Université de Nice Sophia-Antipolis
Licence L3 Mathématiques Année 2008/2009

Analyse Numérique
Corrigé du TD 4

EXERCICE 1
Formule des trapèzes

a. Dans la formule suivante

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx \approx \alpha f(a) + \beta f(a+h)\,, \tag{1.1}$$

déterminer α et β pour que la formule soit exacte pour des polynômes de degré ≤ 1.

Calcul de α et β
On a

$$\int_a^{a+h} 1\,dx = h = \alpha + \beta\,,$$
$$\int_a^{a+h} x\,dx = \frac{h^2}{2} + ah = \alpha a + \beta(a+h)\,.$$

Ce qui conduit au système linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \alpha & + & \beta & = & h \\ a\,\alpha & + & (a+h)\,\beta & = & \dfrac{h^2}{2} + ah \end{array}\right.$$

D'où on tire

$$\alpha = \beta = \frac{h}{2}\,, \tag{1.2}$$

qui rendent exacte la formule (1.1) pour les polynômes de degré ≤ 1.

Remarque On a

$$\int_a^{a+h} x^2\,dx = \frac{(a+h)^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \frac{1}{3}\Big(h^3 + 3ah^2 + 3a^2h\Big) \neq \frac{h}{2}\Big((a+h)^2 + a^2\Big)\,, \text{ pour } h \neq 0,$$

qui montre que la formule de quadrature (1.1) est d'ordre 1.

b. Soit $q \in \mathcal{P}_1$ (ensemble des polynômes de degré ≤ 1) défini par $q(a) = f(a)$ et $q(a+h) = f(a+h)$. Construire q. En approchant f par q sur $[a, a+h]$, donner une approximation de $\int_a^{a+h} f(x)\,dx$.

Construction de q
Le polynôme d'interpolation de Lagrange q de degré 1 est l'équation de la droite passant par les points $\Big(a, f(a)\Big)$ et $\Big(a+h, f(a+h)\Big)$, donc

$$q(x) = f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h}(x-a)\,.$$

Approximation de l'intégration élémentaire
Comme la formule de quadrature (1.1) soit exacte pour le polynôme q, on a

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx \approx \int_a^{a+h} q(x)\,dx = \frac{h}{2}\Big(q(a) + q(a+h)\Big)\,.$$

c. Donner une estimation de l'erreur d'intégration.

Estimation de l'erreur d'intégration élémentaire
La fonction q est le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $a\,, a+h$. Si $f \in \mathcal{C}^2([a, a+h])$ alors il existe $\xi \in]a, a+h[$ tel que

$$f(x) = q(x) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{2} f''(\xi)\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_a^{a+h} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\Big(f(a) + f(a+h)\Big) &= \int_a^{a+h} f(x) - q(x)\,dx \\ &= \int_a^{a+h} \frac{(x-a)(x-a-h)}{2} f''(\xi)\,dx\,.\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^{a+h} (f(x) - q(x))\,dx\Big| &\leq \int_a^{a+h} \Big|\frac{(x-a)(x-a-h)}{2} f''(\xi)\Big|\,dx \\ &\leq -m \int_a^{a+h} \frac{(x-a)(x-a-h)}{2}\,dx \qquad (1.3) \\ &= m\frac{h^3}{12}\,,\end{aligned}$$

où $m = \sup_{x\in[a,a+h]} \Big|f''(x)\Big|$.

d. Soit $\{x_i\}$, $i = 0, ..., n$ une subdivision de l'intervalle $[c, d]$ de pas h. Utiliser la formule des trapèzes sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour approcher $\int_c^d f(x)\,dx$. Donner une estimation de l'erreur d'intégration.

Formule d'intégration composée
Par la formule de *Chasles* on a

$$\int_c^d f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\Big[f(x_i)+f(x_{i+1})\Big] = h\Big[\frac{f(c)+f(d)}{2}+\sum_{i=1}^{n-2} f(x_i)\Big]\,.$$

Estimation de l'erreur d'intégration composée
On a

$$\int_c^d f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\Big[f(x_i)+f(x_{i+1})\Big] = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(x)-q_i(x)\right)dx\,,$$

avec q_i le polynôme d'interpolation de Lagrange de f sur $[x_i, x_{i+1}], i = 0, .., n-1$. Grâce à (1.3) on déduit

$$\Big|\int_c^d f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\Big[f(x_i)+f(x_{i+1})\Big]\Big| \le \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h^3}{2}m_i\,,$$

où $m_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\Big|f''(x)\Big|$. Ce qui implique

$$\Big|\int_c^d f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\Big[f(x_i)+f(x_{i+1})\Big]\Big| \le \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h^3}{12}m_i \le \frac{M}{12}nhh^2 = \frac{M}{12}(d-c)h^2\,, \qquad (1.4)$$

avec $M = \sup_{x\in[c,d]}\Big|f''(x)\Big|$. La convergence de la méthode des trapèzes composée est quadratique.
En fonction du nombre n d'intervalles de la subdivision, la majoration (1.4) s'écrit :

$$\Big|\int_c^d f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\Big[f(x_i)+f(x_{i+1})\Big]\Big| \le \frac{M}{12}\frac{(d-c)^3}{n^2}\,. \qquad (1.5)$$

e. Soit $\varepsilon = 10^{-1}\,, 10^{-2}\,, 10^{-8}$, trouver n pour que cette formule de quadrature approche $\int_0^3 \sin(x)e^{-x^2}\,dx$ avec une précision ε.

Nombre de points mimimum pour satisfaire une tolérance ε donnée
$f(x) = \sin(x)e^{-x^2}$ sur $[0,3]$.
On a $f'(x) = \Big(\cos(x) - 2x\sin(x)\Big)e^{-x^2}$, $f''(x) = \Big(-\sin(x) - 2\sin(x) - 2x\cos(x) - 2x\cos(x) + 4x^2\sin(x)\Big)e^{-x^2} = \Big(-3\sin(x) - 4x\cos(x) + 4x^2\sin(x)\Big)e^{-x^2} = \Big((4x^2-3)\sin(x) - 4x\cos(x)\Big)e^{-x^2}$.

La fonction $x \mapsto 4x^2 - 3$ étant croissante sur $[0,3]$, on a sur cet intervalle $0 \leq 4x^2 - 3 \leq 33$. Sur $[0,3]$ on a également $|4x| \leq 12$, $\Big|\cos(x)\Big| \leq 1$, $\Big|\sin(x)\Big| \leq 1$ et $e^{-9} \leq e^{-x^2} \leq 1$. Donc $\Big|f''(x)\Big| \leq 45$ pour $x \in [0,3]$.

On trouve finalement

$$\Big|\int_c^d f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}\Big[f(x_i) + f(x_{i+1})\Big]\Big| \leq \frac{45}{12}\frac{3^3}{n^2} \leq \varepsilon$$

qui donne

$$n^2 \geq \frac{15 \times 3^3}{4}\varepsilon^{-1} = \frac{405}{4}\varepsilon^{-1} \quad i.e. \;\; n \geq \frac{\sqrt{405\,\varepsilon^{-1}}}{2}.$$

D'où

- $\varepsilon = 0.1 \Rightarrow n \geq 31.819805 \quad \Rightarrow n \geq 32$.
- $\varepsilon = 0.01 \Rightarrow n \geq 100.62306 \quad \Rightarrow n \geq 101$.
- $\varepsilon = 10^{-8} \Rightarrow n \geq 100623.06 \quad \Rightarrow n \geq 100624$.

EXERCICE 2
Formule du point milieu

a. Déterminer la formule de quadrature suivante

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \alpha f(\frac{a+b}{2})$$

pour qu'elle soit exacte pour des polynômes de degré le plus haut possible.

On a

$$\int_a^b 1\,dx = b - a = \alpha \times 1\,,$$
$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2} = (b-a)\frac{b+a}{2}\,,$$
$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3 - a^3}{3} \neq (b-a)\Big(\frac{b+a}{2}\Big)^2, \;\; \text{pour} \;\; a \neq b.$$

D'où $\alpha = b - a$ et la formule du point milieu (2) est exacte pour les polynômes de degré ≤ 1.

b. Donner une estimation de l'erreur d'intégration.

Soit p le polynôme de degré 1 qui interpole f au point $(a+b)/2$ (point indispensable) et qui interpole f' au point $(a+b)/2$ par exemple (c'est un choix). Cela signifie que p est le polynôme d'interpolation de Hermite de degré 1 de f au point $(a+b)/2$.

D'une part, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\,dx = (b-a)\,p\Big(\frac{a+b}{2}\Big) = (b-a)\,p\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\,.$$

D'autre part, si $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ alors il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$f(x) = p(x) + \frac{\Big(x - \dfrac{a+b}{2}\Big)^2}{2} f''(\xi)\,.$$

On a

$$\begin{aligned} \Big|\int_a^b (f(x)-p(x))\,dx\Big| \;&\leq \int_a^b \Big|\frac{\Big(x-\dfrac{a+b}{2}\Big)^2}{2} f''(\xi)\Big|\,dx \\ &\leq \frac{1}{2} m \int_a^b \Big(x - \frac{a+b}{2}\Big)^2\,dx\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

où $m = \sup_{x\in[a,b]} \Big|f''(x)\Big|$.
L'intégrale peut se calculer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_a^b \Big(x - \frac{a+b}{2}\Big)^2\,dx &= \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} y^2\,dy \\ &= 2\int_0^{\frac{b-a}{2}} y^2\,dy \\ &= 2 \times \frac{(b-a)^3}{24}\,, \end{aligned} \tag{2.2}$$

on obtient

$$\Big|\int_a^b f(x) - p(x)\,dx\Big| \leq m\frac{(b-a)^3}{24}\,. \tag{2.3}$$

c. Soit $\{x_i\}$, $i = 0, ..., n$ une subdivision de l'intervalle $[c,d]$ de pas h. Utiliser la formule du point milieu composée pour approcher $\int_c^d f(x)\,dx$.

Formule d'intégration composée
On a

$$\int_c^d f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} h\,f\Big(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\Big)\,.$$

Estimation de l'erreur d'intégration composée
Soit q_i le polynôme d'interpolation de Hermite de f en $(x_i, x_{i+1})/2$ sur $[x_i, x_{i+1}], i = 0, .., n-1$ comme construit dans la question **b.**. On a

$$\Big| \int_c^d f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1} hf\Big(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\Big)\Big| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{m_i}{24} h^3\,,$$

où $m_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} \Big|f''(x)\Big|$. Ce qui donne

$$\Big| \int_c^d f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1} hf\Big(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\Big)\Big| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^3}{24} m_i \leq \frac{M}{24} nhh^2 = \frac{M}{24}(d-c)h^2\,, \tag{2.4}$$

avec $M = \sup_{x\in[c,d]} \Big|f''(x)\Big|$. La convergence de la formule du point milieu composée est quadratique.

EXERCICE 3
Formule de Simpson

a. Déterminer la formule de quadrature suivante

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1)\,, \tag{3.1}$$

et donner son erreur d'intégration.

Calcul de α, β et γ
On a

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 = \alpha + \beta + \gamma\,,$$
$$\int_{-1}^{1} x\,dx = 0 = -\alpha + \gamma\,,$$
$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3} = \alpha + \gamma\,.$$

Ce qui donne le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 2 \\ -\alpha & & & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & & & + & \gamma & = & \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

D'où $\alpha = \gamma = \dfrac{1}{3}\,, \beta = \dfrac{4}{3}$.

Estimation de l'erreur d'intégration élémentaire
On a

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 = \frac{1}{3} \times (-1) + \frac{1}{3} \times (1)\,,$$
$$\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{2}{5} \neq \frac{1}{3} \times (-1)^4 + \frac{1}{3} \times (1)^4\,,$$

donc la formule de quadrature (3.1) est exacte pour les polynômes de degré ≤ 3.

Soit q le polynôme de degré 3 qui interpole f aux points $(-1, f(-1))$, $(0, f(0))$, $(1, f(1))$ (points indispensables) et qui interpole f' au point 0 par exemple (c'est un choix).
Si $f \in \mathcal{C}^4([-1,1])$ alors il existe $\xi \in]-1,1[$ tel que

$$f(x) = q(x) + \frac{(x+1)x^2(x-1)}{4!} f^{(4)}(\xi)\,.$$

Comme la formule (3.1) est exacte pour q, on a

$$\int_{-1}^{1} q(x)\,dx = \alpha q(-1) + \beta q(0) + \gamma q(1) = \alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1)\,.$$

Il vient

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \Big[\alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1)\Big] = \int_{-1}^{1} (f(x) - q(x))\,dx\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Big| \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \Big[\alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1)\Big] \Big| &= \Big| \int_{-1}^{1} \Big(f(x) - q(x)\Big)\,dx \Big| \\
&\leq \int_{-1}^{1} \Big| \frac{(x+1)x^2(x-1)}{4!} f^{(4)}(\xi) \Big|\,dx \\
&\leq -\frac{m}{4!} \int_{-1}^{1} (x+1)x^2(x-1)\,dx\,,
\end{aligned}$$

où $m = \sup_{x\in[-1,1]} \Big| f^{(4)}(x) \Big|$.
La fonction $x \mapsto (x+1)x^2(x-1)$, donc il suffit de calculer l'intégrale,

$$\int_{0}^{1} (x+1)x^2(x-1)\,dx = \int_{0}^{1} (x^4 - x^2)\,dx = -\frac{2}{15}\,.$$

Ce qui entraîne

$$\Big| \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \Big[\alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1)\Big] \Big| \leq \frac{m}{4!}\frac{4}{15}\,,$$

ou bien encore

$$\Big| \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \Big[\alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1)\Big]\Big| \leq \frac{1}{90} m\,.$$

b. Écrire cette formule sur $[a, a+h]$ et donner l'erreur d'intégration en fonction de h.

Formule d'intégration sur $[a, a+h]$
Ici il suffit de remarquer que le gros du travail a été fait dans la question précédente, et que l'on peut passer de l'intervalle $[-1, 1]$ à $[a, a+h]$ grâce à une application affine. Soit $x = Au + B$ cette application affine. On cherche les constantes A et B par

$$\begin{cases} A(-1) & + & B & = & a\,, \\ A(1) & + & B & = & a+h\,, \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} A = \dfrac{h}{2}\,, \\ B = a + \dfrac{h}{2}\,. \end{cases}$$

Le changement de variable $x = \frac{h}{2}u + a + \frac{h}{2}$, donc $dx = \frac{h}{2}\,du$, permet de calculer la formule demandée :

$$\begin{aligned} \int_{a}^{a+h} f(x)\,dx &= \frac{h}{2}\Big[\int_{-1}^{1} f(\frac{h}{2}u + a + \frac{h}{2})\,dx\Big] \\ &\approx \frac{h}{2}\Big[\alpha f\Big(\frac{h}{2}\times(-1) + a + \frac{h}{2}\Big) + \beta f\Big(\frac{h}{2}\times(0) + a + \frac{h}{2}\Big) \\ &\qquad + \gamma f\Big(\frac{h}{2}\times(1) + a + \frac{h}{2}\Big)\Big] \\ &\approx \frac{h}{2}\Big[\alpha f(a) + \beta f(a + \frac{h}{2}) + \gamma f(a+h)\Big]\,. \end{aligned}$$

D'où la formule approchée sur $[a, a+h]$ est

$$\int_{a}^{a+h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\Big[\frac{1}{3}f(a) + \frac{4}{3}f(a + \frac{h}{2}) + \frac{1}{3}f(a+h)\Big]\,. \tag{3.2}$$

Erreur d'intégration sur $[a, a+h]$
On procède comme ci-dessus.

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_a^{a+h} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\Big[\alpha f(a) + \beta f(a+\frac{h}{2}) + \gamma f(a+h)\Big]\Big| \\
&= \frac{h}{2}\Big|\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \Big[\alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(-1)\Big]\Big| \\
&\leq \frac{h}{2}\frac{1}{90} m\,,
\end{aligned}$$

où $m = \sup_{u\in[-1,1]} \Big|\Big(f(\frac{h}{2}u + a + \frac{h}{2})\Big)^{(4)}\Big|$.
Comme $f(x) = f(\frac{h}{2}u + a + \frac{h}{2})$ pour $x \in [a, a+h]$ et $u \in [-1, 1]$, on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
\Big(f(\frac{h}{2}u + a + \frac{h}{2})\Big)' &= \frac{h}{2} f'(\frac{h}{2}u + a + \frac{h}{2}) = \frac{h}{2} f'(x) \\
\Big(f(\frac{h}{2}u + a + \frac{h}{2})\Big)' &= \Big(\frac{h}{2}\Big)^2 f''(\frac{h}{2}u + a + \frac{h}{2}) = \Big(\frac{h}{2}\Big)^2 f''(x) \\
\Big(f(\frac{h}{2}u + a + \frac{h}{2})\Big)^{(3)} &= \Big(\frac{h}{2}\Big)^3 f^{(3)}(\frac{h}{2}u + a + \frac{h}{2}) = \Big(\frac{h}{2}\Big)^3 f^{(3)}(x) \\
\Big(f(\frac{h}{2}u + a + \frac{h}{2})\Big)^{(4)} &= \Big(\frac{h}{2}\Big)^4 f^{(4)}(\frac{h}{2}u + a + \frac{h}{2}) = \Big(\frac{h}{2}\Big)^4 f^{(4)}(x)\,.
\end{aligned}$$

Il vient $m = \sup_{u\in[-1,1]} \Big|\Big(f(\frac{h}{2}u + a + \frac{h}{2})\Big)^{(4)}\Big| = \Big(\frac{h}{2}\Big)^4 \sup_{x\in[a,a+h]} \Big|f^{(4)}(x)\Big| = \Big(\frac{h}{2}\Big)^4 \mathcal{M}$, avec $\mathcal{M} = \sup_{x\in[a,a+h]} \Big|f^{(4)}(x)\Big|$.

D'où

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_a^{a+h} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\Big[\alpha f(a) + \beta f(a+\frac{h}{2}) + \gamma f(a+h)\Big]\Big| \\
&\leq \frac{h}{2}\frac{1}{90}\Big(\frac{h}{2}\Big)^4 \mathcal{M}\,,
\end{aligned}$$

ou bien encore

$$\Big|\int_a^{a+h} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\Big[\alpha f(a) + \beta f(a+\frac{h}{2}) + \gamma f(a+h)\Big]\Big| \leq \frac{\mathcal{M}}{2880} h^5\,. \tag{3.3}$$

c. Sur une subdivision de pas h de l'intervalle $[c, d]$, approcher $\int_c^d f(x)\,dx$ en utilisant la formule ci-dessus.

Formule d'intégration composée
On considère une subdivision $\{x_i\}$, $i = 0, ..., n$ de pas h de l'intervalle $[c, d]$.

La formule de *Chasles* et la formule approchée (3.2) sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ donne

$$\begin{aligned}\int_c^d f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx &\approx \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\Big[\frac{1}{3}f(x_i)+\frac{4}{3}f\Big(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\Big)+\frac{1}{3}f(x_{i+1})\Big]\\ &\approx \sum_{i=0}^{n-1} h\Big[\frac{1}{6}f(x_i)+\frac{4}{6}f\Big(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\Big)+\frac{1}{6}f(x_{i+1})\Big]\,.\end{aligned}$$

Erreur d'intégration composée
On a

$$\begin{aligned}&\Big|\int_c^d f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\Big[\frac{1}{3}f(x_i)+\frac{4}{3}f\Big(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\Big)+\frac{1}{3}f(x_{i+1})\Big]\Big|\\ &\quad = \Big|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) - \frac{h}{2}\Big[\frac{1}{3}f(x_i)+\frac{4}{3}f\Big(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\Big)+\frac{1}{3}f(x_{i+1})\Big]\Big|\\ &\quad \le \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\mathcal{M}_i}{2880}h^5\,,\end{aligned}$$

où $\mathcal{M}_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\Big|f''(x)\Big|$. Ce qui entraîne

$$\begin{aligned}\Big|\int_c^d f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\Big[\frac{1}{3}f(x_i)+\frac{4}{3}f\Big(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\Big)+\frac{1}{3}f(x_{i+1})\Big]\Big| &\le \sum_{i=0}^{n-1}\frac{M}{2880}h^5\\ &= \frac{M}{2880}nhh^4\\ &= \frac{M}{2880}(d-c)h^4\,,\end{aligned}$$

avec $M = \sup_{x\in[c,d]}\Big|f^{(4)}(x)\Big|$. La convergence de la méthode de Simpson composée est d'ordre 4.