Analyse Numérique
TD 8

EXERCICE 1
Convergence de méthodes itératives linéaires

1.1 Relation entre le rayon spectral et les normes matricielles

Soit A une matrice carrée d'ordre $n > 0$, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.
Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on note par $\| \ \|_p$ la norme matricielle calculée à partir de la norme vectorielle $\| \ \|_p$ *i.e.*

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p = \sup_{\|x\|_p\leq 1} \|Ax\|_p = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}.$$

a. Montrer que son rayon spectral $\rho(A)$ vérifie

$$\rho(A) \leq \|A\|_p, \quad \forall\, 1 \leq p \leq +\infty.$$

b. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une norme matricielle $\| \ \|$ dépendant de ε et A, tel que

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

c. Montrer que

$$\lim_{m\to+\infty} \|A^m\|^{\frac{1}{m}} = \rho(A).$$

1.2 Suite et série de matrices

Définition 1.1. *Convergence d'une suite de matrices On dit qu'une suite de matrices* $(A_m)_{m\geq 0}$ *converge vers la matrice* A *si* $\lim\limits_{m\to+\infty} \|A_m - A\|_p = 0$.

a. Montrer que

$$\lim_{m\to+\infty} A^m = 0 \Longleftrightarrow \rho(A) < 1.$$

b. Monter que

$$\text{la série } \sum_{m=0}^{+\infty} A^m \text{ converge } \Longleftrightarrow \rho(A) < 1.$$

Montrer dans ce cas que $\lim\limits_{m\to+\infty} \sum\limits_{m=0}^{+\infty} A^m = (I - A)^{-1}$.

EXERCICE 2
Un exemple de méthode itérative

Soit A une matrice carrée d'ordre $n > 0$, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ régulière et $b \in \mathbb{R}^n$. On veut résoudre le système linéaire

$$Ax = b\,.$$

On note D la matrice diagonale constituée de la diagonale de A. Soit $\alpha \neq 0$, on étudie la méthode itérative

$$x^{k+1} = (I - \alpha D^{-1}A)x^k + \alpha D^{-1}b\,.$$

a. Montrer que la méthode est consistante *i.e.* si $(x^k)_{k\geq 0}$ converge vers x alors x est solution.
b. Exprimer les coefficients de la matrice $D^{-1}A$ en fonction de ceux de A.
c. On suppose que $0 < \alpha \leq 1$ et que A satisfait la propriété suivante

$$\forall\, i\,, 1 \leq i \leq\, n\,, |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\,.$$

Montrer que la méthode est bien définie et

$$\|I - \alpha D^{-1}A\|_\infty < 1\,.$$

En déduire que la méthode est convergente.

EXERCICE 3
Méthodes itératives classiques sur une matrice tridiagonale

Soit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ une matrice carrée d'ordre $n > 0$, du système linéaire $Ax = b$, définie par

$a_{ii} = i + 1\,, i = 1, ..., n\,; a_{i+1\,i} = 1\,, i = 1, ..., n-1\,; a_{i\,i+1} = -i\,, i = 1, ..., n-1\,,$

les autres termes étant nuls.

a. Calculer la matrice d'itération de Jacobi. Prouver que son rayon spectral est < 1.
b. Calculer la matrice G d'itération de Gauss-Seidel. Montrer que le polynôme caractéristique de G s'écrit

$$P_G(\lambda) = \lambda^n \det(I - L - \frac{1}{\lambda}U)\,,$$

et si $|\lambda| \geq 1$ alors $\det(I - L - \frac{1}{\lambda}U) \neq 0$.

En déduire que la méthode est convergente.
c. Le fait d'avoir trouvé une méthode itérative (au moins) convergente prouve que la matrice A est inversible. Pourquoi ?
d. Décrire l'algorithme de Gauss-Seidel appliqué à cet exemple.