Analyse Numérique
TD 6

EXERCICE 1
Matrices diagonales, triangulaires

1.1 Matrices diagonales

Soit $D = (d_{ii})_{i=1,\ldots,n}$ une matrice diagonale d'ordre $n > 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que D soit inversible.

1.2 Matrices triangulaires inférieures

Soit L une matrice triangulaire inférieure d'ordre $n > 0$.

a. Sous quelle condition nécessaire et suffisante L est-elle inversible ?

b. On suppose que la matrice triangulaire inférieure L est inversible. Soit b un vecteur colonne ayant n composantes.
Donner un algorithme qui permet de résoudre l'équation d'inconnue y :

$$L\,y = b\,.$$

Quel est le coût de cet algorithme en termes d'opérations élémentaires (additions, multiplications, divisions) ?

1.3 Matrices triangulaires supérieures

On considère une matrice triangulaire supérieure U d'ordre $n > 0$.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que U soit inversible.

b. On suppose que la matrice triangulaire supérieure U est inversible. Soit y un vecteur colonne donné ayant n composantes.
Écrire un algorithme qui permet de résoudre l'équation d'inconnue x :

$$U\,x = y\,.$$

Donner la complexité de cet algorithme.

EXERCICE 2
Méthode d'élimination de Gauss

2.1 Des exemples

Effectuer une élimination de Gauss sur les systèmes linéaires suivants

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

2.2 Cas général

On considère maintenant le cas général d'un système linéaire $A\,x = b$.
a. Écrire un algorithme de résolution de ce système par la méthode de Gauss.
b. Donner la complexité de cet algorithme.

EXERCICE 3
Factorisation LU

3.1 Un exemple

On revient sur la première matrice donnée dans l'exercice 2 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Effectuer une factorisation LU de cette matrice où L est une matrice triangulaire inférieure ayant des 1 sur sa diagonale et U est une matrice triangulaire supérieure.

3.2 Cas général

a. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires inférieures de même ordre est une matrice triangulaire inférieure.

b. Soit L une matrice triangulaire inférieure et inversible.
Montrer que son inverse L^{-1} est également une matrice triangulaire inférieure.

c. Soit A une matrice carrée régulière possédant une décomposition LU, avec L une matrice triangulaire inférieure ayant des 1 sur sa diagonale et U une matrice triangulaire supérieure.
Montrer que cette factorisation $A = LU$ est unique.

3.3 Factorisation LU d'une matrice tridiagonale

Soit A une matrice tridiagonale inversible $\Big(a_{i-1\,i} = a_i\,, a_{i\,i} = b_i\,, a_{i\,i+1} = c_i\Big)$.
Écrire un algorithme de factorisation LU de A.
Quelle est la complexité de cet algorithme ?

Application : effectuer la décomposition $A = LU$ de la matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 4
Localisation des valeurs propres d'une matrice

On introduit la définition suivante.

Définition 4.1. *Soit* $A = (a_{kj})_{k,j=1,\ldots,n}$ *une matrice carrée d'ordre* n.
On appelle disque de Gerschgörin centré en a_{kk} *l'ensemble*

$$D_k = \{z \in \mathbb{C} / \, |z - a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|\}.$$

On donne le théorème suivant qui sera démontré dans la première partie de cet exercice.

Théorème (théorème de Gerschgörin)
Soit A *une matrice carrée d'ordre* n.
Les valeurs propres de A *appartiennent à l'union des* n *disques de Gerschgörin du plan complexe :*
λ *valeur propre de* $A \Rightarrow \exists\, k \in \{1, \ldots, n\}, \lambda \in D_k$.

4.1 Démonstration du théorème

a. Soit λ une valeur propre de A et u un vecteur propre associé à cette valeur propre. Soit k tel que $|u_k| = \max_{1 \leq j \leq n} |u_j|$.

Montrer que $|\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|$.

Conclure.

4.2 Étude d'un exemple

On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & i & 2 \\ -3 & 2+i & 1 \\ 1 & i & 6 \end{pmatrix}.$$

a. Dessiner les 3 disques de Gerschgörin et localiser les valeurs propres de A.

b. En remarquant que A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres, représenter les disques de Gerschgörin associés aux valeurs propres de ${}^tA$.

c. Donner une majoration des valeurs absolues des valeurs propres de A.

4.3 Matrice à diagonale dominante

Définition 4.2. *Soit* $A = (a_{kj})_{k,j=1,\dots,n}$ *une matrice carrée d'ordre* n.
On dit que A *est à diagonale dominante si* $\forall\, k\,,1 \leq k \leq\, n\,, |a_{kk}| \geq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|\,.$

La matrice A *est dite à diagonale strictement dominante si*

$$\forall\, k\,,1 \leq k \leq\, n\,, |a_{kk}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|\,.$$

a. Montrer, en utilisant le théorème de Gerschgörin, que si A est à diagonale strictement dominante alors elle est inversible.

b. Montrer que la matrice suivante est à diagonale dominante, mais n'est pas inversible :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$