Analyse Numérique
Corrigé du TD 7

EXERCICE 1
Normes vectorielles

1.1 Définitions

Soit un entier $n > 0$.
a. Montrer que les applications suivantes définies sur $\mathbb{R}^n$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$,

$$x \mapsto \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \,,$$

$$x \mapsto \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} ,$$

$$x \mapsto \|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \,.$$

i. $x \mapsto \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^n$

• *Positivité*
Pour $x = {}^t(x_1 \,, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a $|x_i| \geq 0 \, \forall \, i \in \{1 \,, \dots \,, n\}$, donc $\|x\|_1 \geq 0$.
Soit $x = {}^t(x_1 \,, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_1 = 0$. Alors $\forall \, i \in \{1 \,, \dots \,, n\} \,, |x_i| = 0$, *i.e.* $\forall \, i \in \{1 \,, \dots \,, n\} \,, x_i = 0$, qui montre que $x = 0$.

• *Homogénéité*
Soient $x = {}^t(x_1 \,, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\|\lambda \, x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda \, x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda| \, \|x\|_1 \,.$$

• *Inégalité triangulaire*
Soient $x = {}^t(x_1 \,, ..., x_n)$ et $y = {}^t(y_1 \,, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. Comme $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \,, \forall \, i \in \{1 \,, \dots \,, n\}$, on obtient en sommant sur les i

$$\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1 \,.$$

ii. $x \mapsto \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^n$

• *Positivité*

Soit $x = {}^t(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a $|x_i|^2 \geq 0 \, \forall \, i \in \{1, \dots, n\}$, donc $\|x\|_2 \geq 0$.
Si $x = {}^t(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ est tel que $\|x\|_2 = 0$, alors $\forall \, i \in \{1, \dots, n\}, |x_i|^2 = 0$, *i.e.* $\forall \, i \in \{1, \dots, n\}, x_i = 0$, qui prouve que $x = 0$.

• *Homogénéité*

Soient $x = {}^t(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\|\lambda \, x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda \, x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(|\lambda|^2 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \, \|x\|_2 \, .$$

• *Inégalité triangulaire*

On montre deux inégalités auxiliaires.

– *Première inégalité*

  Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ car $(a - b)^2 \geq 0$.

– *Deuxième inégalité*

  Soient $x = {}^t(x_1, ..., x_n)$ et $y = {}^t(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.
  Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$ alors on a la chaîne d'inégalités suivante par application directe de la première inégalité

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|x_i|}{\|x\|_2} \frac{|y_i|}{\|y\|_2} \right) &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{|x_i|}{\|x\|_2} \right)^2 + \left(\frac{|y_i|}{\|y\|_2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}{\|x\|_2^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2}{\|y\|_2^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\|x\|_2^2}{\|x\|_2^2} + \frac{\|y\|_2^2}{\|y\|_2^2} \right] \\ &= 1 \, , \end{aligned}$$

  donc on a

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \, |y_i| \leq \|x\|_2 \, \|y\|_2 \, . \tag{1.1}$$

  L'inégalité (1.1) est encore vraie pour $x = 0$ ou $y = 0$. Elle est dite inégalité de *Cauchy-Schwarz* ou encore de *Bunyakovski-Cauchy-Schwarz* ou bien encore de *Hölder*.

Soient $x = {}^t(x_1, ..., x_n)$ et $y = {}^t(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Par application de l'inégalité (1.1) de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^2 &= \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2+\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2+2\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \\ &\leq \|x\|_2+\|y\|_2+2\|x\|_2\,\|y\|_2 \\ &= \Big(\|x\|_2+\|y\|_2\Big)^2 .\end{aligned} \tag{1.2}$$

En prenant la racine carrée de l'inégalité (1.2) ci-dessus on a

$$\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2+\|y\|_2\,. \tag{1.3}$$

L'inégalité (1.3) est dite de *Minkowski*.

iii. $x \mapsto \|x\|_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n}|x_i|$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^n$

• *Positivité*

Pour $x = {}^t(x_1\,,\ldots,x_n)\ \in \mathbb{R}^n$, on a $|x_i| \geq 0\,\forall\, i\in\{1\,,\ldots\,,n\}$, donc $\|x\|_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n}|x_i| \geq 0$.

Soit $x = {}^t(x_1\,,\ldots,x_n)\ \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_\infty = 0$. Alors $\max\limits_{i=1,\ldots,n}|x_i| = 0$, puis $\forall\, i\in\{1\,,\ldots\,,n\}\,,|x_i| = 0\,$, *i.e.* $\forall\, i\in\{1\,,\ldots\,,n\}\,,x_i=0$, qui prouve que $x=0$.

• *Homogénéité*

Soient $x = {}^t(x_1\,,\ldots,x_n)\ \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a la chaîne d'implications suivante

$$|\lambda\, x_i| = |\lambda|\,|x_i|\ \ \forall\, i\in\{1\,,\ldots\,,n\} \implies \max_{i=1,\ldots,n}|\lambda\, x_i| = |\lambda|\ \max_{i=1,\ldots,n}|x_i| \iff \|\lambda\, x\|_\infty = |\lambda|\,\|x\|_\infty\,.$$

• *Inégalité triangulaire*

Soient $x = {}^t(x_1\,,\ldots,x_n)$ et $y = {}^t(y_1\,,\ldots,y_n)\ \in\mathbb{R}^n$.

On a les implications suivantes

$$\begin{aligned}|x_i+y_i| \leq |x_i|\ +\ |y_i|\ \ \forall\, i\in\{1\,,\ldots\,,n\} &\implies \max_{i=1,\ldots,n}|x_i+y_i| \leq \max_{i=1,\ldots,n}|x_i| + \max_{i=1,\ldots,n}|y_i| \\ &\iff \|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty+\|y\|_\infty\,.\end{aligned}$$

Remarque Dans ce qui précède, on n'a jamais prouvé l'égalité $\|0\| = 0$, parce que non seulement c'est une évidence mais aussi elle est contenue dans la propriété d'homogénéité, dans laquelle il suffit de faire $\lambda = 0$ pour obtenir le résultat.

b. Montrer que, pour $1\leq p<+\infty$, l'application suivante définie sur $\mathbb{R}^n$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$,

$$x\mapsto \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$x \mapsto \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^n$

Le cas $p = 1$ étant évident et traité dans la question précédente, on s'intéresse aux cas $1 < p < +\infty$.

• *Positivité*

Soit $x = {}^t(x_1\,, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a $|x_i|^p \geq 0 \;\; \forall\, i \in \{1\,, \ldots\,, n\}$, donc $\|x\|_p \geq 0$.
Si $x = {}^t(x_1\,, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ est tel que $\|x\|_p = 0$, alors $\forall\, i \in \{1\,, \ldots\,, n\}\,, |x_i|^p = 0\,,$ *i.e.* $\forall\, i \in \{1\,, \ldots\,, n\}\,, x_i = 0$, qui prouve que $x = 0$.

• *Homogénéité*

Soient $x = {}^t(x_1\,, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\|\lambda\, x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda\, x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|\; \|x\|_p\,.$$

• *Inégalité triangulaire*

On montre deux inégalités qui serviront dans la suite de cette question.

– *Première inégalité*

Pour tous $p > 1$ et $p' > 0$ tels que $1/p + 1/p' = 1$ et pour tous $a\,, b > 0$ on a

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}\,. \tag{1.4}$$

En effet, en posant $\alpha = \ln(a^p)$ et $\beta = \ln(b^{p'})$ et en utilisant le fait que la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est convexe, on obtient

$$e^{\alpha/p + \beta/p'} \leq \frac{1}{p} e^{\alpha} + \frac{1}{p'} e^{\beta}\,. \tag{1.5}$$

En reportant les valeurs de α et β en fonction de a et b dans l'inégalité (1.5) , on obtient la relation (1.4).

– *Deuxième inégalité*

Soients $x = {}^t(x_1\,, ..., x_n)$ et $y = {}^t(y_1\,, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.
Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$ alors on a la chaîne d'inégalités suivante par application de la relation (1.4) :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|\,x_i|}{\|x\|_p}\,\frac{|y_i|}{\|y\|_{p'}}\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{p}\left(\frac{|\,x_i|}{\|x\|_p}\right)^p + \frac{1}{p'}\left(\frac{|y_i|}{\|y\|_{p'}}\right)^p\right]$$
$$= \left[\frac{1}{p}\frac{\sum_{i=1}^n |\,x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{p'}\frac{\sum_{i=1}^n |\,y_i|^{p'}}{\|y\|_{p'}^{p'}}\right]$$
$$= \left[\frac{1}{p'}\,\frac{\|x\|_p^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{p'}\,\frac{\|y\|_{p'}^{p'}}{\|y\|_{p'}^{p'}}\right]$$
$$= \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right]$$
$$= 1\,,$$

donc on a

$$\sum_{i=1}^{n} |\,x_i|\,|y_i| \leq \|x\|_p\,\|y\|_{p'}\,. \tag{1.6}$$

L'inégalité (1.6) est encore vraie pour $x = 0$ ou $y = 0$. Elle est dite de *Hölder*.

Soient $x = {}^t(x_1\,, ..., x_n)$ et $y = {}^t(y_1\,, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.
On a

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p = \sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i||x_i+y_i|^{p-1} \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i|\,|x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n}|y_i|\,|x_i+y_i|^{p-1} \tag{1.7}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder (1.6) à chacun des termes du second membre de l'inégalité ci-dessus on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}|x_i|\,|x_i+y_i|^{p-1} &\leq \|x\|_p \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p'(p-1)}\right)^{\frac{1}{p'}} \\ \sum_{i=1}^{n}|y_i|\,|x_i+y_i|^{p-1} &\leq \|y\|_p \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p'(p-1)}\right)^{\frac{1}{p'}}\,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Si $x + y \neq 0$, l'inégalité (1.7) devient

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p}{\left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{p'(p-1)}\right)^{\frac{1}{p'}}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p\,,$$

De $1/p' = 1 - 1/p \Longleftrightarrow p = p'(p-1)$ et $1/p = 1 - 1/p'$, on déduit de l'inégalité ci-dessus la relation

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p\,,$$

ou encore

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p\,. \tag{1.9}$$

Si $x+y \neq 0$, l'inégalité (1.9) est encore vraie. Elle est dite de *Minkowski*.

1.2 Équivalence de normes

Montrer les relations suivantes sur $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
&\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty\,,\\
&\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty\,,\\
&\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2\,.
\end{aligned}$$

Équivalence de normes $\|\ \ \|_1$ et $\|\ \ \|_\infty$

Soient $x = {}^t(x_1\,, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, et i_o tel que $|x_{i_0}| = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

On a

$$|x_{i_0}| \leq |x_{i_0}| + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} |x_i| \iff \|x\|_\infty \leq \|x\|_1\,.$$

On a

$$\forall\, i \in \{1\,, \ldots\,, n\}\,, |x_i| \leq |x_{i_0}| \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n\,|x_{i_0}| \iff \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty\,.$$

D'où

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty\,.$$

Équivalence de normes $\|\ \ \|_2$ et $\|\ \ \|_\infty$

Soient $x = {}^t(x_1\,, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, et i_o tel que $|x_{i_0}| = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

On a

$$|x_{i_0}|^2 \leq |x_{i_0}|^2 + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} |x_i|^2 \iff \sqrt{|x_{i_0}|^2} \leq \sqrt{|x_{i_0}|^2 + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} |x_i|^2} \iff \|x\|_\infty \leq \|x\|_2\,.$$

On a

$$\begin{aligned}
\forall\, i \in \{1\,, \ldots\,, n\}\,, |x_i|^2 \leq |x_{i_0}|^2 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leq n\,|x_{i_0}|^2 \Longrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \leq \sqrt{n\,|x_{i_0}|^2}\\
\iff \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty\,.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty\,.$$

Équivalence de normes $\| \ \|_1$ *et* $\| \ \|_2$
Soit $x = {}^t(x_1 , ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.
On a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} |x_i|\,|x_j| &\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \times \sum_{i=1}^n |x_i| \\ &\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^2 \\ &\Longleftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \\ &\Longleftrightarrow \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \,.\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |x_i| = \sum_{i=1}^n 1 \times |x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n 1^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} &\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\Longleftrightarrow \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \,.\end{aligned}$$

D'où

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2 \,.$$

1.3 Relation entre la norme p et la norme $+\infty$

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, montrer que

$$\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty \,.$$

Soit $1 \leq p < +\infty$. Soient $x = {}^t(x_1 , ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, et i_o tel que $|x_{i_0}| = \max_{i=1,...,n} |x_i|$.
On a

$$|x_{i_0}|^p \leq |x_{i_0}|^p + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^n |x_i|^p \Longleftrightarrow \sqrt{|x_{i_0}|^p} \leq \sqrt{|x_{i_0}|^p + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^n |x_i|^p} \Longleftrightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|_p \,.$$

On a

$$\begin{aligned}\forall\, i \in \{1\,, \dots , n\}\,, |x_i|^p \leq |x_{i_0}|^p \Longrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq n\,|x_{i_0}|^p \Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(n\,|x_{i_0}|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\ \Longleftrightarrow \|x\|_1 \leq n^{1/p}\|x\|_\infty \,.\end{aligned}$$

D'où

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty . \tag{1.10}$$

On fait $p \to +\infty$ dans (1.10), et on utilise le fait que $\lim\limits_{p\to+\infty} n^{1/p} = 0$, pour obtenir

$$\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty .$$

EXERCICE 2
Normes matricielles

Soit A une matrice carrée d'ordre $n > 0$, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.
Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on note par $\| \ \|_p$ la norme matricielle calculée à partir de la norme vectorielle $\| \ \|_p$ *i.e.*

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p = \sup_{\|x\|_p\leq 1} \|Ax\|_p = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} .$$

a. Montrer que

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| ,$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| .$$

Cas de la norme matricielle $\| \ \|_1$
Soit $x = {}^t(x_1 , ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^n |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^n |\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j| \leq \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \\ \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|\right) \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \|x\|_1 \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| .\end{aligned}$$

Donc on obtient

$$\|A\|_1 = \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \leq \sup_{\|x\|_1=1} \|x\|_1 \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| , \tag{2.1}$$

ou encore

$$\|A\|_1 \leq \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| .$$

Soit j_o tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_{ij_0}| = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$. On définit le vecteur $x^0 = {}^t(x_1^0\,, ..., x_j^0\,, .., x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$x_j^0 = \begin{cases} 1 & \text{si } \; j = j_0\,, \\ 0 & \text{si } \; j \neq j_0\,. \end{cases}$$

Alors on obtient

$$\|Ax^0\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |(Ax^0)_i| = \sum_{i=1}^{n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij_0} x_{j_0}^0| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij_0}| = \|A\|_1\,. \tag{2.2}$$

En regroupant les équations (2.1) et (2.2), on obtient

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\,.$$

D'où le résultat.

Cas de la norme matricielle $\| \;\; \|_\infty$
Soit $x = {}^t(x_1\,, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\begin{aligned} \|Ax\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |(Ax)_i| &= \max_{i=1,\dots,n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j| \leq \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \\ &\leq \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} \left(|a_{ij}| \max_{j=1,\dots,n} |x_j| \right) \\ &= \left(\max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \max_{j=1,\dots,n} |x_j| \\ &= \left(\max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \|x\|_\infty\,. \end{aligned}$$

Donc on a

$$\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty \leq \sup_{\|x\|_\infty = 1} \|x\|_\infty \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,,$$

ou encore

$$\|A\|_\infty \leq \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,. \tag{2.3}$$

Soit i_o tel que $\displaystyle\max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}|$. On définit le vecteur $x^0 = {}^t(x_1^0\,, ..., x_j^0\,, .., x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$x_j^0 = \begin{cases} \dfrac{a_{i_0 j}}{|a_{i_0 j}|} & \text{si } \; a_{i_0 j} \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } \; a_{i_0 j} = 0\,. \end{cases}$$

Si $\forall\, j \in \{1,\dots,n\}$, $a_{ij} = 0$ *i.e.* si la matrice A est nulle alors $\|A\|_\infty = 0$. Sinon on a $\|x^0\|_\infty = 1$ et

$$\begin{aligned}\|Ax^0\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \Big| \sum_{\substack{j=1 \\ j\,,\,a_{i_0 j}\neq 0}}^{n} a_{i_0 j} x_j^0 \Big| = \max_{i=1,\dots,n} \Big| \sum_{\substack{j=1 \\ j\,,\,a_{i_0 j}\neq 0}}^{n} |a_{i_0 j}| \;\Big| = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\,,\,a_{i_0 j}\neq 0}}^{n} |a_{i_0 j}| \\ = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}|\,.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Comme $\|x^0\|_\infty = 1$, x^0 est l'un des vecteurs de la boule unité pour la norme $\|\ \ \|_\infty$ et, de l'équation (2.4), on déduit que

$$\|A\|_\infty \geq \|Ax^0\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}|\,. \tag{2.5}$$

Finalement des équations (2.3) et (2.5), on a

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,.$$

b. Soit B une matrice réelle et symétrique. Montrer que pour $x \neq 0$

$$\lambda_{\min}(B) \leq \frac{(Bx,x)}{\|x\|_2^2} \leq \lambda_{\max}(B)\,,$$

où $\lambda_{\min}(B)$ et $\lambda_{\max}(B)$ sont respectivement les plus petite et grande valeurs propres de B.

Comme B est une matrice réelle et symétrique, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale U telles que $B = {}^tUDU$. De plus **les valeurs propres de B sont réelles**. Par suite pour $x \neq 0$, on a

$$(Bx,x) = ({}^tUDUx, x) = (DUx, Ux) = (Dy,y) \ \text{ où } \ y = Ux\,.$$

Or, d'une part

$$\lambda_{\min}(D)\|y\|_2^2 \leq (Dy,y) \leq \lambda_{\max}(D)\|y\|_2^2\,,$$

ou encore

$$\lambda_{\min}(B)\|y\|_2^2 \leq (Dy,y) \leq \lambda_{\max}(B)\|y\|_2^2\,.$$

D'autre part

$$\|y\|_2^2 = \|Ux\|_2^2 = (Ux,Ux) = (x, {}^tUUx) = (x,x) = \|x\|_2^2$$

Il vient

$$\lambda_{\min}(B)\|x\|_2^2 \leq (Bx,x) \leq \lambda_{\max}(B)\|x\|_2^2\,,$$

et finalement pour $x \neq 0$

$$\lambda_{\min}(B) \leq \frac{(Bx,x)}{\|x\|_2^2} \leq \lambda_{\max}(B)\,.$$

En déduire que $\|A\|_2 = \sqrt{\rho\left({}^tAA\right)}$, où A est une matrice réelle, ρ est le rayon spectral.

La matrice ${}^tAA$ est réelle et symétrique car ${}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA$.
On peut donc faire $B = {}^tAA$ dans la question précédente et on trouve

$$\lambda_{\min}({}^tAA) \leq \frac{({}^tAAx,x)}{\|x\|_2^2} \leq \lambda_{\max}({}^tAA)\,, \tag{2.6}$$

pour $x \neq 0$.
Comme $({}^tAAx,x) = (Ax,Ax) = \|Ax\|_2^2$, on déduit de (2.6) d'une part que $\lambda_{\min}({}^tAA)$ et $\lambda_{\max}({}^tAA)$ sont positives, donc toutes **les valeurs propres de la matrice ${}^tAA$ sont positives**. D'où

$$\left(\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}\right)^2 \leq \lambda_{\max}({}^tAA) = \max|\lambda({}^tAA)| = \rho\left({}^tAA\right).$$

En prenant la racine carrée on trouve

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sqrt{\rho\left({}^tAA\right)}\,.$$

Maintenant on prend la borne supérieure sur $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ de l'inégalité ci-dessus,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n\,,\,x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sqrt{\rho\left({}^tAA\right)}\,.$$

Par suite

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\rho\left({}^tAA\right)}\,. \tag{2.7}$$

Considérons à présent un vecteur propre x^0 de la matrice ${}^tAA$ associé à la valeur propre la plus grande en module $\lambda_{\max}({}^tAA) = |\lambda_{\max}({}^tAA)| = \rho\left({}^tAA\right)$. On a

$$\begin{aligned}\|Ax^0\|_2^2 = (Ax^0,Ax^0) = ({}^tAAx^0,x^0) = (\lambda_{\max}({}^tAA)\,x^0,x^0) = \lambda_{\max}({}^tAA)\,(x^0,x^0)\\ = \lambda_{\max}({}^tAA)\,\|x^0\|_2^2\,,\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|Ax^0\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}({}^tAA)}\,\|x^0\|_2\,.$$

Ce qui entraîne à son tour

$$\|Ax^0\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}({}^tAA)}\,\|x^0\|_2\,.$$

Il vient

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n\,,\,x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \geq \frac{\|Ax^0\|_2}{\|x^0\|_2} = \sqrt{\lambda_{\max}({}^tAA)}\,,$$

puis

$$\|A\|_2 \geq \sqrt{\lambda_{\max}({}^tAA)} = \sqrt{\rho\left({}^tAA\right)}\,. \tag{2.8}$$

Des relations (2.7) et (2.8), on tire

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho\left({}^tAA\right)}\,.$$

D'où le résultat.

EXERCICE 3
Une application

Soit $(\theta_n)_{n\geq 0}$ **une suite définie par**

$$\theta_{n+1} \leq \theta_{n-1} + 2\beta\theta_n + \alpha_n\,,\ \text{ pour tout }\ n\geq 1\,,$$

avec $\theta_n,\ \alpha_n,\ \beta\ \in \mathbb{R}_+$**.**
a. Montrer qu'il existe une matrice A **et un vecteur** B_n **tels que**

$$\begin{pmatrix}\theta_n\\ \theta_{n+1}\end{pmatrix} \ \leq\ A\ \begin{pmatrix}\theta_{n-1}\\ \theta_n\end{pmatrix} \ +\ B_n \quad \text{pour tout }\ n\geq 1\,.$$

Pour $(\theta_n)_{n\geq 1}$ on peut écrire

$$\begin{array}{ccccccc}\theta_n & \leq & & & \theta_n & & , \\ \theta_{n+1} & \leq & \theta_{n-1} & + & 2\beta\theta_n & + & \alpha_n\,,\ \text{ pour tout }\ n\geq 1\,,\end{array}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix}\theta_n\\ \theta_{n+1}\end{pmatrix} \ \leq\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\beta\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}\theta_{n-1}\\ \theta_n\end{pmatrix} \ +\ \begin{pmatrix}0\\ \alpha_n\end{pmatrix} \tag{3.1}$$

On trouve donc

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\beta\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_n = \begin{pmatrix}0\\ \alpha_n\end{pmatrix}\,. \tag{3.2}$$

Remarque Dans la relation (3.1) le symbole "$\leq$"est compris comme inégalité entre composantes de chaque vecteur correspondant de part et d'autre de ce symbole.

b. En déduire que

$$\theta_n \leq e^{(n-1)\beta} \sqrt{\theta_0^2 + \theta_1^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \, e^{(n-1-i)\beta}\,, \quad \text{pour tout} \ \ n \geq 2\,.$$

Le polynôme caratéristique de A est :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\beta\,\lambda - 1 = (\lambda - \beta)^2 - \big(\beta^2 + 1\big) = \Big(\lambda - \beta - \sqrt{\beta^2+1}\Big)\Big(\lambda - \beta + \sqrt{\beta^2+1}\Big)$$

Les valeurs propres sont donc $\beta + \sqrt{\beta^2+1}$ et $\beta - \sqrt{\beta^2+1}$, d'où le rayon spectral de la matrice A est $\rho(A) = \beta + \sqrt{\beta^2+1}$.
Comme la matrice A est réelle et symétrique, ses valeurs propres sont réelles et sa norme euclidienne n'est que la plus grande valeur absolue de ses valeurs propres *i.e.*

$$\|A\|_2 = \rho(A) = \beta + \sqrt{\beta^2+1}\,.$$

On prend maintenant la norme $\| \ \ \|_2$ de l'inégalité (3.1), pour obtenir

$$\left\|\begin{pmatrix} \theta_n \\ \theta_{n+1} \end{pmatrix}\right\|_2 \ \leq \ \left\|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2\beta \end{pmatrix}\right\|_2 \ \left\|\begin{pmatrix} \theta_{n-1} \\ \theta_n \end{pmatrix}\right\|_2 \ + \ \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_n \end{pmatrix}\right\|_2. \tag{3.3}$$

Ce que l'on peut encore écrire

$$\sqrt{\theta_{n+1}^2 + \theta_n^2} \ \leq \ \rho(A) \ \sqrt{\theta_n^2 + \theta_{n-1}^2} \ + \ \alpha_n\,. \tag{3.4}$$

On pose $\Theta_n = \sqrt{\theta_n^2 + \theta_{n-1}^2}$ pour $n \geq 1$. Alors on obtient la récurrence suivante

$$\Theta_{n+1} \ \leq \ \rho(A) \ \Theta_n \ + \ \alpha_n\,. \tag{3.5}$$

Par récurrence sur n, avec une démonstration analogue à celle du *lemme de Gronwall discret*, on obtient

$$\Theta_n \ \leq \ \Big(\rho(A)\Big)^{n-1} \ \Theta_1 \ + \ \sum_{i=1}^{n-1} \Big(\rho(A)\Big)^{(n-i-1)} \ \alpha_i\,. \tag{3.6}$$

On a les majorations suivantes :

$$\theta_n \leq \sqrt{\theta_n^2 + \theta_{n-1}^2} = \Theta_n\,, \tag{3.7}$$

et

$$\rho(A) = \beta + \sqrt{\beta^2+1} \leq \beta + \sqrt{\beta^2 + 1 + \frac{\beta^4}{4}} = \beta + \sqrt{\left(1+\frac{\beta^2}{2}\right)^2} = 1 + \beta + \frac{\beta^2}{2} \leq e^{\beta}\,. \quad (3.8)$$

En utilisant les majorations (3.7) et (3.8) dans la récurrence (3.6) et avec $\Theta_1 = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_0^2}$, on trouve finalement

$$\theta_n \leq e^{(n-1)\beta}\, \sqrt{\theta_0^2 + \theta_1^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \, e^{(n-1-i)\beta}\,, \quad \text{pour tout} \;\; n \geq 2\,.$$

EXERCICE 4
Conditionnement d'une matrice

Soit A une matrice carrée d'ordre $n > 0$. Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on note par $\mathrm{cond}_p(A)$ le nombre de conditionnement de A calculé avec la norme matricielle $\| \ \|_p$.

4.1 Quelques propriétés du conditionnement

Montrer les propriétés suivantes :
a. $\mathrm{cond}_p(A) \geq 1$ **;**

On a

$$I = A\,A^{-1} \Longrightarrow 1 = \|I\|_p = \|A\,A^{-1}\|_p \leq \|A\|_p\,\|A^{-1}\|_p = \mathrm{cond}_p(A) \Longleftrightarrow \mathrm{cond}_p(A) \geq 1\,.$$

b. $\mathrm{cond}_p(\alpha A) = \mathrm{cond}_p(A)\,, \;\; \forall \alpha \neq 0$ **;**

Comme $\alpha \neq 0$, on trouve

$$\mathrm{cond}_p(\alpha A) = \|\alpha A\|_p\,\|\alpha^{-1}\,A^{-1}\|_p = |\alpha|\,|\alpha^{-1}|\,\|A\|_p\,\|A^{-1}\|_p = \|A\|_p\,\|A^{-1}\|_p = \mathrm{cond}_p(A)\,.$$

c. $\mathrm{cond}_2(A) = \sqrt{\dfrac{\max_i |\lambda_i(A^\star A)|}{\min_i |\lambda_i(A^\star A)|}}$**, où les nombres $\lambda_i(A^\star A)$ sont les valeurs propres de $A^\star A$ et $A^\star$ est l'adjoint de A ;**

On a

$$\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2\,\|A^{-1}\|_2\,.$$

La matrice $A^\star A$ est hermitienne, donc diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles. On obtient une généralisation des résultats de la question **b.** de l'exercice 2 dans laquelle on prend $A^\star$ en lieu et place de ${}^tA$. On trouve

$$\sqrt{\max_i |\lambda_i(A^\star A)|} = \sqrt{\rho\Big(A^\star A\Big)} = \|A\|_2 = \|A^\star\|_2 \,.$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\|A^{-1}\|_2 = \|(A^{-1})^\star\|_2 &= \sqrt{\max_i |\lambda_i((A^{-1})^\star A^{-1})|} = \sqrt{\max_i |\lambda_i((A^\star)^{-1} A^{-1})|} \\ &= \sqrt{\max_i |\lambda_i((AA^\star)^{-1})|} = \sqrt{\max_i |\lambda_i((A^\star A)^{-1})|} \\ &= \sqrt{\max_i \frac{1}{|\lambda_i(A^\star A)|}} = \sqrt{\frac{1}{\min_i |\lambda_i(A^\star A)|}} \,.\end{aligned}$$

Par suite

$$\mathrm{cond}_2(A) = \sqrt{\frac{\max_i |\lambda_i(A^\star A)|}{\min_i |\lambda_i(A^\star A)|}} \,.$$

d. si A est symétrique et réelle alors $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\max_i |\lambda_i(A)|}{\min_i |\lambda_i(A)|}$, où les nombres $\lambda_i(A)$ sont les valeurs propres de A ;

Lorsque A est symétrique et réelle, ses valeurs propres sont réelles et, $A^\star = {}^tA = A$ $\lambda_i(A^\star A) = \lambda_i({}^tAA) = \lambda_i(AA) = \Big(\lambda_i(A)\Big)^2$, donc $\sqrt{\lambda_i(A^\star A)} = |\lambda_i(A)|$.
On applique la question précédente et on trouve

$$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\max_i |\lambda_i(A)|}{\min_i |\lambda_i(A)|} \,.$$

e. si U est une matrice orthogonale alors $\mathrm{cond}_2(U) = 1$ et $\mathrm{cond}_2(AU) = \mathrm{cond}_2(UA) = \mathrm{cond}_2(A)$.

On a

$$\begin{aligned}&\|U\|_2 = \sqrt{\rho\Big(U^\star U\Big)} = \sqrt{\rho(I)} = 1 \,,\\ &\|U^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho\Big((U^{-1})^\star\, U^{-1}\Big)} = \sqrt{\rho\Big((U^\star)^{-1}\, U^{-1}\Big)} = \sqrt{\rho\Big((U\,U^\star)^{-1}\Big)} = \sqrt{\rho(I)} = 1 \,,\end{aligned}$$

puis

$$\mathrm{cond}_2(U) = \|U\|_2\, \|U^{-1}\|_2 = 1 \,.$$

Pour le deuxième conditionnement on écrit :

$$\|AU\|_2 = \sqrt{\rho\Big((AU)^\star AU\Big)} = \sqrt{\rho\Big(U^\star A^\star AU\Big)} = \sqrt{\rho\Big(A^\star A\Big)} = \|A\|_2\,,$$

$$\begin{aligned}\|(AU)^{-1}\|_2 &= \sqrt{((AU)^{-1})^\star\,(AU)^{-1}} = \sqrt{\rho\Big((U^{-1}A^{-1})^\star\,U^{-1}A^{-1}\Big)}\\ &= \sqrt{\rho\Big((A^{-1})^\star(U^{-1})^\star U^{-1}A^{-1}\Big)} = \sqrt{\rho\Big((A^{-1})^\star(U^\star)^{-1}U^{-1}A^{-1}\Big)}\\ &= \sqrt{\rho\Big((A^{-1})^\star\,(UU^\star)^{-1}\,A^{-1}\Big)} = \sqrt{\rho\Big((A^{-1})^\star\,A^{-1}\Big)}\\ &= \|A^{-1}\|_2\,.\end{aligned}$$

D'où

$$\mathrm{cond}_2(AU) = \|AU\|_2\,\|(AU)^{-1}\|_2 = \|A\|_2\,\|A^{-1}\|_2 = \mathrm{cond}_2(A)\,.$$

Pour calculer le troisième conditionnement on procède comme ci-dessus :

$$\|UA\|_2 = \sqrt{\rho\Big((UA)^\star UA\Big)} = \sqrt{\rho\Big(A^\star U^\star UA\Big)} = \sqrt{\rho\Big(A^\star A\Big)} = \|A\|_2\,,$$

$$\begin{aligned}\|(UA)^{-1}\|_2 &= \sqrt{\Big((UA)^{-1}\Big)^\star(UA)^{-1}} = \sqrt{\rho\Big((A^{-1}U^{-1})^\star A^{-1}U^{-1}\Big)}\\ &= \sqrt{\rho\Big((U^{-1})^\star(A^{-1})^\star A^{-1}U^{-1}\Big)} = \sqrt{\rho\Big((U^{-1})^\star(A^\star)^{-1}A^{-1}U^{-1}\Big)}\\ &= \sqrt{\rho\Big((U^{-1})^\star(AA^\star)^{-1}U^{-1}\Big)} = \sqrt{\rho\Big((AA^\star)^{-1}\Big)} = \sqrt{\rho\Big((A^\star)^{-1}A^{-1}\Big)}\\ &= \sqrt{\rho\Big((A^{-1})^\star A^{-1}\Big)} = \|A^{-1}\|_2\,.\end{aligned}$$

D'où

$$\mathrm{cond}_2(UA) = \|UA\|_2\,\|(UA)^{-1}\|_2 = \|A\|_2\,\|A^{-1}\|_2 = \mathrm{cond}_2(A)\,.$$

4.2 Analyse perturbative

Soient x et $x+\delta x$ les solutions des systèmes linéaires

$$\begin{aligned} Ax &= b\,,\\ (A+\delta A)(x+\delta x) &= b\,.\end{aligned}$$

a. Montrer que $\dfrac{\|\delta x\|_p}{\|x+\delta x\|_p} \leq \mathrm{cond}_p(A)\dfrac{\|\delta A\|_p}{\|A\|_p}$**.**

Des systèmes linéaires proposés on peut écrire

$$\begin{aligned} Ax = b = (A + \delta A)(x + \delta x) &\iff A\delta x = -\delta A\,(x + \delta x) \\ &\iff \delta x = -A^{-1}\,\delta A\,(x + \delta x)\,. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\|\delta x\|_p = \|A^{-1}\,\delta A\,(x + \delta x)\|_p\,,$$

puis

$$\begin{aligned} \|\delta x\|_p \le \|A^{-1}\,\delta A\|_p\,\|x + \delta x\|_p &\le \|A^{-1}\|_p\,\|\delta A\|_p\,\|x + \delta x\|_p \\ &= \|A\|_p\,\|A^{-1}\|_p\,\frac{\|\delta A\|_p}{\|A\|_p}\,\|x + \delta x\|_p\,, \end{aligned} \tag{4.1}$$

ou encore

$$\frac{\|\delta x\|_p}{\|x + \delta x\|_p} \le \mathrm{cond}_p(A)\,\frac{\|\delta A\|_p}{\|A\|_p}\,.$$

b. En déduire que si $\|A^{-1}\,\delta A\|_p < 1$ alors $\dfrac{\|\delta x\|_p}{\|x\|_p} \le \mathrm{cond}_p(A)\dfrac{\|\delta A\|_p}{\|A\|_p}\dfrac{1}{1 - \|A^{-1}\,\delta A\|_p}$.

On part de la première inégalité de la majoration (4.1),

$$\|\delta x\|_p \le \|A^{-1}\,\delta A\|_p\,\|x + \delta x\|_p\,.$$

On en déduit

$$\|\delta x\|_p \le \|A^{-1}\,\delta A\|_p\left(\|x\|_p + \|\delta x\|_p\right).$$

De l'inégalité ci-dessus on peut écrire

$$\left(1 - \|A^{-1}\,\delta A\|_p\right)\|\delta x\|_p \le \|A^{-1}\,\delta A\|_p\,\|x\|_p\,,$$

qui implique

$$\left(1 - \|A^{-1}\,\delta A\|_p\right)\|\delta x\|_p \le \|A^{-1}\|_p\,\|\delta A\|_p\,\|x\|_p \le \mathrm{cond}_p(A)\,\frac{\|\delta A\|_p}{\|A\|_p}\,\|x\|_p\,.$$

Comme $\|A^{-1}\,\delta A\|_p < 1$, on peut diviser l'inégalité ci-dessus par le nombre non nul $1 - \|A^{-1}\,\delta A\|_p$. On trouve

$$\frac{\|\delta x\|_p}{\|x\|_p} \le \mathrm{cond}_p(A)\frac{\|\delta A\|_p}{\|A\|_p}\frac{1}{1 - \|A^{-1}\,\delta A\|_p}\,.$$

4.3 Applications

Calculer le conditionnement par rapport à la norme $\| \ \|_2$ de la matrice suivante

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & & & & & & & \\ -1 & \alpha & -1 & & & & & & \\ & -1 & \alpha & -1 & & & 0 & & \\ & & -1 & \alpha & -1 & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & -1 & \alpha & -1 & & \\ & & 0 & & & -1 & \alpha & -1 & \\ & & & & & & -1 & \alpha & -1 \\ & & & & & & & -1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

où α est un paramètre réel.

Comme la matrice T_α est symétrique et réelle, ses valeurs propres sont réelles, et son nombre de conditionnement est donné par

$$\mathrm{cond}_2(T_\alpha) = \frac{\max_i |\lambda_i(T_\alpha)|}{\min_i |\lambda_i(T_\alpha)|}.$$

On commence alors par chercher les valeurs propres de T_α.
Soient $q = {}^t(q_0\,, q_1\,, \ldots, q_n\,, q_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ tel que $q_0 = q_{n+1} = 0$ et n l'ordre de T_α. Si ${}^t(q_1\,, \ldots, q_n)$ est vecteur propre de T_α associé à la valeur propre λ alors on a

$$T_\alpha\, q = \lambda\, q\,,$$

ou encore

$$\begin{aligned} & q_{l-1} + (\lambda - \alpha)\, q_l + q_{l+1} = 0\,, \quad l = 1, \ldots, n\,, \\ & \text{avec } \ q_0 = q_{n+1} = 0\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Le polynôme caractéristique associé à la récurrence linéaire (4.2) est

$$p(r) = r^2 + (\lambda - \alpha)\, r + 1\,,$$

dont les racines sont

$$\begin{aligned} r_- &= \frac{-(\lambda-\alpha) - \sqrt{(\lambda-\alpha)^2 - 4}}{2}\,, \\ r_+ &= \frac{-(\lambda-\alpha) + \sqrt{(\lambda-\alpha)^2 - 4}}{2}\,. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ici, le symbole "$\sqrt{\ }$" est la racine carrée au sens général c'est-à-dire qu'il peut conduire à des nombres complexes.

La solution de la récurrence linéaire (4.2) est alors

$$q_l = c_- r_-^l + c_+ r_+^l \,.$$

Les conditions $q_0 = q_{n+1} = 0$ donnent respectivement

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & c_- + c_+ \\ 0 & = & c_- r_-^{n+1} + c_+ r_+^{n+1} \end{array} \iff \begin{array}{rcl} c_+ & = & -c_- \,, \\ r_+^{n+1} & = & r_-^{n+1} \,. \end{array}$$

La résolution de l'équation complexe $r_+^{n+1} = r_-^{n+1}$ ou encore $z^{n+1} = \left(\frac{r_+}{r_-}\right)^{n+1} = 1$, donne $n+1$ solutions

$$\begin{aligned} & r_+^{(k)} = r_-^{(k)} \exp\left(\frac{\iota\, 2\, k\, \pi}{n+1}\right) , k = 0 \,, \dots , n \,, \\ & \text{où } \; \iota^2 = -1 \,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Cependant le cas $k = 0$ doit être omis car il correspond à $r_+ = r_-$ et donc $q_l = 0\,,\ l = 1, ..., n$, donc au vecteur $q = 0$, supposé être un vecteur propre.
En multipliant l'équation (4.4) par $\exp\left(\frac{-\iota\, k\, \pi}{n+1}\right)$ et substituant les valeurs de $r_\pm$ fournies par l'équation (4.3), on obtient

$$\begin{aligned} & \left(\lambda - \alpha + \sqrt{(\lambda-\alpha)^2 - 4}\right) \exp\left(\frac{-\iota\, k\, \pi}{n+1}\right) \\ & = \left(\lambda - \alpha - \sqrt{(\lambda-\alpha)^2 - 4}\right) \exp\left(\frac{\iota\, k\, \pi}{n+1}\right) . \end{aligned} \tag{4.5}$$

Ce qui donne

$$\sqrt{(\lambda-\alpha)^2 - 4}\, \cos\left(\frac{k\,\pi}{n+1}\right) = (\lambda - \alpha)\, \iota\, \sin\left(\frac{k\,\pi}{n+1}\right) .$$

D'où en prenant le carré, on trouve

$$(\lambda-\alpha)^2 \left[\cos^2\left(\frac{k\,\pi}{n+1}\right) + \sin^2\left(\frac{k\,\pi}{n+1}\right)\right] - 4\, \cos^2\left(\frac{k\,\pi}{n+1}\right) = 0\,,$$

ou bien encore

$$(\lambda-\alpha)^2 - \left[2\, \cos\left(\frac{k\,\pi}{n+1}\right)\right]^2 = 0\,. \tag{4.6}$$

La résolution de l'équation (4.6) d'inconnue λ donne

$$\lambda = \alpha \pm 2\, \cos\left(\frac{k\,\pi}{n+1}\right) . \tag{4.7}$$

On en retient que le signe -, car le signe + engendre le même ensemble des valeurs λ, puisque

$$\lambda_{k_0}^- = \alpha - 2\, \cos\left(\frac{k_0\,\pi}{n+1}\right) = \alpha + 2\, \cos\left(\pi + \frac{k_0\,\pi}{n+1}\right) = \alpha + 2\, \cos\left(\frac{(k_0+n+1)\,\pi}{n+1}\right) = \lambda_{k_0+n+1}^+ \,.$$

Par suite les valeurs propres de T_α sont

$$\lambda_k = \alpha - 2\,\cos\left(\frac{k\,\pi}{n+1}\right),\, k = 1\,,\ldots,n\,. \tag{4.8}$$

On fait λ_k de (4.8) dans l'équation (4.3), on trouve

$$\begin{aligned} r_- &= \cos\left(\frac{k\,\pi}{n+1}\right) - \iota\,\sin\left(\frac{k\,\pi}{n+1}\right), \\ r_+ &= \cos\left(\frac{k\,\pi}{n+1}\right) + \iota\,\sin\left(\frac{k\,\pi}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$q_l^{(k)} = c_+(r_+^l - r_-^l) = 2c_+\,\iota\,\sin\left(\frac{k\,l\,\pi}{n+1}\right).$$

On cherche le coefficient c_+ pour que $\|q^{(k)}\|_2 = 1$. Pour cela on calcule $\|q^{(k)}\|_2$:

$$\begin{aligned} \|q_l\|_2^2 &= \sum_{k=1}^{n} |q_l^{(k)}|^2 = (2|c_+|)^2 \sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(\frac{k\,l\,\pi}{n+1}\right)\right]^2 \\ &= (2|c_+|)^2 \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\exp\left(\frac{\iota\,k\,l\,\pi}{n+1}\right) - \exp\left(\frac{-\iota\,k\,l\,\pi}{n+1}\right)}{2\,\iota}\right]^2 \\ &= \frac{(2|c_+|)^2}{(2\,\iota)^2}\left[\sum_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{2\iota\,k\,l\,\pi}{n+1}\right) + \exp\left(\frac{-2\iota\,k\,l\,\pi}{n+1}\right) - 2\right] \\ &= \frac{(2|c_+|)^2}{(2\,\iota)^2}\left[\sum_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{2\iota\,k\,l\,\pi}{n+1}\right) + \sum_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{-2\iota\,k\,l\,\pi}{n+1}\right) - \sum_{k=1}^{n}2\right] \\ &= \frac{(2|c_+|)^2}{(2\,\iota)^2}\left[\left(-1 + \sum_{k=0}^{n}\exp\left(\frac{2\iota\,k\,l\,\pi}{n+1}\right)\right) + \left(-1 + \sum_{k=0}^{n}\exp\left(\frac{-2\iota\,k\,l\,\pi}{n+1}\right)\right) - \sum_{k=1}^{n}2\right] \\ &= \frac{(2|c_+|)^2}{(2\,\iota)^2}\left[-2 + \frac{1-\exp\left(\frac{2\iota\,k\,l\,\pi(n+1)}{n+1}\right)}{1-\exp\left(\frac{2\iota\,k\,l\,\pi}{n+1}\right)} + \frac{1-\exp\left(\frac{-2\iota\,k\,l\,\pi\,(n+1)}{n+1}\right)}{\exp\left(\frac{-2\iota\,k\,l\,\pi}{n+1}\right)} - 2n\right] \\ &= \frac{(2|c_+|)^2}{(2\,\iota)^2}\Big[-2+0+0-2n\Big] \\ &= \frac{(2|c_+|)^2}{(2\,\iota)^2}\Big[-2(n+1)\Big]. \end{aligned}$$

De la condition $\|q^{(k)}\|_2 = 1$, on peut prendre

$$c_+ = -\iota\sqrt{\frac{1}{2(n+1)}} = -\frac{\iota}{2}\sqrt{\frac{2}{n+1}}\,.$$

Conclusion Les valeurs propres de la matrice T_α sont

$$\lambda_k = \alpha - 2\,\cos\left(\frac{k\,\pi}{n+1}\right)\,,k = 1\,,\ldots,n\,. \tag{4.9}$$

avec les vecteurs propres correspondants $q^{(k)} = {}^t(q_1^{(k)}\,,\ldots,q_l^{(k)},\ldots,q_n^{(k)})$ où

$$q_l^{(k)} = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\,\sin\left(\frac{k\,l\,\pi}{n+1}\right)\,,l = 1\,,\ldots,n\,. \tag{4.10}$$

Les valeurs maximale et minimale de valeurs absolues des valeurs propres de T_α sont

$$\max_i \left|\lambda_i(T_\alpha)\right| = \left|\alpha - 2\,\cos\left(\frac{n\,\pi}{n+1}\right)\right|,$$

$$\min_i \left|\lambda_i(T_\alpha)\right| = \left|\alpha - 2\,\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right|.$$

D'où

$$\mathrm{cond}_2(T_\alpha) = \frac{\max_i |\lambda_i(T_\alpha)|}{\min_i |\lambda_i(T_\alpha)|} = \frac{\left|\alpha - 2\,\cos\left(\frac{n\,\pi}{n+1}\right)\right|}{\left|\alpha - 2\,\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right|}\,.$$