3.9), l'algorithme de décomposition $LU$ s'écrit

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{pour } i \textbf{ allant de } 1 \textbf{ à } n-1 \textbf{ faire} \\ \qquad u_i = c_i \\ \textbf{finpour} \\ \\ d_1 = b_1 \\ \\ \textbf{pour } i \textbf{ allant de } 2 \textbf{ à } n \textbf{ faire} \\ \qquad l_i = \dfrac{a_i}{d_{i-1}} \\ \qquad d_i = b_i - l_i \, c_{i-1} \\ \textbf{finpour} \end{array}} \tag{3.10}$$

Étant donné un vecteur $f$, la factorisation $A = LU$ permet d'écrire

$$Ax = f \iff LUx = f \iff \left\{ \begin{array}{lcl} Ly & = & f \\ Ux & = & y \end{array} \right. \tag{3.11}$$

Ce qui permet la résolution du système linéaire $Ax = f$ en deux étapes, de descente et de remontée. Les formules suivantes permettent de calculer la solution du système :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{//Calcul de } y \text{ par la descente} \\ y_1 = f_1 \\ \textbf{pour } i \textbf{ allant de } 2 \textbf{ à } n \textbf{ faire} \\ \qquad\qquad y_i = f_i - l_i\, c_{i-1} \\ \textbf{finpour} \\ \\ \text{//Calcul de } x \text{ par la remontée} \\ x_n = \dfrac{y_n}{d_n} \\ \textbf{pour } i \textbf{ allant de } n-1 \textbf{ à } 1 \textbf{ par pas de } -1 \textbf{ faire} \\ \qquad\qquad x_i = \dfrac{y_i - c_i\, x_{i+1}}{d_i} \\ \textbf{finpour} \end{array}} \tag{3.12}$$

**Quelle est la complexité de cet algorithme ?**
Le nombre d'opérations est donc

$(n-1)$ additions (add), multiplications (mult) et divisions (div) pour les formules de factorisation (3.10) ;

$(n-1)$ additions et multiplications pour les formules de descente (3.12) ;

$(n-1)$ additions, multiplications et $n$ divisions pour les formules de remontée (3.12).

D'où le coût total est $3(n-1)$ (add $+$ mult) $+ (2n-1)$ div.

**Application : effectuer la décomposition $LU$ de la matrice**

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Les mineurs principaux de la matrice proposée sont

$$\begin{vmatrix} -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0\,, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -6 \neq 0\,, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0\,,$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -12 \neq 0\,, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 36 \neq 0\,.$$

Donc on peut décomposer la matrice proposée sous la forme $LU$ où $L$ est une matrice triangulaire inférieure ayant des 1 sur sa diagonale et $U$ est une matrice triangulaire supérieure. Comme elle tridiagonale, on peut appliquer l'une des formules (3.9) ou (3.10). On obtient successivement

$$\begin{cases} u_1 = 1\,, \\ u_2 = 2\,, \\ u_3 = -1\,, \\ u_4 = 1\,, \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} d_1 &= & -2\,, & & \\ l_2 &= & -4/(-2) & = & 2\,, \\ d_2 &= & 5 - 2 \times 1 & = & 3\,, \\ l_3 &= & -3/3 & = & -1\,. \\ d_3 &= & -1 - (-1) \times 2 & = & 1\,, \\ l_4 &= & -2/1 & = & -2\,, \\ d_4 &= & 4 - (-2) \times (-1) & = & 2\,, \\ l_5 &= & 2/2 & = & 1\,, \\ d_5 &= & -2 - 1 \times 1 & = & -3\,, \end{cases}$$

Finalement, on trouve

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

et

$$U = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\,.$$

## EXERCICE 4
## Localisation des valeurs propres d'une matrice

On introduit la définition suivante.

**Définition 4.1. Soit $A = (a_{kj})_{k,j=1,\ldots,n}$ une matrice carrée d'ordre n.**
**On appelle disque de Gerschgörin centré en $a_{kk}$ l'ensemble**

$$D_k = \{z \in \mathbb{C} / \, |z - a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|\} \, .$$

**On donne le théorème suivant qui sera démontré dans la première partie de cet exercice.**

**Théorème** (théorème de Gerschgörin)
*Soit A une matrice carrée d'ordre n.*
*Les valeurs propres de A appartiennent à l'union des n disques de Gerschgörin du plan complexe :*

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \Rightarrow \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} \, , \lambda \in D_k \, .$$

## 4.1 Démonstration du théorème

**a. Soit $\lambda$ une valeur propre de A et $u$ un vecteur propre associé à cette valeur propre. Soit $k$ tel que $|u_k| = \max_{1 \leq j \leq n} |u_j|$.**

**Montrer que $|\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|$.**

On a

$$\lambda u = Au \Leftrightarrow (\lambda - a_{kk}) \, u_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj} u_j \, ,$$

d'où

$$|\lambda - a_{kk}||u_k| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}||u_j| \leq \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}| \right) |u_k| \, .$$

Comme $|u_k| \neq 0$, on obtient le résultat annoncé.

**Conclure.**

Toutes les valeurs propres de la matrice A sont contenues dans la réunion des disques

$$D_k = \{z \in \mathbb{C} / \, |z - a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|\} \, .$$

## 4.2 Étude d'un exemple

**On considère la matrice suivante**

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & i & 2 \\ -3 & 2+i & 1 \\ 1 & i & 6 \end{pmatrix} .$$

**a. Dessiner les 3 disques de Gerschgörin et localiser les valeurs propres de $A$.**

Les disques 3 disques de Gerschgörin sont déterminés par

$$\begin{aligned} &|\lambda - 1 - i| \leq |i| + |2| = 3\,, \\ &|\lambda - 2 - i| \leq |-3| + |1| = 4\,, \\ &|\lambda - 6| \leq |1| + |i| = 2\,, \end{aligned}$$

Les valeurs propres de $A$ sont localisées dans ces 3 disques dessinés dans la Fig. 1.

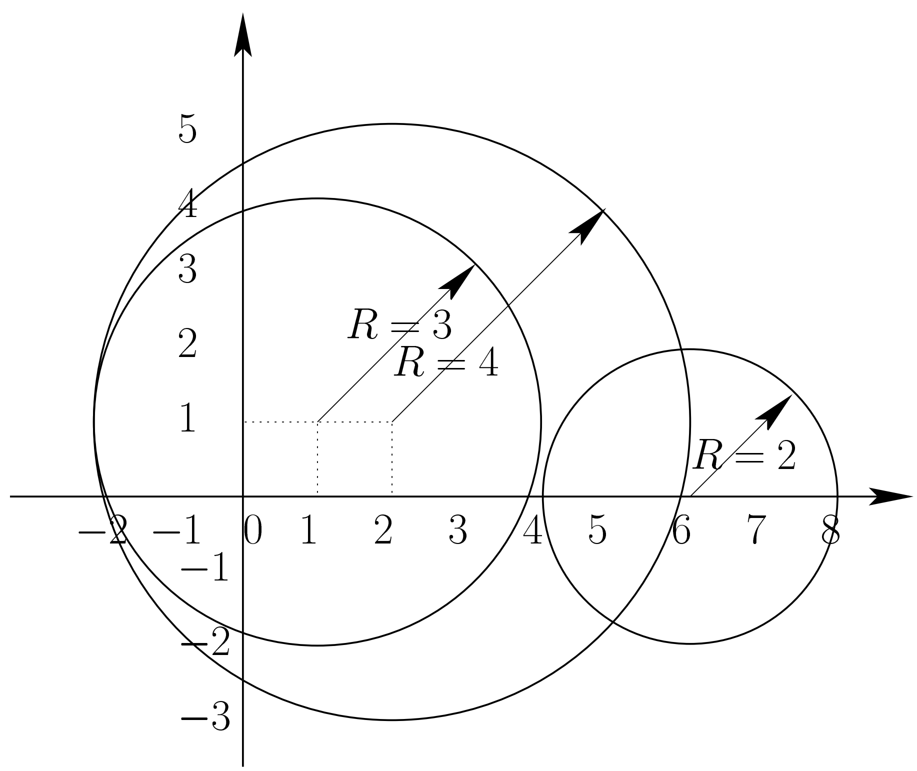


Fig. 1 – Disques de Gerschgörin associés à la matrice $A$.

**b. En remarquant que $A$ et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres, représenter les disques de Gerschgörin associés aux valeurs propres de ${}^tA$.**

Les disques 3 disques de Gerschgörin sont déterminés par

$$\begin{aligned}
&|\lambda - 1 - i| \leq |-3| + |1| = 4\,,\\
&|\lambda - 2 - i| \leq |i| + |i| = 2\,,\\
&|\lambda - 6| \leq |2| + |1| = 3\,,
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de ${}^tA$ sont localisées dans ces 3 disques dessinés dans la Fig. 2.

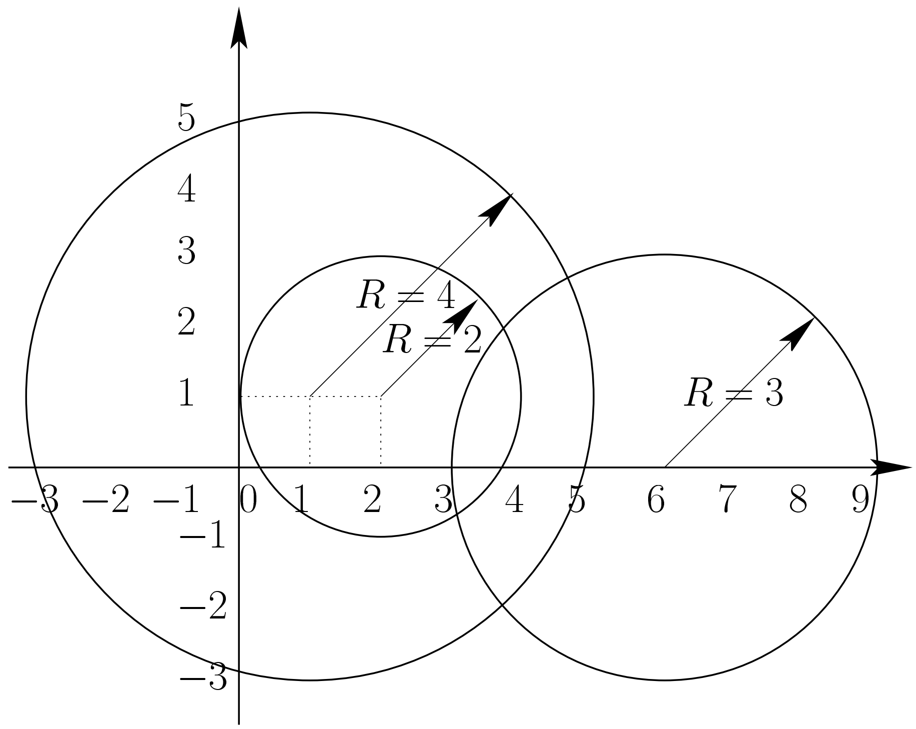


FIG. 2 – Disques de Gerschgörin associés à la matrice ${}^tA$.

**c. Donner une majoration des modules des valeurs propres de $A$.**

Pour $\lambda$ valeur propre de $A$ et pour $k$ dans $\{1, ..., n\}$ fixé, on a

$|\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$, ce qui donne

$|\lambda| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$,

donc

$$\max|\lambda| \leq \max_{k=1,..,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|\,.$$

D'où une majoration des modules des valeurs propres de $A$ notée $\rho(A)$ est $\rho(A) \leq 9$.

### 4.3 Matrice à diagonale dominante

**Définition 4.2. Soit** $A = (a_{kj})_{k,j=1,\dots,n}$ **une matrice carrée d'ordre n.**

**On dit que** $A$ **est à diagonale dominante si** $\forall\, k\,, 1 \leq k \leq\, n\,, |a_{kk}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|\,.$

**La matrice** $A$ **est dite à diagonale strictement dominante si**

$$\forall\, k\,, 1 \leq k \leq\, n\,, |a_{kk}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|\,.$$

**a. Montrer, en utilisant le théorème de Gerschgörin, que si** $A$ **est à diagonale strictement dominante alors elle est inversible.**

Supposons que $A$ est à diagonale strictement dominante. Montrons que 0 n'est pas valeur propre de $A$.

On a

$$|0 - a_{kk}| = |a_{kk}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|\,, \quad \forall\, k = 1, ..., n\,.$$

Donc 0 n'appartient à aucun disque de Gerschgörin, donc 0 n'est pas une valeur propre de $A$. Le déterminant ne pouvant s'annulé, on déduit que la matrice $A$ est inversible.

**b. Montrer que la matrice suivante est à diagonale dominante, mais n'est pas inversible :**

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} |2| &\geq |-1| + |-1|\,, \\ |3| &\geq |-1| + |-2|\,, \\ |1| &\geq |0| + |1|\,, \end{aligned}$$

donc la matrice proposée est à diagonale dominante.
Le déterminant de la matrice proposée peut se calculer de la manière suivante

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \;.$$

D'où la matrice proposée n'est pas inversible.