Université de Nice Sophia-Antipolis
Licence L3 Mathématiques Année 2008/2009

Analyse Numérique
TD 5

EXERCICE 1
Méthode des approximations successives, ordre de convergence

Soient I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, $g : I \to I$ une fonction assez régulière admettant un point fixe $l \in I$ *i.e.* $g(l) = l$. On considère une suite des itérés suivante

$$\begin{cases} x_0 \in I \ \text{ donné}\,, \\ x_{n+1} = g(x_n)\,, \quad \forall n \geq 0\,. \end{cases} \tag{1.1}$$

a. Faire un dessin illustrant la construction de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$.
b. Calculer l'erreur $e_n = x_n - l$ et donner une condition pour que la méthode du point fixe (1.1) soit d'ordre $p \geq 1$.

EXERCICE 2
Formules et illustrations graphiques des méthodes itératives de recherche des zéros d'une fonction

On recherche un zéro d'une fonction régulière $f : I \to I$ où I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.

2.1 Méthode de dichotomie

Rappeler la méthode de dichotomie qui permet d'approcher ce zéro de f. Faites une illustration graphique.

2.2 Méthode de Newton

On considère maintenant la méthode de Newton pour rechercher ce zéro.
a. établir sa formule en utilisant un développement de Taylor ;
b. faire un dessin pour illuster cette méthode.

EXERCICE 3
Un exemple

3.1

Soit l'équation

$$x = e^{-x}\,, x \in [0, +\infty[\,. \tag{3.1}$$

a. On considère la méthode itérative suivante

$$\begin{cases} x_0 \in [0, +\infty[\ \text{ donné}\,, \\ x_{n+1} = e^{-x_n}\,, \ \ \forall n \geq 0\,. \end{cases} \tag{3.2}$$

Montrer que la méthode (3.2) est convergente et donner l'ordre de convergence.
b. Appliquer la méthode de Newton à l'équation (3.1) et montrer que la convergence est quadratique.

3.2

Montrer que l'équation $x = -\ln(x)\,, x \in]0, +\infty[$ admet une solution unique. Montrer que la méthode itérative

$$\begin{cases} x_0 \in]0, +\infty[\ \text{ donné}\,, \\ x_{n+1} = -\ln x_n\,, \ \ \forall n \geq 0\,, \end{cases}$$

diverge. Proposer une méthode d'approximation de la solution.

EXERCICE 4
Points fixes attractif, répulsif

Soient I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, $\phi : I \to I$ une fonction $C^1(I)$ admettant un point fixe $a \in I$ *i.e.* $\phi(a) = a$. On considère une suite des itérés suivante

$$\begin{cases} x_0 \in I \ \text{ donné}\,, \\ x_{n+1} = \phi(x_n)\,, \ \ \forall n \geq 0\,. \end{cases} \tag{4.1}$$

a. On suppose que $|\phi'(a)| < 1$.
Soit k tel que $|\phi'(a)| < k < 1$. Montrer que :

$$\exists\, h > 0 \ \ \forall x \ \in [a-h, a+h]\,, \ \ |\phi'(x)| \leq k\,. \tag{4.2}$$

Prouver que $\phi([a-h, a+h]) \subset [a-h, a+h]$ et que $\forall x_0 \in [a-h, a+h]$, la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ donnée par la formule (4.1) converge vers a.

b. On suppose $|\phi'(a)| > 1$.
Peut-on utiliser l'algorithme (4.1) pour approcher a ?

c. On suppose maintenant que $|\phi'(a)| = 1$.
En prenant $\phi(x) = \sin(x), x \in [0, \pi/2], a = 0$ puis $\phi(x) = \text{sh}(x), x \in [0, +\infty[, a = 0$, conclure.