MATHEMATIQUES L3 – 2006/2007
T.D. d'Analyse numérique
Feuille n°5

Exercice 1 : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.

1) Déterminer le polynôme de degré 1 qui coïncide avec f aux points a et b. On notera L_1 ce polynôme.

On note $e_1(x) = |f(x) - L_1(x)|$ l'erreur commise au point x.

2) Soit A une constante réelle.

On pose $g(x) = f(x) - L_1(x) - A(x-a)(x-b)$. Vérifier que $g(a) = g(b) = 0$.

Soit ensuite $\widetilde{x} \in]a, b[$. Montrer qu'on peut choisir A de telle sorte que $g(\widetilde{x}) = 0$.

3) On suppose A choisie de telle sorte que $g(\widetilde{x}) = 0$. Montrer qu'il existe $\alpha \in]a, b[$ tel que $g''(\alpha) = 0$ et que $A = \frac{1}{2} f''(\alpha)$.

4) On pose $M_2 = \sup\{|f''(t)|, t \in [a, b]\}$. Montrer que pour tout x dans $[a, b]$, $e_1(x) \leq \dfrac{M_2}{2}(x-a)(b-x)$ puis que, toujours pour tout x dans $[a, b]$, $e_1(x) \leq \dfrac{M_2}{8}(b-a)^2$.

Exercice 2 : On associe à tout entier naturel n et à toute fonction numérique f continue la fonction polynôme f_n, définie pour tout x dans $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}.$$

1) Montrer que, pour tout x dans $[0, 1]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$ (Indication : on pourra considérer l'application $g(x, y) = (x+y)^n$).

2) On considère dans cette question le cas où $\begin{array}{rccc} f : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

a) Déterminer f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que $\sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in [0, 1]\} = \dfrac{1}{4n}$.

3) On définit, pour tout n entier naturel non nul et pour tout entier k dans $[0, n]$:

$$I_n(k) = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx.$$

a) Déterminer, pour tout k entier dans $[0, n-1]$, une relation de récurrence entre $I_n(k)$ et $I_n(k+1)$.

b) En déduire $I_n(k)$ pour $k \in [0, n]$.

c) Calculer $\int_0^1 f_n(x)dx$ pour f continue quelconque.

d) Déterminer, après avoir justifié son existence, $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.