Analyse Numérique
TD 4

EXERCICE 1
Formule des trapèzes

a. Dans la formule suivante

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx \approx \alpha f(a) + \beta f(a+h)\,,$$

déterminer α et β pour que la formule soit exacte pour des polynômes de degré ≤ 1.

b. Soit $q \in \mathcal{P}_1$ (ensemble des polynômes de degré ≤ 1) défini par $q(a) = f(a)$ et $q(a+h) = f(a+h)$. Construire q. En approchant f par q sur $[a, a+h]$, donner une approximation de $\int_a^{a+h} f(x)\,dx$.

c. Donner une estimation de l'erreur d'intégration.

d. Soit $\{x_i\}$, $i = 0, ..., n$ une subdivision de l'intervalle $[c, d]$ de pas h. Utiliser la formule des trapèzes sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ pour approcher $\int_c^d f(x)\,dx$. Donner une estimation de l'erreur d'intégration.

e. Soit $\varepsilon = 10^{-1}\,, 10^{-2}\,, 10^{-8}$, trouver n pour que cette formule de quadrature approche $\int_0^3 \sin(x) e^{-x^2}\,dx$ avec une précision ε.

EXERCICE 2
Formule du point milieu

a. Déterminer la formule de quadrature suivante

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \alpha f(\frac{a+b}{2})$$

pour qu'elle soit exacte pour des polynômes de degré le plus haut possible.

b. Donner une estimation de l'erreur d'intégration.

c. Soit $\{x_i\}$, $i = 0, ..., n$ une subdivision de l'intervalle $[c, d]$ de pas h. Utiliser la formule du point milieu composée pour approcher $\int_c^d f(x)\,dx$.

EXERCICE 3
Formule de Simpson

a. Déterminer la formule de quadrature suivante

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1)\,,$$

et donner son erreur d'intégration.

b. Écrire cette formule sur $[a, a+h]$ et donner l'erreur d'intégration en fonction de h.

c. Sur une subdivision de pas h de l'intervalle $[c, d]$, approcher $\int_c^d f(x)\,dx$ en utilisant la formule ci-dessus.