Analyse Numérique
TD 7

EXERCICE 1
Normes vectorielles

1.1 Définitions

Soit un entier $n > 0$.

a. Montrer que les applications suivantes définies sur $\mathbb{R}^n$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$,

$$x \mapsto \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \,,$$

$$x \mapsto \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \,,$$

$$x \mapsto \|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \,.$$

b. Montrer que, pour $1 \leq p < +\infty$, l'application suivante définie sur $\mathbb{R}^n$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$,

$$x \mapsto \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \,.$$

1.2 Équivalence de normes

Montrer les relations suivantes sur $\mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty \,,$$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty \,,$$
$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \,.$$

1.3 Relation entre la norme p et la norme $+\infty$

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, montrer que

$$\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty \,.$$

EXERCICE 2
Normes matricielles

Soit A une matrice carrée d'ordre $n > 0$, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on note par $\| \ \|_p$ la norme matricielle calculée à partir de la norme vectorielle $\| \ \|_p$ *i.e.*

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p = \sup_{\|x\|_p\leq 1} \|Ax\|_p = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}\,.$$

a. Montrer que

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\,,$$
$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,.$$

b. Soit B une matrice réelle et symétrique. Montrer que pour

$$\lambda_{\min}(B) \leq \frac{(Bx,x)}{\|x\|_2^2} \leq \lambda_{\max}(B)\,,$$

où $\lambda_{\min}(B)$ et $\lambda_{\max}(B)$ sont respectivement les plus petite et grande valeurs propres de B. En déduire que $\|A\|_2 = \sqrt{\rho\left({}^tAA\right)}$, où ρ est le rayon spectral.

EXERCICE 3
Une application

Soit $(\theta_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par

$$\theta_{n+1} \leq \theta_{n-1} + 2\beta\theta_n + \alpha_n\,, \quad \text{pour tout } \ n \geq 1\,,$$

avec $\theta_n,\ \alpha_n,\ \beta\ \in \mathbb{R}_+$.
a. Montrer qu'il existe une matrice A et un vecteur B_n tels que

$$\begin{pmatrix} \theta_n \\ \theta_{n+1} \end{pmatrix} \ \leq\ A\ \begin{pmatrix} \theta_{n-1} \\ \theta_n \end{pmatrix} \ +\ B_n \quad \text{pour tout } \ n \geq 1\,.$$

b. En déduire que

$$\theta_n \leq e^{(n-1)\beta}\,\sqrt{\theta_0^2 + \theta_1^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i\, e^{(n-1-i)\beta}\,, \quad \text{pour tout } \ n \geq 2\,.$$

EXERCICE 4
Conditionnement d'une matrice

Soit A une matrice carrée d'ordre $n > 0$. Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on note par $\mathrm{cond}_p(A)$ le nombre de conditionnement de A calculé avec la norme matricielle $\| \ \|_p$.

4.1 Quelques propriétés du conditionnement

Montrer les propriétés suivantes :

a. $\mathrm{cond}_p(A) \geq 1$;

b. $\mathrm{cond}_p(\alpha A) = \mathrm{cond}_p(A)\,,\ \ \forall \alpha \neq 0$;

c. $\mathrm{cond}_2(A) = \sqrt{\dfrac{\max_i |\lambda_i(A^\star A)|}{\min_i |\lambda_i(A^\star A)|}}$, où les nombres $\lambda_i(A^\star A)$ sont les valeurs propres de $A^\star A$ et $A^\star$ est l'adjoint de A ;

d. si A est symétrique et réelle alors $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\max_i |\lambda_i(A)|}{\min_i |\lambda_i(A)|}$, où les nombres $\lambda_i(A)$ sont les valeurs propres de A ;

e. si U est une matrice orthogonale alors $\mathrm{cond}_2(U) = 1$ et $\mathrm{cond}_2(AU) = \mathrm{cond}_2(UA) = \mathrm{cond}_2(A)$.

4.2 Analyse perturbative

Soient x et $x + \delta x$ les solutions des systèmes linéaires

$$\begin{array}{rcl} Ax & = & b\,, \\ (A + \delta A)(x + \delta x) & = & b\,. \end{array}$$

a. Montrer que $\dfrac{\|\delta x\|_p}{\|x + \delta x\|_p} \leq \mathrm{cond}_p(A) \dfrac{\|\delta A\|_p}{\|A\|_p}$.

b. En déduire que si $\|A^{-1}\,\delta A\|_p < 1$ alors $\dfrac{\|\delta x\|_p}{\|x\|_p} \leq \mathrm{cond}_p(A) \dfrac{\|\delta A\|_p}{\|A\|_p} \dfrac{1}{1 - \|A^{-1}\,\delta A\|_p}$.

4.3 Applications

Calculer le conditionnement par rapport à la norme $\|\ \ \|_2$ de la matrice suivante

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & & & & & & & \\ -1 & \alpha & -1 & & & & \Large 0 & & \\ & -1 & \alpha & -1 & & & & & \\ & & -1 & \alpha & -1 & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & -1 & \alpha & -1 & & \\ & & \Large 0 & & & -1 & \alpha & -1 & \\ & & & & & & -1 & \alpha & -1 \\ & & & & & & & -1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

où α est un paramètre réel.