Analyse Numérique
TD 3

EXERCICE 1
Interpolation de Lagrange

Soit x_0, x_1, ..., x_n, $n+1$ points distincts.

a. Soit $(L_i)_{i=0,n}$ $n+1$ fonctions de $\mathcal{P}_n$ vérifiant $L_i(x_j) = \delta_{ij}$. Montrer que $(L_i)_{i=0,n}$ est une base de $\mathcal{P}_n$ (ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n). Construire cette base.

b. Soit $p_n \in \mathcal{P}_n$ vérifiant : $p_n(x_i) = f(x_i)\, \forall i = 0, ..., n$. Décomposer p_n sur la base des $(L_i)_{i=0,n}$. Un tel p_n est-il unique ?

c. Écrire le polynôme d'interpolation associé aux points donnés dans le tableau suivant :

x_i	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1
$f(x_i)$	$-3/2$	0	$1/4$	0	0

Tab. 1 – Tableau pour l'interpolation.

d. Établir la majoration d'interpolation de Lagrange *i.e.* si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, alors il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{\Pi_{j=0}^{n}(x - x_j)}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi)\,.$$

e. Soient $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = e^{3x}$ définies sur $[0,1]$. Estimer le nombre maximum de points pour que l'erreur entre la fonction et son polynôme d'interpolation de Lagrange soit inférieur à 0.1, 0.01 et 0.001.

EXERCICE 2
Interpolation de Hermite

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ et x_1, x_2 deux points distincts. Soit p un polynôme de degré ≤ 3 vérifiant $p(x_i) = f(x_i)$ et $p'(x_i) = f'(x_i)$ pour $i = 1, 2$.

a. Montrer qu'un tel polynôme existe et est unique.

b. Établir la majoration d'interpolation suivante : si $f \in \mathcal{C}^4([a,b])$, alors il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$f(x) - p(x) = \frac{(x - x_1)^2 (x - x_2)^2}{4!}\, f^{(4)}(\xi)\,.$$

c. Trouver une base $(A_1,\, A_2,\, B_1,\, B_2)$ de $\mathcal{P}_3$ telle que

$$p(x) = f(x_1)A_1(x) + f(x_2)A_2(x) + f'(x_1)B_1(x) + f'(x_2)B_2(x)\,.$$

et exprimer cette base en fonction des polynômes d'interpolation de Lagrange L_1 et L_2.

d. Décrire les polynômes d'interpolation de Hermite dans le cadre général.