Université de Nice Sophia-Antipolis
Licence L3 Mathématiques - Analyse Numérique - Année 2008/2009

TD 1

Exercice 1.
Etudier et tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :
$x \mapsto x\, lnx$, $x \mapsto e^{-x^2}$.

Exercice 2.
1. Rappeler le théorème des accroissements finis. Application : montrer que

$$|\sin x| \leq x \ \text{ pour tout } x \ \in [0, \frac{\pi}{2}]\,.$$

2. Rappeler les formules de Taylor à l'ordre n.

Exercice 3.
Soit f une fonction Lipschitzienne définie sur $\mathbb{R}$ de constante de Lipschitz k.
1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose que $0 < k < 1$. On définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ par

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \text{ pour tout } \quad n \geq 0\,, \\ x_0 \ \text{ donné}\,. \end{cases}$$

2.1. Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|\,.$$

En déduire que le suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente.
2.2. Soit l la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. Montrer que l est l'unique solution de l'équation :

$$f(x) = x,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Exercice 4.
1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $1 + x \leq e^x$.
2. Soit $T > 0$ et $(t_n)_{n=0..N}$ une subdivision régulière de l'intervalle $[0, T]$: $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n < t_{n+1} < ... < t_N = T$. On note par h le pas de la subdivision : $h = t_{n+1} - t_n$.
Soient $C \in \mathbb{R}$ et deux suites numériques $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ vérifiant l'inégalité suivante :

$$v_{n+1} \leq (1 + Ch)\, v_n + u_n\,, \ \text{ pour tout } \ n \geq 0.$$

Montrer que

$$v_n \leq e^{C(t_n - t_0)} \left(v_0 + \sum_{j=0}^{n-1} u_j \right)\,, \ \text{ pour tout } \ n \geq 0\,.$$

Exercice 5.
Soit $a > 0$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = -ax(t), \quad t > 0\,, \\ x(0) = x_0\,. \end{cases}$$

1. Écrire le schéma d'Euler explicite pour l'équation ci-dessus. Étudier sa consistance et sa convergence.
2. Écrire le schéma d'Euler implicite pour la même équation. Étudier sa consistanceet sa convergence.

Exercice 6.

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a\,,b \in \mathbb{R}$. Expliciter la solution du problème différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + b \;\text{ pour } t \in I\,, \\ x(t_0) = x_0 \;\text{ avec }\; x_0 \in \mathbb{R},\; t_0 \in I\,, \end{cases}$$

(on pourra multiplier les deux membres de l'équation différentielle par e^{-at}).

2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose que :

$$\begin{cases} x'(t) \leq ax(t) + b(t) \;\text{ pour tout } t \in I\,, \\ x(t_0) = x_0 \;\text{ avec }\; x_0 \in \mathbb{R},\; t_0 \in I\,. \end{cases}$$

Montrer que pour tout $t \geq t_0$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$x(t) \leq x_0 e^{at} + \int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{a(t-s)}\, ds\,.$$

3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b deux fonctions continues sur I. Expliciter la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \;\text{ pour } t \in I\,, \\ x(t_0) = x_0 \;\text{ avec }\; x_0 \in \mathbb{R},\; t_0 \in I\,, \end{cases}$$

(multiplier par $e^{-A(t)}$, où $A(t) = \int_0^t a(s)ds$).

Exercice 7.

Soit $f\ :\ [a,b]\ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t))\,, \\ x(a) = x_a\,. \end{cases}$$

On considère la méthode d'Euler explicite

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)\,.$$

1. Montrer que la méthode d'Euler explicite est consistante. Donner son ordre.
2. Montrer que la méthode d'Euler explicite est convergente à l'ordre 1.