Analyse Numérique
Proposition de corrigé du TD 3

EXERCICE 1
Interpolation de Lagrange

Soit x_0, x_1, ..., x_n, $n+1$ points distincts.

a. Soit $(L_i)_{i=0,n}$ $n+1$ fonctions de $\mathcal{P}_n$ vérifiant $L_i(x_j) = \delta_{ij}$. Montrer que $(L_i)_{i=0,n}$ est une base de $\mathcal{P}_n$ (ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n). Construire cette base.

$(L_i)_{i=0,n}$ est une base de $\mathcal{P}_n$
- On a $(L_i)_{i=0,n} \in \mathcal{P}_n$.
- On a $Card\Big[(L_i)_{i=0,n}\Big] = n+1 = dim\mathcal{P}_n$.
- Soit $(a_i)_{i=0,n} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=0}^{n} a_i L_i(x) = 0\,.$$

Donc $0 = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i(x_j) = a_j$ pour chacun des $j \in \{0, ..., n\}$, ou encore $a_j = 0$ pour chaque j. D'où la famille $(L_i)_{i=0,n}$ est libre.
Par suite la famille $(L_i)_{i=0,n}$ est une base de $\mathcal{P}_n$.

Construction de la base $(L_i)_{i=0,n}$
Soit $i \in \{0, ..., n\}$. Pour tout $j \in \{0, ..., n\}$ $j \neq i$, $L_i(x_j) = 0$. Donc

$$L_i(x) = c_i\, \Pi_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)\,.$$

De $L_i(x_i) = 1$, on déduit

$$c_i = \frac{1}{\Pi_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}\,.$$

D'où

$$L_i(x) = \frac{\Pi_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)}{\Pi_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)} = \Pi_{j=0, j\neq i}^{n} \Big(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\Big)\,.$$

b. Soit $p_n \in \mathcal{P}_n$ vérifiant : $p_n(x_i) = f(x_i)\, \forall i = 0, ..., n$. Décomposer p_n sur la base des $(L_i)_{i=0,n}$. Un tel p_n est-il unique ?

Décomposition de p_n sur la base $(L_i)_{i=0,n}$
On a

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i(x) \text{ avec } a_j \in \mathbb{R}\,.$$

De $p_n(x_j) = f(x_j)\, \forall j = 0, ..., n$, on obtient

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)\,.$$

Unicité de p_n
Soient $p_n,\ q_n \in \mathcal{P}_n$ tels que $p_n(x_i) = f(x_i)\, \forall i = 0, ..., n$ et $q_n(x_i) = f(x_i)\, \forall i = 0, ..., n$.

Alors le polynôme $r = p_n - q_n \in \mathcal{P}_n$ a $(n+1)$ racines $(x_i)_{i=0,n}$. Comme $deg\ r \leq n$, nécessairement $r = 0$.

c. Écrire le polynôme d'interpolation associé aux points donnés dans le tableau suivant :

x_i	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1
$f(x_i)$	$-3/2$	0	$1/4$	0	0

TAB. 1 – Tableau pour l'interpolation.

On a

$$\begin{aligned} p_4(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) + f(x_4)L_4(x)\,, \\ &= -\frac{3}{2}L_0(x) + \frac{1}{4}f(x_2)L_2(x)\,. \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x+\frac{1}{2})x(x-\frac{1}{2})(x-1)}{(-1+\frac{1}{2})(-1-0)(-1-\frac{1}{2})(-1-1)} = \frac{x^4 - x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x}{\frac{3}{2}}\,, \\ L_2(x) &= \frac{(x+1)(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})(x-1)}{(0+1)(0+\frac{1}{2})(0-\frac{1}{2})(0-1)} = \frac{x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\,. \end{aligned}$$

D'où

$$p_4(x) = -\frac{3}{2}\frac{x^4 - x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}\frac{x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = x^3 - x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\,.$$

d. Établir la majoration d'interpolation de Lagrange *i.e.* si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, alors il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{\Pi_{j=0}^{n}(x-x_j)}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi)\,. \tag{1.1}$$

• Si $x = x_j\,\forall j = 0, ..., n$, alors $f(x)_p(x) = 0$, et tout $\xi \in]a,b[$ convient.
• Si $x \neq x_j\,\forall j = 0, ..., n$, alors définissons

$$\phi(t) = f(t) - p(t) - k(x)\;\Pi_{j=0}^{n}(t-x_j), \quad \forall t \in [a,b]\,,$$

où $k(x)$ est choisi de telle sorte que $\phi(x) = 0$.
D'une part, on en déduit que

$$k(x) = \frac{f(x)-p(x)}{\Pi_{j=0}^{n}(x-x_j)}\,. \tag{1.2}$$

D'autre part, la fonction $t \mapsto \phi(t)$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}([a,b])$ admet $(n+2)$ racines **distinctes** $x,\ x_0,\ x_1,\ ...,\ x_n$ sur $]a,b[$. D'après le théorème de Rolle :
$t \mapsto \phi'(t)$ est de classe $\mathcal{C}^{n}([a,b])$ admet $(n+1)$ racines **distinctes** sur $]a,b[$, appartenant chacune entre les intervalles ouverts d'extrémités de $x,\ x_0,\ x_1,\ ...,\ x_n$ contenus dans $]a,b[$. Par application du théorème de Rolle,
$t \mapsto \phi^{(2)}(t)$ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}([a,b])$ admet n racines **distinctes** sur $]a,b[$. Par application du théorème de Rolle une nouvelle fois,
$t \mapsto \phi^{(3)}(t)$ est de classe $\mathcal{C}^{n-2}([a,b])$ admet $n-1$ racines **distinctes** sur $]a,b[$.
Ainsi de suite, par application du théorème de Rolle, $t \mapsto \phi^{(n+1)}(t)$ est de classe $\mathcal{C}^{0}([a,b])$ admet une racine $\xi \in]a,b[$, $\phi^{(n+1)}(\xi) = 0$.
Puisque $p_n \in \mathcal{P}_n$, on a $p_n^{(n+1)} = 0$ et

$$0 = \phi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!\,k(x)\,. \tag{1.3}$$

Donc de (1.2) et (1.3) on tire,

$$k(x) = \frac{f(x)-p(x)}{\Pi_{j=0}^{n}(x-x_j)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,.$$

D'où le résultat.

e. Soient $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = e^{3x}$ définies sur $[0,1]$. Estimer le nombre minimum de points pour que l'erreur entre la fonction et son polynôme d'interpolation de Lagrange soit inférieure à 0.1, 0.01 et 0.001.

Nombre de points mimimum pour satisfaire une tolérance ε donnée

Premier cas : $f(x) = \cos(x)$ sur $[0,1]$.
On a $\cos^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$ et $\left|x - y\right| \leq 1\ \ \forall x,\, y\ \in [0,1]$, donc

$$\left|f(x) - p_n(x)\right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \leq \varepsilon$$

donne

$$(n+1)! \geq \varepsilon^{-1}\,.$$

D'où
• $\varepsilon = 0.1 \Rightarrow \varepsilon^{-1} = 10$:

$$3! = 6\,,$$
$$4! = 24\ \Rightarrow n+1 \geq 4\ \Rightarrow n \geq 3\,.$$

• $\varepsilon = 0.01 \Rightarrow \varepsilon^{-1} = 100$:

$$5! = 120\ \Rightarrow n+1 \geq 5\ \Rightarrow n \geq 4\,.$$

•$\varepsilon = 0.001 \Rightarrow \varepsilon^{-1} = 1000$:

$$6! = 720\,,$$
$$7! = 5040\ \Rightarrow n+1 \geq 7\ \Rightarrow n \geq 6\,.$$

Deuxième cas : $g(x) = \exp(3x)$ sur $[0,1]$.
On a $g^{(n+1)}(x) = 3^{(n+1)}\exp(3x)$ et $\left|x - y\right| \leq 1\ \ \forall x,\, y\ \in [0,1]$, donc

$$\left|g(x) - p_n(x)\right| \leq \frac{3^{(n+1)}\exp(3)}{(n+1)!} \leq \varepsilon\,.$$

D'où
• $\varepsilon = 0.1$:

$$\frac{3^{(9+1)}\exp(3)}{(9+1)!} \simeq 0.3268383\,,$$
$$\frac{3^{(10+1)}\exp(3)}{(10+1)!} \simeq 0.0891377\ \Rightarrow n \geq 10\,.$$

• $\varepsilon = 0.01$:

$$\frac{3^{(11+1)}\exp(3)}{(11+1)!} \simeq 0.0222844\,,$$
$$\frac{3^{(12+1)}\exp(3)}{(12+1)!} \simeq 0.0051426\ \Rightarrow n \geq 12\,.$$

• $\varepsilon = 0.001$:

$$\frac{3^{(13+1)}\exp(3)}{(13+1)!} \simeq 0.0011020\,,$$
$$\frac{3^{(14+1)}\exp(3)}{(14+1)!} \simeq 0.0002204\ \Rightarrow n \geq 14\,.$$

EXERCICE 2
Interpolation de Hermite

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ et x_1, x_2 deux points distincts. Soit p un polynôme de degré ≤ 3 vérifiant $p(x_i) = f(x_i)$ et $p'(x_i) = f'(x_i)$ pour $i = 1, 2$.

a. Montrer qu'un tel polynôme existe et est unique.

Existence

On pose $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, donc $p'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$.
Les conditions sur p et p' s'écrivent :

$$\begin{array}{ccccccccc} a_3x_1^3 & + & a_2x_1^2 & + & a_1x_1 & + & a_0 & = & f(x_1)\,, \\ a_3x_2^3 & + & a_2x_2^2 & + & a_1x_2 & + & a_0 & = & f(x_2)\,, \\ 3a_3x_1^2 & + & 2a_2x_1 & + & a_1 & + & 0 & = & f'(x_1)\,, \\ 3a_3x_2^2 & + & 2a_2x_2 & + & a_1 & + & 0 & = & f'(x_2)\,. \end{array}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} = \\ = \\ = \\ = \end{array} \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f'(x_1) \\ f'(x_2) \end{pmatrix},$$

ou bien encore

$$AX = B$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f'(x_1) \\ f'(x_2) \end{pmatrix}.$$

On a $det(A) = -\Big(x_2 - x_1\Big)^4 \neq 0$ puisque $x_1 \neq x_2$, d'où l'existence de p.

Unicité de p
Soient $p,\ q \in \mathcal{P}_3$ tels que

$$\begin{aligned} p(x_i) &= f(x_i)\,,\ i = 1, 2\,, \\ p'(x_i) &= f'(x_i)\,,\ i = 1, 2\,. \end{aligned}$$

Soit $r = p - q$. Alors

$$\begin{aligned} r(x_i) &= f(x_i)\,,\ i = 1, 2\,, \\ r'(x_i) &= f'(x_i)\,,\ i = 1, 2\,, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad r(x) = C(x)\,(x - x_1)^2 (x - x_2)^2\,.$$

Comme $r \in \mathcal{P}_3$, on a $c(x) = 0$, donc $r = 0$, puis $p = q$. D'où l'unicité.

b. Établir la majoration d'interpolation suivante : si $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$, alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f(x) - p(x) = \frac{(x - x_1)^2 (x - x_2)^2}{4!}\, f^{(4)}(\xi)\,.$$

• Si $x = x_1$ ou x_2, alors $f(x) - p(x) = 0$, et tout $\xi \in]a, b[$ convient.
• Si $x \neq x_1\,, x_2$, on pose

$$\phi(t) = f(t) - p(t) - (t - x_1)(t - x_2)\ k(x), \quad \forall t \in [a, b]\,,$$

où $k(x)$ est choisi de telle sorte que $\phi(x) = 0$.

Donc

$$k(x) = \frac{f(x) - p(x)}{(x - x_1)(x - x_2)}\,, \tag{2.1}$$

On a également :
la fonction $t \mapsto \phi(t)$ est de classe $\mathcal{C}^4([a, b])$ et admet 3 racines **distinctes** $x,\ x_1,\ x_2$ sur $[a, b]$. D'après le théorème de Rolle :
$t \mapsto \phi'(t)$ est de classe $\mathcal{C}^3([a, b])$ et s'annule en 2 points distincts $c_1\,, c_2 \neq x,\ x_1,\ x_2$, $c_1\,, c_2\ \in]\min(x, x_1, x_2), \max(x, x_1, x_2)[$.
De plus

$$\phi'(t) = f'(x) - p'(x) - k(x)\Big[2(t - x_1)(t - x_2)^2 + 2(t - x_1)^2 (t - x_2)\Big]\,,$$

ce qui entraîne $\phi'(x_1) = 0\,, \phi'(x_2) = 0$.
$t \mapsto \phi'(t)$ s'annule en **4 points distincts** $c_1\,, c_2\,, x_1,\ x_2$.
$t \mapsto \phi''(t)$ est de classe $\mathcal{C}^2([a, b])$ et admet 3 racines **distinctes** $d_1\,, d_2\,, d_3$ chacune appartenant à l'intervalle $]z_i, z_k[$ où $z_i, z_k \in \{c_1\,, c_2\,, x_1,\ x_2\}$.
$t \mapsto \phi^{(3)}(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1([a, b])$ et admet 2 racines **distinctes** $e_1\,, e_2$ chacune appartenant à l'intervalle $]y_i, y_k[$ où $y_i\,, y_k \in \{d_1\,, d_2\,, d_3\}$.
$t \mapsto \phi^{(4)}(t)$ est de classe $\mathcal{C}^0([a, b])$ et admet 1 racine $\xi \in]e_1\,, e_2[\subset]a, b[$.

On a

$$0 = \phi^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) - p^{(4)}(\xi) - (4!)\, k(x)\,. \tag{2.2}$$

Comme $p \in \mathcal{P}_3$, on a $p^{(4)} = 0$. Des équations (2.1) et (2.2), on déduit

$$\frac{f(x) - p(x)}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2} = k(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,,\ \text{pour } x \neq x_1, x_2. \tag{2.3}$$

D'où le résultat.

c. Trouver une base $(A_1,\, A_2,\, B_1,\, B_2)$ de $\mathcal{P}_3$ telle que

$$p(x) = f(x_1)A_1(x) + f(x_2)A_2(x) + f'(x_1)B_1(x) + f'(x_2)B_2(x)\,.$$

et exprimer cette base en fonction des polynômes d'interpolation de Lagrange L_1 et L_2.

La condition $p(x_1) = f(x_1)$ s'écrit :

$$f(x_1)A_1(x_1) + f(x_2)A_2(x_1) + f'(x_1)B_1(x_1) + f'(x_2)B_2(x_1) = f(x_1)\,,$$

ou encore

$$f(x_1)\Big[A_1(x_1) - 1\Big] + f(x_2)A_2(x_1) + f'(x_1)B_1(x_1) + f'(x_2)B_2(x_1) = 0\,.$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\begin{cases} A_1(x_1) = 1\,, \\ A_2(x_1) = 0\,, \\ B_1(x_1) = 0\,, \\ B_2(x_1) = 0\,. \end{cases} \tag{2.4}$$

De même de $p(x_2) = f(x_2)$, on obtient

$$\begin{cases} A_1(x_2) = 0\,, \\ A_2(x_2) = 1\,, \\ B_1(x_2) = 0\,, \\ B_2(x_2) = 0\,. \end{cases} \tag{2.5}$$

De la même façon, les conditions $p'(x_1) = f'(x_1)\,, p'(x_2) = f'(x_2)$ s'écrivent :

$$\begin{cases} A_1'(x_1) = 0\,, \\ A_2'(x_1) = 0\,, \\ B_1'(x_1) = 1\,, \\ B_2'(x_1) = 0\,, \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\begin{cases} A_1'(x_2) = 0\,, \\ A_2'(x_2) = 0\,, \\ B_1'(x_2) = 0\,, \\ B_2'(x_2) = 1\,. \end{cases} \tag{2.7}$$

Les relations (2.4), (2.5), (2.6) et (2.7) peuvent se résumer en :

$$\begin{cases} A_1(x_1) = 1\,, \\ A_1'(x_1) = 0\,, \\ A_1(x_2) = 0\,, \\ A_1'(x_2) = 0\,, \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} A_2(x_1) = 0\,, \\ A_2'(x_1) = 0\,, \\ A_2(x_2) = 1\,, \\ A_2'(x_2) = 0\,, \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\begin{cases} B_1(x_1) = 0\,, \\ B_1'(x_1) = 1\,, \\ B_1(x_2) = 0\,, \\ B_1'(x_2) = 0\,, \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} B_2(x_1) = 0\,, \\ B_2'(x_1) = 0\,, \\ B_2(x_2) = 0\,, \\ B_2'(x_2) = 1\,. \end{cases} \tag{2.11}$$

Comme $A_1 \in \mathcal{P}_3$, les relations (2.8) s'expriment par :

$$\begin{cases} A_1(x) = (ax+b)\,(x-x_2)^2\,, \\ 1 = (ax_1+b)\,(x_1-x_2)^2\,, \\ 0 = a(x_1-x_2)^2 + 2(x_1-x_2)(ax_1+b)\,, \end{cases} \tag{2.12}$$

d'où on tire $a = -\dfrac{2}{(x_1-x_2)^3}$ et $b = \dfrac{1}{(x_1-x_2)^2} + \dfrac{2x_1}{(x_1-x_2)^3} = \dfrac{3x_1-x_2}{(x_1-x_2)^3}$.
Et donc

$$A_1(x) = -\frac{2(x-x_1)(x-x_2)^2}{(x_1-x_2)^3} + \frac{(x-x_2)^2}{(x_1-x_2)^2}\,. \tag{2.13}$$

Par symétrie on obtient

$$A_2(x) = -\frac{2(x-x_2)(x-x_1)^2}{(x_2-x_1)^3} + \frac{(x-x_1)^2}{(x_2-x_1)^2}\,. \tag{2.14}$$

Pour calculer B_1, de (2.10) on a

$$\begin{cases} B_1(x) = (ax+b)\,(x-x_2)^2\,, \\ 0 = (ax_1+b)\,(x_1-x_2)^2\,, \\ 1 = a(x_1-x_2)^2 + 2(x_1-x_2)(ax_1+b)\,. \end{cases} \tag{2.15}$$

Donc $a = \dfrac{1}{(x_1-x_2)^2}$ et $b = -ax_1 = -\dfrac{x_1}{(x_1-x_2)^2}$.

D'où

$$B_1(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)^2}{(x_1-x_2)^2}\,. \tag{2.16}$$

Par raison de symétrie on a

$$B_2(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_1)^2}{(x_2-x_1)^2}\,. \tag{2.17}$$

Expression de $A_1,\ \ A_2,\ \ B_1,\ \ B_2$ en fonction des polynômes de Lagrange
On a

$$L_1(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \ \text{ et } \ L_1(x) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\,,$$

d'où

$$\begin{aligned} A_1(x) &= -2(x-x_1)\left(\frac{1}{x_1-x_2}\right) \times \left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)^2 \\ &= \left[1-2(x-x_1)L_1'(x)\right]\left(L_1(x)\right)^2, \\ A_2(x) &= \left[1-2(x-x_2)L_2'(x))\right](L_2(x))^2\,, \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} B_1(x) &= (x_2-x_1)\left(\frac{x-x_1}{x_1-x_2}\right) \times \left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)^2 \\ &= (x_2-x_1)\ \left(L_1(x)\right)^2\ , \\ B_2(x) &= (x_1-x_2)\ \left(L_2(x)\right)^2\ . \end{aligned}$$

d. Décrire les polynômes d'interpolation de Hermite dans le cadre général.

Polynômes d'interpolation de Hermite dans le cadre général
On se donne une fonction f et on cherche un polynôme $p \in \mathcal{P}_{2n-1}$ tel que

$$\begin{aligned} p(x_i) &= f(x_i)\,,\ i = 1,..,n\,, \\ p'(x_i) &= f'(x_i)\,,\ i = 1,..,n \end{aligned}$$

Alors on a

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)A_i(x) + f'(x_i)B_i(x)\,,$$

où la base $(A_i\,, B_i)$ est donnée par

$$\begin{aligned} A_i(x) &= \left[1-2(x-x_i)L_i'(x_i)\right]\left(L_i(x)\right)^2, \\ B_i(x) &= (x-x_i)\left(L_i(x)\right)^2. \end{aligned}$$

En effet, la base $(A_i\,, B_i)$ polynômes de $\mathcal{P}_{2n-1}$ est cherchée telle que

$$\begin{aligned} &A_i(x_j) = \delta_{ij}\,, \quad A_i'(x_j) = 0\,, \quad i,j = 1,..,n\,, \\ &B_i(x_j) = 0\,, \quad B_i'(x_j) = \delta_{ij}\,, \quad i,j = 1,..,n\,. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Ce qui suggère de prendre $(A_i\,, B_i)$ de la forme

$$A_i(x) = \left(L_i(x)\right)^2\,\left(a_i(x-x_i)+c_i\right)\,,$$

$$B_i(x) = \left(L_i(x)\right)^2\,\left(b_i(x-x_i)+d_i\right)\,.$$

Pour chaque $i \in \{1,..,n\}$ les conditions (2.19) en x_i s'écrivent

$$1 = A_i(x_i) = c_i\,, \quad 0 = A_i'(x_i) = L_i(x_i)\left(2c_iL_i'(x_i) + a_iL_i(x_i)\right)\,,$$

$$0 = B_i(x_i) = d_i\,, \quad 1 = B_i'(x_i) = L_i(x_i)\left(2d_iL_i'(x_i) + b_iL_i(x_i)\right)\,.$$

Ce qui donne

$$c_i = 1\,, \quad a_i = -2L_i'(x_i)\,,$$

$$b_i = 1\,, \qquad d_i = 0\,.$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^{2n}$, alors il existe $\xi \in \Big]\min\left(x,(x_i)_{i=1,..,n}\right),\ \max\left(x,(x_i)_{i=1,..,n}\right)\Big[$ tel que

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\,\Pi_{j=0}^{n}\Big(x - x_j\Big)^2\,.$$