Analyse Numérique
Corrigé du TD 8

EXERCICE 1
Convergence de méthodes itératives linéaires

1.1 Relation entre le rayon spectral et les normes matricielles

**Soit A une matrice carrée d'ordre $n > 0$, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.
Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on note par $\| \ \|_p$ la norme matricielle calculée à partir de la norme vectorielle $\| \ \|_p$ *i.e.***

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p = \sup_{\|x\|_p \leq 1} \|Ax\|_p = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} .$$

a. Montrer que son rayon spectral $\rho(A)$ vérifie

$$\rho(A) \leq \|A\|_p \, , \quad \forall\, 1 \leq p \leq +\infty \, .$$

Pour le corps $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n > 0$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Pour montrer que $\rho(A) \leq \|A\|_p$, on sépare le cas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est évident, du cas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est plus subtil.

• *Cas* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
Comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable, il existe un vecteur propre $x^0 \in \mathbb{C}^n$ associé à la plus grande valeur propre en module $|\lambda| = \rho(A)$: $Ax^0 = \rho(A)x^0$. On en déduit

$$\rho(A)\, \|x^0\|_p = \|\lambda x^0\|_p = \|Ax^0\|_p \leq \|A\|_p \, \|x^0\|_p \, ,$$

d'où

$$\rho(A) \leq \|A\|_p \, , \tag{1.1}$$

puisque $x^0 \neq 0$.

• *Cas* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Le problème est que la matrice A n'a pas forcément ses valeurs propres dans $\mathbb{R}$ et donc ses vecteurs propres sont en toute généralité dans $\mathbb{C}^n$. Comme pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la norme matricielle $\| \ \|_p$ utilisée pour évaluer $\|A\|_p$ est calculée à partir de la norme vectorielle $\| \ \|_p$ *i.e.* du type $\|x\|_p$ pour $x \in \mathbb{R}^n$. De ce fait comme x^0, vecteur propre associé à la plus grande valeur propre en module $|\lambda| = \rho(A)$, peut être dans $\mathbb{C}^n$, la quantité $\|x^0\|_p$ peut ne pas avoir de sens. Pour contourner cette difficulté, on peut procéder comme suit.

On choisit une norme vectorielle N sur $\mathbb{C}^n$. On note N la norme matricielle calculée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à partir de la norme vectorielle. On note encore N sa restriction sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est bien sûr une norme.
Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, deux quelconques normes sont équivalentes : il existe $C > 0$ tel que $N(B) \le C\|B\|_p$ pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$, on a $\Big(\rho(A)\Big)^m = \rho(A^m)$ et $\|A^m\|_p \le \Big(\|A\|_p\Big)^m$, et l'on obtient grâce au résultat (1.1) la majoration suivante :

$$\Big(\rho(A)\Big)^m = \rho(A^m) \le N(A^m) \le C\,\|A^m\|_p \le C\,\Big(\|A\|_p\Big)^m .$$

Ce qui implique

$$\rho(A) \le C^{1/m}\,\|A\|_p \,. \tag{1.2}$$

En faisant $m \to +\infty$ dans (1.2), et avec $\lim\limits_{m\to+\infty} C^{1/m} = 1$, on obtient

$$\rho(A) \le \|A\|_p \,. \tag{1.3}$$

D'où le résultat.

b. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une norme matricielle $\|\ \|$ dépendant de ε et A, tel que

$$\|A\| \le \rho(A) + \varepsilon \,. \tag{1.4}$$

Il existe une matrice U inversible tel que $T = U^{-1}AU$ soit une matrice triangulaire,

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & & \cdots & t_{1j} & t_{1\,n-1} & t_{1n} \\ & \lambda_2 & & & & t_{2\,n-1} & t_{2\,n} \\ & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & \lambda_i & t_{ij} & & t_{in} \\ & & 0 & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \lambda_{n-1} & t_{n-1\,n} \\ & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

Pour tout δ, on définit une matrice diagonale $D_\delta = diag(1\,, \delta\,, \delta^2\,, \ldots\,, \delta^{n-1})$ *i.e.*

$$D_\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \delta^{i-1} & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 0 & \delta^{n-2} & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \delta^{n-1} \end{pmatrix}.$$

La matrice T_δ définie par

$$T_\delta = (UD_\delta)^{-1} A (UD_\delta) = {D_\delta}^{-1} T D_\delta$$

vérifie

$$T_\delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta t_{12} & & \cdots & \delta^{j-1} t_{1j} & \delta^{n-2} t_{1\,n-1} & \delta^{n-1} t_{1n} \\ & \lambda_2 & & & & \delta^{n-3} t_{2\,n-1} & \delta^{n-2} t_{2\,n} \\ & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & \lambda_i & \delta^{j-i} t_{ij} & & \delta^{n-i} t_{in} \\ & & 0 & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \lambda_{n-1} & \delta t_{n-1\,n} \\ & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

Etant donné $\varepsilon > 0$, on peut choisir δ suffisamment petit pour que les éléments extra-diagonaux de T_δ soient très petits aussi, par exemple pour que, pour tout $1 \leq i \leq n-1$,

$$\sum_{j=i+1}^{n} \delta^{j-i} t_{ij} \leq \varepsilon\,.$$

Alors l'application $B \mapsto \|(UD_\delta)^{-1} B (UD_\delta)\|_\infty$ est une norme matricielle, qui dépend de ε et A, vérifie

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon\,.$$

On vérifie $B \mapsto \|(UD_\delta)^{-1} B (UD_\delta)\|_\infty$ est la norme matricielle calculée à partir de la norme vectorielle $v \in \mathbb{K}^n \mapsto \|(UD_\delta)^{-1} v\|_\infty$.

c. Montrer que

$$\lim_{m \to +\infty} \|A^m\|^{\frac{1}{m}} = \rho(A)\,.$$

A la question **a.** de 1.1, on a montré que

$$\rho(A) \leq \|A\| \,.$$

En appliquant la relation ci-dessus à la matrice A^m, on obtient

$$\rho(A^m) \leq \|A^m\| \,.$$

Par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ on obtient

$$\rho(A^m) = \Big(\rho(A)\Big)^m \,.$$

Ce qui entraîne

$$\Big(\rho(A)\Big)^m \leq \|A^m\|_p \,,$$

ou bien encore

$$\rho(A) \leq \|A^m\|_p^{1/m} \,. \tag{1.5}$$

Pour la seconde partie inégalité, on procède comme suit.
Soit $\varepsilon > 0$, on pose $A_\varepsilon = \dfrac{A}{\rho(A) + \varepsilon}$.
On a

$$\begin{aligned}\rho(A_\varepsilon) &= \frac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon} \\ &< \frac{\rho(A)+\varepsilon}{\rho(A)+\varepsilon} \\ &< 1 \,.\end{aligned}$$

Comme $\rho(A_\varepsilon) < 1$, la suite puissance de matrices $(A_\varepsilon^m)_{m\geq 0}$ converge vers la matrice nulle (la démonstration est faite dans l'exercice 1.2 **a.**). Ce qui signifie que la suite des normes $(\|A_\varepsilon^m\|_p)_{m\geq 0}$ est de limite nulle. Donc

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \,, \forall m \geq m_0 \,, \|A_\varepsilon^m\|_p \leq 1 \,,$$

c'est-à-dire

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \,, \forall m \geq m_0 \,, \|A^m\|_p^{1/m} \leq \rho(A) + \varepsilon \,, \tag{1.6}$$

En regroupant (1.5) et (1.6), on obtient

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \,, \forall m \geq m_0 \,, \rho(A) \leq \|A^m\|_p^{1/m} \leq \rho(A) + \varepsilon \,. \tag{1.7}$$

On fait $\varepsilon \to 0$ dans (1.7), et on a

$$\lim_{m\to+\infty} \|A^m\|_p^{1/m} = \rho(A) \,. \tag{1.8}$$

1.2 Suite et série de matrices

Définition 1.1. *Convergence d'une suite de matrices*
On dit qu'une suite de matrices $(A_m)_{m\geq 0}$ converge vers la matrice A si $\lim_{m\to+\infty} \|A_m - A\|_p = 0$.

a. Montrer que

$$\lim_{m\to+\infty} A^m = 0 \Longleftrightarrow \rho(A) < 1\,.$$

Montrons que $\lim_{m\to+\infty} A^m = 0 \Longrightarrow \rho(A) < 1$.

Supposons que $\lim_{m\to+\infty} A^m = 0$. Si $\rho(A) \geq 1$ alors comme $\|A^m\|_p \geq \Big(\rho(A)\Big)^m$, on aurait $\|A^m\|_p \geq 1$. Par suite la suite de nombres positifs $(\|A^m\|_p)_{m\geq 0}$ ne converge pas, et donc la suite de matrices $(A^m)_{m\geq 0}$ ne converge pas. Nécessairement on a $\rho(A) < 1$.

Montrons que $\rho(A) < 1 \Longrightarrow \lim_{m\to+\infty} A^m = 0$.
Comme $\rho(A) < 1$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\rho(A)+\varepsilon < 1$ (il suffit de prendre $\varepsilon = (1-\rho(A))/2$). La question **b.** de l'exercice 1.1 dit qu'il existe une norme matricielle $\|\ \|$ (dépendant de ε et A) telle que

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon < 1\,.$$

Comme $\|A\| < 1$, la suite de nombres positives $(\|A\|^m)_{m\geq 0}$ converge vers le nombre réel 0. Puisque $\|A^m\| \leq \|A\|^m$ (par récurrence sur m), la suite de nombres positives $(\|A^m\|)_{m\geq 0}$ converge vers le nombre réel 0, ce qui signifie que la suite de matrices $(A^m)_{m\geq 0}$ converge vers la matrice nulle : $\lim_{m\to+\infty} A^m = 0$.

b. Monter que

$$\text{la série } \sum_{m=0}^{+\infty} A^m \text{ converge } \Longleftrightarrow \rho(A) < 1\,.$$

Montrer dans ce cas que $\lim_{m\to+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} A^m = (I - A)^{-1}$**.**

Montrons que la série $\sum_{m=0}^{+\infty} A^m$ *converge* $\Longrightarrow \rho(A) < 1$.

Si la série $\sum_{m=0}^{+\infty} A^m$ converge alors la série de nombres positifs $\sum_{m=0}^{+\infty} \|A^m\|_p$ converge, donc la suite de nombres positifs $(\|A^m\|)_{m\geq 0}$ tend vers 0. D'après la question **b.** ci-dessus, $\rho(A) < 1$.

Montrons que $\rho(A) < 1 \Longrightarrow$ *la série* $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} A^m$ *converge.*

Supposons que le rayon spectral $\rho(A) < 1$. Les valeurs propres de la matrice $I - A$ sont $1 - \lambda(A)$ où $\lambda(A)$ sont les valeurs propres de A. Les valeurs propres de $I - A$ sont non nuls et donc la matrice $I - A$ est inversible.
Posons

$$B_m = I + A + ... + A^m \,. \tag{1.9}$$

Alors

$$AB_m = A + A^2 + ... + A^{m+1} \tag{1.10}$$

La différence des équations (1.9) et (1.10) donne

$$(I - A)B_m = I - A^{m+1}$$

En faisant $m \to +\infty$ dans l'équation ci-dessus, et en utilisant $\lim\limits_{m\to+\infty} A^{m+1} = 0$, on obtient

$$(I - A) \lim_{m\to+\infty} B_m = I \,,$$

ou encore

$$\lim_{m\to+\infty} B_m = (I - A)^{-1} \,,$$

ou bien encore

$$\sum_{m=0}^{+\infty} A^m = (I - A)^{-1} \,.$$

EXERCICE 2
Un exemple de méthode itérative

Soit A **une matrice carrée d'ordre** $n > 0$**,** $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ **régulière et** $b \in \mathbb{R}^n$**. On veut résoudre le système linéaire**

$$Ax = b \,.$$

On note D **la matrice diagonale constituée de la diagonale de** A**. Soit** $\alpha \neq 0$**, on étudie la méthode itérative**

$$x^{k+1} = (I - \alpha D^{-1} A)x^k + \alpha D^{-1} b \,. \tag{2.1}$$

a. Montrer que la méthode est consistante *i.e.* si $(x^k)_{k\geq 0}$ **converge vers** x **alors** x **est solution.**

On fait $k \to +\infty$ dans (2.1) et on obtient

$$x = (I - \alpha D^{-1} A)x + \alpha D^{-1} b \,,$$

ou encore

$$\alpha D^{-1}Ax = \alpha D^{-1}b\,.$$

En multipliant à gauche par D l'équation ci-dessus, et en simplifiant par $\alpha \neq 0$ on a

$$Ax = b\,.$$

b. Exprimer les coefficients de la matrice $D^{-1}A$ en fonction de ceux de A.

Soient $i\,,j \in \{1,...,n\}$. Alors le coefficient $(D^{-1}A)_{ij}$ est donné par

$$\begin{aligned}(D^{-1}A)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n}(D^{-1})_{ik}(A)_{kj}\\ &= (D^{-1})_{ii}(A)_{ij}\\ &= \frac{a_{ij}}{a_{ii}}\,,\end{aligned}$$

ou encore

$$(D^{-1}A)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ i = j\,,\\ \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{si } \ i \neq j\,.\end{cases} \tag{2.2}$$

c. On suppose que $0 < \alpha \leq 1$ et que A satisfait la propriété suivante

$$\forall\, i\,, 1 \leq i \leq n\,, |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\,.$$

Montrer que la méthode est bien définie et

$$\|I - \alpha D^{-1}A\|_{\infty} < 1\,.$$

$$\begin{aligned}\text{La méthode est bien définie} &\iff D^{-1}\text{existe}\,,\\ &\iff a_{ii} \neq 0 \ \ \forall\, 1 \leq i \leq n\,.\end{aligned}$$

Or, $\forall\, i\,, 1 \leq i \leq n\,, |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \geq 0$, c'est-à-dire $\forall\, i\,, 1 \leq i \leq n\,, |a_{ii}| > 0$.

D'où la méthode est bien définie.

Calcul de $\|I - \alpha D^{-1}A\|_{\infty}$

Posons $J_\alpha = I - \alpha D^{-1}A$

Les coefficients de J_α sont donnés par

$$(J_\alpha)_{ij} = (I - D^{-1}A)_{ij} = (I)_{ij} - (D^{-1}A)_{ij}\,.$$

En utilisant (2.2), on obtient

$$(J_\alpha)_{ij} = \begin{cases} 1-\alpha & \text{si } \ i=j\,, \\ -\alpha\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{si } \ i \neq j\,. \end{cases}$$

Maintenant fixons i dans $\{1\,,\ldots,n\}$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |(J_\alpha)_{ij}| &= |(J_\alpha)_{ii}| + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |(J_\alpha)_{ij}| \\
&= |1-\alpha| + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |(J_\alpha)_{ij}| \\
&= |1-\alpha| + |\alpha|\,\frac{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \\
&< |1-\alpha| + |\alpha| \\
&= 1-\alpha| + \alpha \\
&= 1
\end{aligned}$$

car $0<\alpha\leq 1$.
Donc

$$\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |(J_\alpha)_{ij}| < 1$$

c'est-à-dire

$$\|J_\alpha\|_\infty = \|I-\alpha D^{-1}A\|_\infty < 1\,.$$

La représentation de chacune des matrices A, D et J_α sous forme de tableaux s'écrit

$$A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{1j} & \cdots & a_{1l} & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & & & & a_{2\,n-1} & a_{2\,n} \\
\vdots & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\
a_{1i} & & a_{ij} & a_{ii} & a_{il} & & a_{in} \\
\vdots & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\
a_{n-1\,1} & a_{n_1\,2} & & & & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\
a_{n\,1} & a_{n\,2} & a_{n\,j} & \cdots & a_{n\,l} & a_{n\,n-1} & a_{n\,n}
\end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & a_{ii} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 0 & a_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

et

$$J_\alpha = \begin{pmatrix} 1-\alpha & -\alpha\,\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\alpha\,\frac{a_{1j}}{a_{11}} & \cdots & -\alpha\,\frac{a_{1l}}{a_{11}} & -\alpha\,\frac{a_{1\,n-1}}{a_{11}} & -\alpha\,\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\alpha\,\frac{a_{21}}{a_{22}} & 1-\alpha & & & & -\alpha\,\frac{a_{2\,n-1}}{a_{22}} & -\alpha\,\frac{a_{2\,n}}{a_{22}} \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ -\alpha\,\frac{a_{1i}}{a_{ii}} & & -\alpha\,\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & 1-\alpha & -\alpha\,\frac{a_{il}}{a_{ii}} & & -\alpha\,\frac{a_{in}}{a_{ii}} \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ -\alpha\,\frac{a_{n-1\,1}}{a_{n-1\,n-1}} & -\alpha\,\frac{a_{n_1\,2}}{a_{n-1\,n-1}} & & & & 1-\alpha & -\alpha\frac{a_{n-1\,n}}{a_{n-1\,n-1}} \\ -\alpha\,\frac{a_{n\,1}}{a_{n\,n}} & -\alpha\,\frac{a_{n\,2}}{a_{n\,n}} & -\alpha\,\frac{a_{n\,j}}{a_{n\,n}} & \cdots & -\alpha\,\frac{a_{n\,l}}{a_{n\,n}} & -\alpha\,\frac{a_{n\,n-1}}{a_{n\,n}} & 1-\alpha \end{pmatrix}.$$

En déduire que la méthode est convergente.
On a $\rho(J_\alpha) \le \|J_\alpha\|_\infty < 1$, donc le rayon spectral de la matrice d'itération J_α de la méthode satisfait $\rho(J_\alpha) < 1$, qui montre que la méthode est convergente.

Remarque Pour $\alpha = 1$, la méthode ci-dessus est celle de Jacobi.

EXERCICE 3
Méthodes itératives classiques sur une matrice tridiagonale

Soit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ **une matrice carrée d'ordre** $n > 0$**, du système linéaire** $Ax = b$**, définie par**
$a_{ii} = i+1\,, i = 1, ..., n\,;\, a_{i+1\,i} = 1\,, i = 1, ..., n-1\,;\, a_{i\,i+1} = -i\,, i = 1, ..., n-1\,,$
les autres termes étant nuls.

a. Calculer la matrice d'itération de Jacobi. Prouver que son rayon spectral est < 1**.**

Calcul de la matrice d'itération de Jacobi
La méthode de Jacobi s'écrit

$$\begin{cases} x_0 \ \text{donné}\,, \\ x^{k+1} = (I - D^{-1}A)x^k + D^{-1}b\,, \end{cases}$$

où D est la matrice diagonale constituée de la diagonale de A *i.e.*

$$(D)_{ij} = d_{ij} = \begin{cases} a_{ii} & \text{si } \ i = j\,, \\ 0 & \text{si } \ i \neq j\,, \end{cases} \quad \forall\, i, j = 1, ..., n\,.$$

La représentation des matrices A et D sous forme de tableau sont les suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & -2 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & i+1 & -i & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 & n & -(n-1) \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & n+1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & i+1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 0 & n & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & n+1 \end{pmatrix}.$$

La matrice d'itération de Jacobi J est

$$J = I - D^{-1}A\,.$$

Calculons en premier les coefficients de la matrice $D^{-1}A$ en fonction de ceux de A. Pour $i, j \in \{1, ..., n\}$, on a

$$(D^{-1}A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (D^{-1})_{ik}\,(A)_{kj} = (D^{-1})_{ii}\,(A)_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}\,,$$

d'où

$$\begin{cases} (D^{-1}A)_{ii} = \dfrac{a_{ii}}{a_{ii}} = \dfrac{i+1}{i+1} = 1\,, \quad i=1,...,n\,, \\ (D^{-1}A)_{i+1\,i} = \dfrac{a_{i+1\,i}}{a_{i+1\,i+1}} = \dfrac{-1}{i+2} = -\dfrac{1}{i+2}\,, \quad i=1,...,n-1\,, \\ (D^{-1}A)_{i\,i+1} = \dfrac{a_{i\,i+1}}{a_{ii}} = \dfrac{-i}{i+1} = -\dfrac{i}{i+1}\,, \quad i=1,...,n-1\,, \\ \text{les autres termes sont nuls.} \end{cases}$$

Les coefficients de la matrice d'itération de Jacobi de $J = I - D^{-1}A$ sont donnés par

$$\begin{cases} J_{ii} = (I - D^{-1}A)_{ii} = 1 - (D^{-1}A)_{ii} = 0\,, \quad i=1,...,n\,, \\ J_{i+1\,i} = (I - D^{-1}A)_{i+1\,i} = 0 - (D^{-1}A)_{i+1\,i} = \dfrac{1}{i+2}\,, \quad i=1,...,n-1\,, \\ J_{i\,i+1} = (I - D^{-1}A)_{i\,i+1} = 0 - (D^{-1}A)_{i\,i+1} = \dfrac{i}{i+1}\,, \quad i=1,...,n-1\,, \\ \text{les autres termes sont nuls.} \end{cases}$$

On peut représenter la matrice d'itération de Jacobi J sous la forme du tableau suivant

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1/3 & 0 & -2/3 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1/(i+1) & 0 & -i/(i+1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & -1/n & 0 & -(n-1)/n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1/(n+1) & 0 \end{pmatrix}.$$

Majoration du rayon spectral
On a

$$\begin{aligned} \|J\|_1 &= \max_{i=2,\dots,n-1}\left(|-\frac{1}{3}|\,, |-\frac{i-1}{i}| + |-\frac{1}{i+2}|\,, |-\frac{n-1}{n}| \right) \\ &< 1 \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} < 1\,, \\ &\frac{n-1}{n} < 1\,, \\ &\frac{i-1}{i} + \frac{1}{i+2} = \frac{i^2+2i-2}{i^2+2i} < \frac{i^2+2i}{i^2+2i} < 1\,. \end{aligned}$$

d'où le rayon spectral $\rho(J) < 1$ car

$$\rho(J) \leq \|J\|_1 < 1\,.$$

Finalement la méthode de Jacobi converge.

b. Calculer la matrice G d'itération de Gauss-Seidel. Montrer que le polynôme caractéristique de G s'écrit

$$P_G(\lambda) = \lambda^n \det(I - L - \frac{1}{\lambda}U)\,,$$

et si $|\lambda| \geq 1$ alors $\det(I - L - \frac{1}{\lambda}U) \neq 0$.

Calcul de la matrice d'itération de Gauss-Seidel

On décompose la matrice A sous la forme $A = D - E - F$ avec

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \ddots & & \text{-F} & \\ & & \text{D} & & \\ & \text{-E} & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

où

- la matrice D est la matrice diagonale constituée de la diagonale de A *i.e.*

$$(D)_{ij} = d_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} a_{ii} & \text{si } \; i = j\,, \\ 0 & \text{si } \; i \neq j\,, \end{array} \right. \quad \forall\, i, j = 1, ..., n\,,$$

- la matrice $-E$ est la matrice triangulaire strictement inférieure de A *i.e.*

$$(-E)_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} a_{ij} & \text{si } \; i > j\,, \\ 0 & \text{si } \; i \leq j\,, \end{array} \right. \quad \forall\, i, j = 1, ..., n\,,$$

- la matrice $-F$ est la matrice triangulaire strictement supérieure de A *i.e.*

$$(-F)_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} a_{ij} & \text{si } \; i < j\,, \\ 0 & \text{si } \; i \geq j\,, \end{array} \right. \quad \forall\, i, j = 1, ..., n\,.$$

On introduit enfin les matrices L et U définies par

$$L = D^{-1}\, E \;\text{ et }\; U = D^{-1}\, F\,.$$

Les matrices L et U peuvent être représenter sous forme de tableaux suivants

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ \frac{a_{1i}}{a_{ii}} & \frac{a_{ij}}{a_{ii}} & 0 & & \text{\huge 0} & \\ & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & 0 & \\ \frac{a_{n\,1}}{a_{n\,n}} & \frac{a_{n\,j}}{a_{n\,n}} & \dots & & \frac{a_{n\,n-1}}{a_{n\,n}} & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & & \dots & \frac{a_{1j}}{a_{11}} & \frac{a_{1\,n-1}}{a_{11}} & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ & 0 & & & & \frac{a_{2\,n-1}}{a_{22}} & \frac{a_{2\,n}}{a_{22}} \\ & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & 0 & \frac{a_{ij}}{a_{ii}} & & \frac{a_{in}}{a_{ii}} \\ & & \text{\huge 0} & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & 0 & \frac{a_{n-1\,n}}{a_{n-1\,n-1}} \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

La méthode de Gauss-Seidel s'écrit

$$\begin{cases} x_0 \;\text{ donné }, \\ x^{k+1} = (D-E)^{-1} F x^k + (D-E)^{-1} b \,. \end{cases}$$

La matrice d'itération de Gauss-Seidel G est

$$G = (D-E)^{-1} \,.$$

Exprimons la matrice G en fonction des matrices L et U.
Des égalités

$$L = D^{-1}\, E \iff E = DL \,,$$
$$U = D^{-1}\, F \iff F = DU \,,$$

On déduit

$$\begin{aligned} G &= (D - DL)^{-1}\, DU\,, \\ &= (D - DL)^{-1}\, DU\,, \\ &= \Big[D(I-L)\Big]^{-1} DU\,, \\ &= (I-L)^{-1}\, D^{-1} DU\,, \\ G &= (I-L)^{-1}\, U\,. \end{aligned}$$

Appliqué à la matrice A proposée on trouve

$$L = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1/(i+1) & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 0 & 1/n & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1/(n+1) \end{pmatrix} \bullet$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Donc

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1/(i+1) & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1/n & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1/(n+1) & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice U se calcule de la manière suivante :

$$U = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1/(i+1) & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 0 & 1/n & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1/(n+1) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & i & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 0 & 0 & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & i/(i+1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 0 & 0 & (n-1)/n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $I - L$ est donnée par

$$I - L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1/(i+1) & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & -1/n & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1/(n+1) & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Calcul du polynôme caractéristique de G

On a

$$\begin{aligned}
P_G(\lambda) &= \det(\lambda\, I - G) \\
&= \det\Big(\lambda\, I - (I-L)^{-1}\, U\Big) \\
&= \det\Big[(I-L)^{-1}\,\Big((I-L)\,\lambda\, I - U\Big)\Big] \\
&= \Big[\det(I-L)^{-1}\Big]\det\Big[\lambda\,(I-L)\, - U\Big] \\
&= \Big[\det(I-L)^{-1}\Big]\,\Big[\lambda^n \det\Big(I - L - \frac{1}{\lambda}U\Big)\Big] \\
&= \lambda^n \det(I - L - \frac{1}{\lambda}U)\,,
\end{aligned}$$

car $\det(I-L) = 1$ (équation (3.1)) entrainant $\det(I-L)^{-1} = 1$.

Localisation des valeurs propres de G.

On note $\mathcal{G} = I - L - \dfrac{1}{\lambda}U$

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix}
1 & -1/(2\,\lambda) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
-1/3 & 1 & -2/(3\,\lambda) & \ddots & & & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & -1/(i+1) & 1 & -i/((i+1)\,\lambda) & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & & & \ddots & -1/n & 1 & (n-1)/(n\,\lambda) \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1/(n+1) & 1
\end{pmatrix}.$$

• Supposons que $|\lambda| \geq 1$.

D'après l'exercice 4 du TD 6, les valeurs propres σ de $\mathcal{G} = I - L - \dfrac{1}{\lambda}U$ sont localisées dans l'un des disques de Gerschgörin suivants :

$$\begin{aligned}
&D\Big(1,\ 1/(2\,\lambda)\Big) \subset D\Big(1,\ 1/2\Big)\ , \text{pour } i = 1\,, \\
&D\Big(1,\ 1/(i+1) + i/((i+1)\,\lambda)\Big) \subset D\Big(1,\ 1\Big)\ , \text{pour } i = 2, ..., n-1\,, \\
&D\Big(1,\ 1/((n+1)\,\lambda)\Big) \subset D\Big(1,\ 1/(n+1)\Big)\ , \text{pour } i = n\,.
\end{aligned}$$

Ces disques sont dessinés dans la Fig. 1.

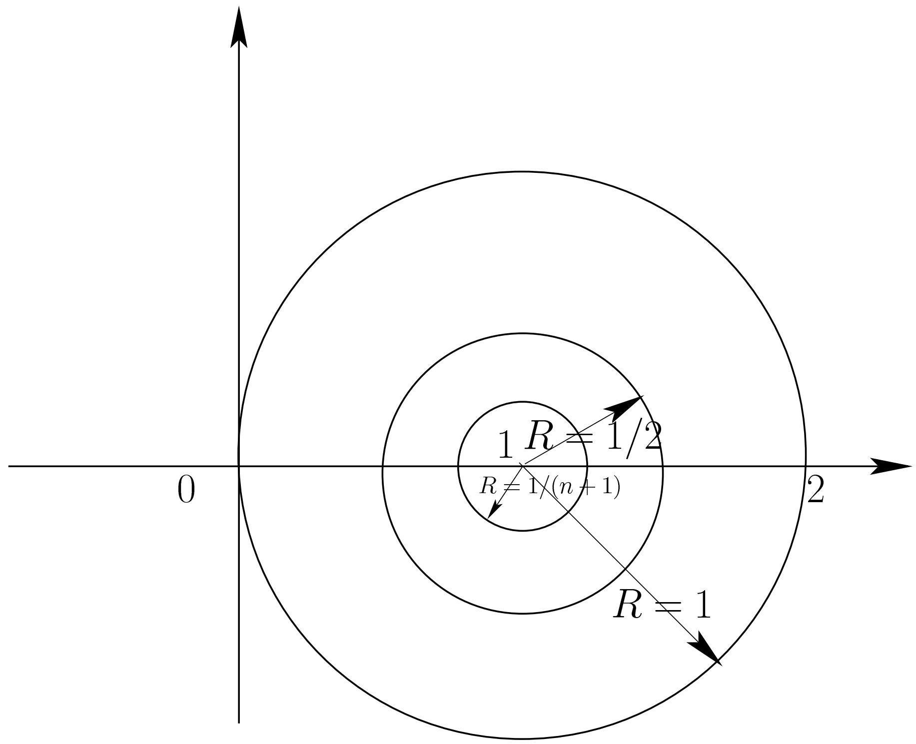

FIG. 1 – Disques de Gerschgörin associés à la matrice $\mathcal{G} = I - L - \dfrac{1}{\lambda}U$.

Comme $0 \in D(1,1)$, le nombre $\sigma = 0$ pourrait être valeur propre de $\mathcal{G}$.

Montrons à présent qu'en fait $\sigma = 0$ n'est pas valeur propre de $\mathcal{G}$. Pour cela on utilise le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Soit M une matrice carrée d'ordre $n > 0$, à coefficients complexes. On suppose que M est* **irréductible**.

Si une valeur propre σ est située sur la frontière de la réunion des disques de Gerschgörin, alors tous les cercles de Gerschgörin passent par σ.

Appliquons le théorème 3.1 au réel $\sigma = 0$ de $\mathcal{G}$.

- La matrice $\mathcal{G}$ est irréductible car $\forall\ i = 1, ..., n-1\,, a_{i\,i+1} = -i \neq 0$ et $a_{i+1\,i} = 1 \neq 0$, c'est-à-dire que l'on peut toujours un chemin qui relie deux quelconques des n sommets du graphe associé à la matrice $\mathcal{G}$.
- Le réel 0 n'appartient pas au cercle frontière du disque $D(1, 1/2)$.

Donc 0 n'est pas valeur propre de $\mathcal{G}$.

Par conséquent

$$\text{si } \ |\lambda| \geq 1 \ \text{ alors } \ \det \mathcal{G} = \det(I - L - \frac{1}{\lambda}U) \neq 0\,.$$

En déduire que la méthode est convergente.
On regarde le rayon spectral de la matrice G. D'après ce qui précède

$$P_G(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \det(I - L - \frac{1}{\lambda}U) = 0\,.$$

Si $\lambda = 0$ alors $|\lambda| < 1$.
Si $\det(I - L - \frac{1}{\lambda}U) = 0$ alors $|\lambda| < 1$. Sinon on aurait $|\lambda| \geq 1$ puis $\det(I - L - \frac{1}{\lambda}U) \neq 0$.
Donc le rayon spectral de la matrice d'itération G est strictement plus petit que 1 *i.e.* $\rho(G) < 1$. D'où la méthode est convergente.

c. Le fait d'avoir trouvé une méthode itérative (au moins) convergente prouve que la matrice A est inversible. Pourquoi ?

Comme la méthode est convergente, à tout b on trouve un unique x limite de la suite engendrée par la méthode itérative tel que $Ax = b$. Ce qui signifie que la matrice A est inversible et $x = A^{-1}b$.

d. Décrire l'algorithme de Gauss-Seidel appliqué à cet exemple.
L'algorithme proposé s'affranchit du stockage de la matrice A. Cependant il requiert l'écriture d'une fonction qui calcule le produit de la matrice A par un vecteur x donné.

fonction $x = \text{gaussseidel}(b\,, nitermax\,, taua\,, taur)$
//Les arguments d'entrée sont le second membre b
//le nombre maximum d'itération à faire $nitermax$
//la tolérance absolue $taua$ et la tolérance relative $taur$

//initialisation
$n = taille(b)$
$Xk = 0$
$residu0 = \|b\|$
$residusuiv = residu0$
$nit = 0$ //Compteur du nombre d'itération

//Cœur de l'algorithme
tantque $(residusuiv > taur * residu0 + taua$ **et** $nit < nitermax)$ **faire**
$nit = nit + 1$

$$Xk(1) = \frac{b(1) + Xk(2)}{2}$$

pour i **allant de** 2 **à** $n-1$ **faire**

$$Xk(i) = \frac{b(i) - Xk(i-1) + i * Xk(i+1)}{i+1}$$

finpour

$$Xk(n) = \frac{b(n) - Xk(n-1)}{n+1}$$

$residusuiv = \|b - \text{produitAvect}(Xk)\|$ //mise à jour du résidu
fintantque

$x = Xk$
finfonction

//Calcul du produit
fonction $y = \text{produitAvect}(x)$

$n = taille(b)$

$y(1) = 2 * x(1) - i * x(2)$
pour i **allant de** 2 **à** $n-1$ **faire**
$y(i) = x(i-1) + (i+1) * x(i) - i * x(i+1)$
finpour
$y(n) = x(n-1) + (n+1) * x(n)$
finfonction