Examen de géométrie différentielle, durée 2h

L'usage de la calculatrice est interdit.
Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 Soit la courbe suivante définie sur $\mathbb{R}^2$ pour $t \geq 0$

$$x(t) = e^{-1/t} \cos t^{-1} - \sqrt{2}\, e^{-1/t}, \quad y(t) = e^{-1/t} \sin t^{-1}.$$

1) Montrer que x est y sont C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Dresser le tableau des variations de x et y sur $\mathbb{R}_+$.
3) La courbe admet-elle une asymptote en $t \to +\infty$? Déterminer son comportement à l'infini.
4) a) Vérifier qu'il n'existe qu'un point singulier en $4/\pi$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
b) Étudier le point singulier en $4/\pi$.
5) a) Montrer que x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$ tout entier, puis C^∞ (on pourra procéder par récurrence pour traiter le voisinage de 0).
b) Prouver que 0 est alors un point singulier mais que la courbe n'admet pas de tangente en $t = 0$.
6) Tracer la courbe.

Exercice 2 1) On considère l'équation différentielle, définie sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$(1) \qquad 2\cos(x)y'(x) = \sin(x)y(x) - 5\sin(x)\cos^2(x).$$

a) Donner la forme générale des solutions de (1) sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
b) Existe-t-il des solutions de (1) bornées sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$? Si oui, lesquelles ?
2) Soit l'équation différentielle non linéaire, sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$(2) \qquad 4z'(x) + \tan(x)z(x) = 5\sin(x)\cos(x)z(x)^3.$$

a) Montrer que pour tout $z_0 \in \mathbb{R}$, le problème de Cauchy (2) avec la donnée $z(0) = z_0$ admet une unique solution maximale dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On la notera z, définie sur l'intervalle $I \subset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
b) Donner une solution évidente de (2), et en déduire z et I lorsque $z_0 = 0$.
c) On suppose dans la suite que $z_0 \neq 0$. Montrer alors que z ne s'annule pas sur I.
d) Déterminer alors une équation différentielle d'ordre 1 satisfaite par $y = \dfrac{1}{z^2}$ sur I. La résoudre en fonction de z_0.
e) Donner précisément z et l'intervalle maximal I lorsque

$$z_0 = 1, \qquad z_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad z_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - 2^{-\frac{5}{2}}}}.$$

Exercice 3 On considère le système linéaire non homogène aux inconnues *réelles* x, y et z

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 4z(t) - 5e^{2t}, \\ y'(t) = 2y(t) + z(t) + e^{2t}, \\ z'(t) = x(t) + 2z(t) - e^{2t}. \end{cases}$$

1) Donner la solution générale de l'équation homogène associée.
2) Déterminer une solution particulière du système par variation de la constante ou en donnant la forme générale des solutions.
3) Quelle est la solution générale du système non homogène ? Déterminer la solution correspondant à la donnée initiale $(x(0), y(0), z(0)) = (6, -2, -3)$.

Exercice 4 Soit $H \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ une fonction strictement convexe avec $H(z) \longrightarrow +\infty$ quand $|z| \to +\infty$. On s'intéresse à l'équation différentielle suivante sur $y(x) = (y_1(x),\ y_2(x))$ à valeur dans $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} &y_1'(x) = -\partial_1 H(y(x)),\ y_2'(x) = -\partial_2 H(y(x)),\\ &y(0) = 0. \end{aligned}$$

Cette équation peut également s'écrire sous la forme vectorielle $y'(x) = -\nabla H(y(x))$.
1) Prouver qu'il existe une unique solution maximale à l'équation, sur un intervalle contenant 0 que l'on notera I.
2) Montrer que

$$\frac{d}{dx}\big(H(y(x))\big) \leq 0, \quad \forall x \in I.$$

3) En déduire que $\mathbb{R}_+ \subset I$ et que $|y(x)|$ est borné pour $x > 0$.
4) Prouver que $H(y(x))$ admet une limite finie lorsque $x \to +\infty$.
5) On utilise ici la stricte convexité de H. On rappelle que cela signifie que la matrice $\partial_{ij} H$ est définie positive en tout point ou de manière équivalente que

$$H(\theta z_1 + (1-\theta) z_2) < \theta H(z_1) + (1-\theta) H(z_2), \quad \forall z_1 \neq z_2, \quad \forall \theta \in]0,\ 1[.$$

a) Rappeler que H admet au plus un minimum local sur $\mathbb{R}^2$.
b) Montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que $H(z_0) = \inf_{z \in \mathbb{R}^2} H(z)$.
c) Conclure que z_0 est également le seul point de $\mathbb{R}^2$ tel que $\nabla H(z_0) = 0$.
6) Conclure que $y(x)$ tend vers z_0 quand $x \to +\infty$.